ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Κβαντική Μηχανική ΙΙ

Ενότητα 8: Ερωτήσεις και Ασκήσεις (Ασκήσεις προς Λύση)

Αθανάσιος Λαχανάς
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

Οι ασκήσεις που ακολουθούν είναι προς επίλυση από τους φοιτητές. Οι περισσότερες από αυτές έχουν αναλυθεί κατά την διάρκεια των παραδόσεων. Κάποιες ενδεχόμενα να έχουν αυξημένο βαθμό δυσκολίας.

Ασκήσεις Κβαντικής Μηχανικής ΙΙ (1η Σειρά)

Τμήμα: Α. Λαχανά

<u>1)</u> Α) Απο την σχέση μετάθεσης $[\ \hat{x}\ ,\ \hat{p}_x\ ]\ =\ i\hbar$ δείξτε ότι για τα κανονικοποιημένα στην μονάδα ιδιοανύσματα $|x\rangle\ , |p\rangle$ των τελεστών της θέσης $\hat{x}\ ,\ \hat{p}_x$ και της ορμής με ιδιοτιμές x και p_x αντίστοιχα, ισχύουν οι σχέσεις

$$\langle x|\,\hat{p}_x\,|x'\rangle\ =\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\delta(\ x-x'\ )\quad ,\quad \langle p|\,\hat{x}\,|p'\rangle\ =\ i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\delta(\ p-p'\ )\ .$$

Να δειχθεί επίσης ότι, εκτός από μια αυθαίρετη πολλαπλασιαστική φάση, το εσωτερικό γινόμενο των $|x\rangle\ , |p\rangle$ είναι

$$\langle x|p\rangle\ =\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\ e^{\,ixp/\hbar}\quad .$$

Β) Χρησιμοποιήστε τις παραπάνω σχέσεις για να δείξετε ότι αν φυσικό σύστημα περιγράφεται από το ¨ανυσμα¨ $|\psi(t)\rangle$ και επομένως έχει κυματικές συναρτήσεις $\psi(x,t)\ =\ \langle x|\psi(t)\rangle\ ,\ \tilde{\psi}(p,t)\ =\ \langle p|\psi(t)\rangle$ στον χώρο των θέσεων και των ορμών αντίστοιχα, τότε

$$\psi(x,t)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\ e^{\,ixp/\hbar}\tilde{\psi}(p,t)\ dp\ ,\ \tilde{\psi}(p,t)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}\ e^{\,-ixp/\hbar}\psi(x,t)\ dx$$

Γ) Να δειχθεί επίσης ότι οι μέσες τιμές της θέσης και της ορμής $\langle x\rangle\ =\ \langle\psi(t)|\,\hat{x}\,|\psi(t)\rangle\ ,\ \langle p_x\rangle\ =\ \langle\psi(t)|\,\hat{p}_x\,|\psi(t)\rangle$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\langle x\rangle\ =\ \int_{-\infty}^{+\infty}\ \psi^*(x,t)\ x\ \psi(x,t)\ dx\ =\ \int_{-\infty}^{+\infty}\ \tilde{\psi}^*(p,t)\ (\ \jmath\hbar\frac{\partial}{\partial p}\ )\ \ \tilde{\psi}(p,t)\ dp.$$

και

$$\langle p_x\rangle\ =\ \int_{-\infty}^{+\infty}\ \psi^*(x,t)\ (-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\ \psi(x,t)\ dx\ =\ \int_{-\infty}^{+\infty}\ \tilde{\psi}^*(p,t)\ p\ \tilde{\psi}(p,t)\ dp$$

<u>2)</u> Θεωρήστε τον τελεστή $\hat{S}_a\ =\ \exp\{\ -i\ \frac{a}{\hbar}\ \hat{p}_x\ \}$ όπου a αυθαίρετη σταθερά με μονάδες μήκους. Δείξτε ότι

$$[\ \hat{x}\ ,\ \hat{S}_a\ ]\ =\ a\ \hat{S}_a\quad .$$

Με βάση την σχέση αυτή δείξτε ότι το φάσμα των ιδιοτιμών του τελεστή της θέσης είναι συνεχές. Ακολουθήστε τα ανάλογα βήματα για να δείξετε το ίδιο για τον τελεστή της ορμής.

<u>3)</u> Χρησιμοποιήστε τους τελεστές καταστροφής και δημιουργίας $a\ ,\ a^\dagger$ του μονοδιάστατου γραμμικού ταλαντωτή για να δείξετε ότι το γινόμενο αβεβαιότητας θέσης και ορμής είναι

$$(\Delta x)(\Delta p_x)\ =\ \hbar\ (\ n+\frac{1}{2}\ )$$

<u>4)</u> Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για την κατάσταση του κενου $|0\rangle$ του μονοδιάστατου γραμμικού ταλαντωτή ισχύει $a\,|0\rangle\ =\ 0$, όπου a ο τελεστής καταστροφής, να βρεθεί η κυματική συνάρτηση $\psi_0(x)$ της θεμελιώδους ενεργειακής στάθμης. Μπορείτε να κάνετε το ίδιο για τις ιδιοσυναρτήσεις των διεγερμένων ενεργειακών σταθμων ;

<u>Υπόδειξη</u>: Χρησιμοποιήστε τα συμπεράσματα της άσκησης (1).

Ασκήσεις Κβαντικής Μηχανικής ΙΙ (2η Σειρά)

Τμήμα: Α. Λαχανά

1) Α) Να βρεθούν οι ιδιοκαταστάσεις $|\lambda\rangle$ του τελεστή της καταστροφής a του μονοδιάστατου γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή

$$a\ |\lambda\rangle\ =\ \lambda\ |\lambda\rangle$$

εκπεφρασμένες ως επαλληλία των ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας.

Β) Αν την χρονική στιγμή $t = 0$ ο ταλαντωτής βρεθεί σε καποια από αυτές της καταστάσεις να υπολογισθούν οι μέσες τιμές της θέσης και της ορμής $\langle x\rangle_t$ και $\langle p_x\rangle_t$, την χρονική στιγμή $t > 0$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ιδιοτιμή λ για την οποία το αποτέλεσμα για τις μέσες τιμές είναι το κλασσικό αποτέλεσμα

$$\langle x\rangle_t\ =\ f_0\ \sin(\omega t)\quad ,\quad \langle p_x\rangle_t\ =\ m\ f_0\ \omega\ \cos(\omega t)\ .$$

Γ) Στην κατάσταση αυτή ποιά η είναι η πιθανότητα να λάβω τιμή $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ σε μέτρηση της ενέργειας την χρονική στιγμή $t > 0$ και ποιά η μέση τιμή και η διασπορά της ενέργειας ;

2) Η Χαμιλτωνιανή κβαντικού συστήματος δίνεται από την έκφραση

$$\hat{H}\ =\ \hbar\omega\ (\ b^\dagger b\ +\ \frac{1}{2})$$

όπου οι τελεστές b , $b^\dagger$ ικανοποιούν την άλγεβρα

$$b^2\ =\ 0\ ,\ (b^\dagger)^2\ =\ 0\ ,\ \{b, b^\dagger\}\ \equiv\ bb^\dagger\ +\ b^\dagger b\ =\ 1$$

Να βρεθεί το ενεργειακό φάσμα του συστήματος και οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας. Τι παρατηρείτε ; Να αναπαρασταθούν η Χαμιλτωνιανή $\hat{H}$ οι τελεστές b , $b^\dagger$ και ο τελεστής του αριθμού κατάληψης $\hat{N}\ \equiv\ b^\dagger\ b$ υπό μορφή πινάκων.

3) Σωματίδιο μάζας m κινείται σε δυναμικό που είναι πλήρως απωστικό στην περιοχή $x < 0$ ενώ στην περιοχή $x > 0$ έχει την μορφή του δυναμικού του γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή συχνότητας ω . Ποιές είναι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας ;

4) Για σύστημα δύο μονοδιάστατων γραμμικών αρμονικών ταλαντωτών 1 και 2 ίδιας μάζας και ίδιας συχνότητας, να δειχθεί ότι ο τελεστής

$$\hat{G}\ =\ m^2\ \omega^2\ \hat{x}_1\ \hat{x}_2\ +\ \ \hat{p}_1\ \hat{p}_2$$

είναι σταθερά της κίνησης, δηλαδή μετατίθεται με την Χαμιλτωνιανή. Ποιά είναι η φυσική σημασία του $\hat{G}$ στην περίπτωση της κλασσικής κίνησης ;

5) Για μονοδιάστατο γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή, με $m\ =\ \hbar\ =\ \omega\ =\ 1$ σε κατάλληλες μονάδες, δίνεται ότι μιά ακανονικοποίητη ιδιοσυνάρτηση της ενέργειας έχει την ακόλουθη μορφή

$$\psi(x)\ =\ (\ 2\ x^3\ -\ 3\ x\ )\ e^{-\ x^2\ /\ 2}\quad .$$

Να βρεθούν οι δύο ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας που ενεργειακά βρίσκονται πλησιέστερα σε αυτήν.

Ασκήσεις Κβαντικής Μηχανικής ΙΙ (3η Σειρά)

Τμήμα: Α. Λαχανά

<u>**1)**</u> Α) Να εκφρασθούν οι τελεστές της στροφορμής $\hat{J}_{x,y,z}$ υπό μορφή πινάκων στην βάση όπου ο $\hat{J}_z$ είναι διαγώνιος όταν ο κβαντικός αριθμός j της ολικής στροφορμής έχει τιμές $j = 1/2$ και $j = 1$ αντίστοιχα.
Β) Ας υποτεθεί ότι η κατάσταση ενός συστήματος για $j = 1$, και με τον τελεστή J_z να είναι ο διαγώνιος πίνακας $\hat{J}_z = \mathrm{diag}\,\{1,\ 0,\ -1\}$, δίνεται από τον μονόστηλο πίνακα

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Ποιά είναι η πιθανότητα να βρώ τιμή $\hbar$ σε μέτρηση της $\hat{J}_x$ συνιστώσας ; .
Γ) Η Χαμιλτωνιανή κβαντικού περιστροφέα ολικής στροφορμής $j = 1$ δίνεται από τον τελεστή

$$\hat{H} \;=\; \frac{\hat{J}_x^2}{2\Theta_x} \;+\; \frac{\hat{J}_y^2}{2\Theta_y} \;+\; \frac{\hat{J}_z^2}{2\Theta_z}$$

όπου $\Theta_{x,y,z}$ οι ροπές αδρανείας του περιστροφέα στους άξονες x, y, z αντίστοιχα. Να βρεθεί το ενεργειακό φάσμα του κβαντικού περιστροφέα. Τι συμβαίνει αν δύο η και όλες οι ροπές αδρανείας είναι ίσες ;

<u>**2)**</u> Για δεδομένη τιμή της τροχιακής στροφορμής l να βρεθεί η ιδιοσυνάρτηση $Y_{lm}(\theta, \phi)$ των $\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_z$ για την μεγίστη και την ελαχίστη δυνατή τιμή του m .

<u>**3)**</u> Α) Να δειχθεί ότι οι μέσες τιμές των συνιστωσών $\hat{J}_x, \hat{J}_y$ της στροφορμής στις ιδιοκαταστάσεις $|j\ m\rangle$ των $\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z$ είναι μηδέν,

$$\langle j\ m|\, \hat{J}_{x,y}\, |j\ m\rangle \;=\; 0\ .$$

Β) Να δειχθεί ότι

$$\langle j\ m|\, \hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{n}\, |j\ m\rangle \;=\; \hbar m\, (\cos\theta)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το μοναδιαίο άνυσμα $\mathbf{n}$ με τον άξονα z .

<u>**4)**</u> Να δειχθεί ότι για συγκεκριμένη τιμή της ολικής τροχιακής στροφορμής j ο λόγος

$$\frac{\left\langle \hat{J}_z \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \hat{\mathbf{J}}^2 \right\rangle}}\ ,$$

είναι πάντα μικρότερος από την μονάδα. Ποιά είναι η φυσική ερμηνεία αυτής της ποσότητας ; Για ποιά κατάσταση αυτή λαμβάνει την μεγαλύτερη τιμή της ; Στην περίπτωση αυτή πως συγκρίνεται με το αντίστοιχο κλασικό αποτέλεσμα ; Δείξτε ότι για μεγάλες τιμές του κβαντικού αριθμού j ο λόγος αυτός προσεγγίζει την αντίστοιχη κλασική έκφραση.

<u>**5)**</u> Φυσικό σύστημα χαρακτηρίζεται από μαγνητική ροπή $\mu = g\ \hat{\mathbf{J}}$ όπου $\hat{\mathbf{J}}$ είναι η στροφορμή του. Το σύστημα τοποθετείται σε σταθερό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$. Να βρεθεί η χρονική μεταβολή της μέσης τιμής της στροφορμής $d\left\langle \hat{\mathbf{J}} \right\rangle / dt$. Δείξτε ότι το μέτρο του ανύσματος $\left\langle \hat{\mathbf{J}} \right\rangle$ παραμένει σταθερό, ενώ το ίδιο το άνυσμα εκτελεί περιοδική κίνηση γύρω από το μαγνητικό πεδίο σχηματίζοντας σταθερή γωνία με αυτό. Ποιά είναι η συχνότητα περιφοράς ;

Ασκήσεις Κβαντικής Μηχανικής ΙΙ (4η Σειρά)

Τμήμα: Α. Λαχανά

1) α) Με δεδομένο το ενεργειακό φάσμα του ατόμου του Υδρογόνου να βρέιτε το φάσμα δέσμιας κατάστασης ηλεκτρονίου - ποζιτρονίου γνωστής ως positronium.
β) Να κάνετε το ίδιο για το ενεργειακό φάσμα του Δευτερίου. Στην περίπτωση αυτή να βρείτε την διαφορά στις συχνότητες εκπομπής ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας του Δευτερίου και Υδρογόνου. Τι παρατηρείτε; (Η διαφορά αυτή ήταν σημαντική για την ανακάλυψη του Δευτερίου από τον Urey το 1932 .)

2) Για την θεμελειώδη στάθμη του ατόμου του Υδρογόνου ποιά είναι η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο στην απαγορευμένη κλασικά περιοχή ;

3) Σύστημα δύο σωματιδίων χωρίς σπίν με μάζες $m_1,\ m_2$ και φορτία $q_1,\ q_2$ αλληλεπιδρούν με δυναμικό U_{12} το οποίο είναι συνάρτηση της σχετικής τους θέσης. Το σύστημα τοποθετείται μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που περιγράφεται από τα δυναμικά $\vec{A},\ \Phi$. Να δειχθεί ότι :
α) Στην περίπτωση κίνησης σε στατικό ηλεκτρικό πεδίο, $\vec{A}=0,\ \Phi \equiv V$, του οποίου το δυναμικό V μεταβάλλεται σχετικά αργά μετην θέση, η Χαμιλτωνιανή του συστήματος είναι

$$\hat{H} \;=\; \Big(\frac{\hat{P}^{\,2}_{CM}}{2\,M} \;+\; Q\,V(\vec{R}) \Big) \;+\; \Big(\frac{\hat{p}^{\,2}_{r}}{2\,\mu} \;+\; U_{12}(\vec{r}) \Big) \;-\; \vec{d}\cdot\vec{E}(\vec{R})$$

όπου $\vec{d}$ είναι η ηλεκτρική διπολική ροπή του συστήματος

$$\vec{d} \;=\; \frac{1}{M}\,(\, q_1\,m_2 - q_2\,m_1 \,)\,\vec{r}$$

στο σύστημα κέντρου μάζας του συστήματος.
β) Στην περίπτωση κίνησης σε σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, και αν τα σωματίδια έχουν αντίθετα φορτία $q_1=-q_2\equiv q$, η Χαμιλτωνιανή του συστήματος είναι

$$\hat{H} \;=\; \frac{\hat{P}^{\,2}_{CM}}{2\,M} \;+\; \Big(\frac{\hat{p}^{\,2}_{r}}{2\,\mu} \;+\; U_{12}(\vec{r}) \Big) \;-\; \vec{M}\cdot\vec{B}$$

όπου $\vec{M}$ είναι η μαγνητική ροπή του συστήματος

$$\vec{M} \;=\; \frac{q}{2\,M}\Big(\frac{m_2}{m_1} \;-\; \frac{m_1}{m_2} \Big)\,\vec{L}$$

και $\vec{L}$ η σχετική τροχιακή στροφορμή του συστήματος. Στις ανωτέρω εκφράσεις $\vec{R},\ \vec{r}$ είναι τα ανύσματα της σχετικής θέσης και του κέντρου μάζας και $\hat{P}_{CM},\ \hat{p}_r$ είναι οι αντίστοιχες ορμές. $M,\ \mu$ είναι η ολική και η ανηγμένη μάζα του συστήματος και Q το ολικό φορτίο.

4) Σωματίδιο μάζας m περιγράφεται από την κυματική συνάρτηση

$$\psi(\vec{r}) \;=\; N\,r\,e^{-r/a}\,\{\,c_0\,\cos\theta \;+\; c_1\,\sin\theta\,\cos\phi\,\}$$

όπου N σταθερά νορμαλισμού και $c_{\,0,1}$ δεδομένες σταθερές. Απαντήστε στα κάτωθι ερωτήματα
α) Δείξτε ότι η πιθανότητα να μετρηθεί τροχιακή στροφορμή $l=1$ είναι 1 . Ποιές οι πιθανότητες να μετρηθούν τιμές της τρίτης προβολής της τροχιακής στροφορμής ίσες με $m=1,\ 0,\ -1$;
β) Αν η ψ είναι ιδιοκατάσταση της ενέργειας σωματιδίου μάζας m που κινείται σε κεντρικό δυναμικό $V(r)$ το οποίο μηδενίζεται για μεγάλες αποστάσεις r , ποιά είναι η ενέργεια και ποιό το δυναμικό ;

Ασκήσεις Κβαντικής Μηχανικής ΙΙ (5η Σειρά)

Τμήμα: Α. Λαχανά

1) Ηλεκτρόνιο αναγκάζεται να κινείται σε μια μικρή περιοχή του χώρου αμελητέας διάστασης οπότε ο μοναδικός βαθμός ελευθερίας του είναι το σπιν $\vec{s}$ του οποίου οι συνιστώσες μπορούν να περιγραφούν από τους ακόλουθους πίνακες

$$s_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \; s_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \; s_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Αν ο γυρομαγνητικός λόγος του ηλεκτρονίου είναι g_s και η μαγνητική του ροπή $\vec{\mu} = g_s \frac{(-e)}{2mc} \vec{s}$, όπου $-e$ το φορτίο του ηλεκτρονίου και m η μάζα του, απαντήστε στα κάτω ερωτήματα :

α) Αν εφαρμοσθεί σταθερό μαγνητικό πεδίο προς καποια κατεύθυνση έντασης B ποιό είναι το ενεργειακό φάσμα του ηλεκτρονίου ;

β) Ας υποτεθεί ότι το μαγνητικό πεδίο είναι προσανατολισμένο κατά την διεύθυνση του άξονα των z και την χρονική στιγμή $t = 0$ η κατάσταση του ηλεκτρονίου περιγράφεται από το άνυσμα

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

όπου $|a|^2 + |b|^2 = 1$, ποιά είναι η κατάσταση του την χρονική στιγμή $t > 0$; Για $t > 0$ να βρεθούν οι μέσες τιμές των $s_{x,y,z}$ και να συγκριθούν με τις αντίστοιχες μέσες τιμές για $t = 0$. Τι παρατηρείτε ;

γ) Να απαντηθεί το ερώτημα β) στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο είναι προσανατολισμένο στην κατεύθυνση x και το ηλεκτρόνιο την στιγμή $t = 0$ είναι σε ιδιοκατάσταση του s_z με ιδιοτιμή $\hbar/2$. Στην περίπτωση αυτή ποιά είναι η πιθανότητα την χρονική στιγμή $t > 0$ να μετρηθεί τιμή $-\hbar/2$ για την s_z συνιστώσα ;

2) Οπως προκύπτει από την εξίσωση Schrödinger ο τελεστής της χρονικής εξέλιξης για σύστημα του οποίου η Χαμιλτωνιανή $\hat{H}$ δεν εξαρτάται από τον χρόνο δίνεται από τον μοναδιαίο (Unitary) τελεστή

$$U(\tau) = e^{-i\,\tau \hat{H}/\hbar} .$$

Ο τελεστής αυτός όταν ενεργεί σε μιά κατάσταση που περιγράφει το σύστημα την στιγμή t δίνει την κατάσταση την χρονική στιγμή $t + \tau$,

$$|\psi(t+\tau)\rangle = U(\tau)\; |\psi(t)\rangle .$$

Για το ηλεκτρόνιο της προηγούμενης άσκησης και για τυχαίο προσανατολισμό του μαγνητικού πεδίου να υπολογισθεί αναλυτικά ο τελεστής αυτός.

3) Για τους τελεστές του spin της ασκησης 1, να βρεθούν οι κανονικοποιημένες στην μονάδα ιδιοκαταστάσεις $|\pm\,,\,x\rangle$ του s_x με ιδιοτιμές $\pm\,\hbar/2$ αντίστοιχα. Να κάνετε το ίδιο για τις αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις $|\pm\,,\,y\rangle$ του s_y .

4) Να βρεθούν τα ιδιοανύσματα του τελεστή $\hat{s}_n \equiv \vec{s} \cdot \hat{n}$ όπου $\hat{n}$ τυχαίο μοναδιαίο άνυσμα. Ο τελεστής αυτός είναι η προβολή του σπιν στην κατεύθυνση $\hat{n}$.

5) Ηλεκτρόνιο αναγκάζεται να κινείται στο εσωτερικό σωλήνα μήκους L και αμελητέας διατομής του οποίου τα άκρα είναι ερμητικά κλειστά. Κατά μήκος του σωλήνα εφαρμόζεται σταθερό μαγνητικό πεδίο. Ποιές οι ιδιοτιμές της ενέργειας και ποιές οι αντίστοιχες ιδικαταστάσεις; Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο ειναι κάθετο στον άξονα του σωλήνα.

6) (ΘΕΜΑ εξετάσεων του 1992)
Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο που έχει την μορφή

$$\vec{B} \;=\; B_0 \,(\, \hat{x}\, \frac{x^2}{2\,L^2} \;-\; \hat{y}\, \frac{x\,y}{L^2}\,)$$

όπου $B_0 > 0$. Παρατηρήστε ότι κατά την διεύθυνση x το μαγνητικό πεδίο μοιάζει με αυτό γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή ενω η συνιστώσα κατά την διεύθυνση y είναι τέτοια ώστε το μαγνητικό πεδίο να έχει κλειστές δυναμικές γραμμές. Το ηλεκτρόνιο αναγκάζεται να κινείται σε στενό σωλήνα απείρου μήκους τοποθετημένου στον άξονα των x , με πολύ μικρή κυκλική διατομή οπότε η κίνηση του κατά τους άξονες y, z μπορεί να αγνοηθεί. Να γραφεί η εξίσωση Schrödinger και να βρεθεί η ελαχίστη ενέργεια για την οποίαν το ηλεκτρόνιο παγιδεύεται από το μαγνητικό πεδίο. Στην κατάσταση αυτή ποιά είναι η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο μεταξύ x και $x + dx$ και με τιμή της z συνιστώσας του σπιν ίση με $\hbar/2$;

7) Ηλεκτρόνιο κινείται στο μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B} \;=\; \hat{z}\, B_0 \;+\; \hat{x}\, B_1\, \cos{(\omega t)} \;\; .$$

Αν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε κατάσταση με σπίν $\hbar/2$ κατά τον άξονα z την χρονική στιγμή $t = 0$, ποιά είναι η πιθανότητα την χρονική στιγμή $t > 0$ να μεταβεί σε κατάσταση με σπίν $-\hbar/2$ στον ίδιο άξονα; Δείξτε ότι στην περίπτωση που η συχνότητα ω του ταλαντούμενου μαγνητικού πεδίου είναι ίδια με την συχνότητα περιφοράς του σπιν τότε η πιθανότητα αυτή μπορεί να λάβει την μεγίστη δυνατή τιμή της (= 1) (Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται **Παραμαγνητικός Συντονισμός** και η επινόηση του οφείλεται στον Rabi .)

8) Ηλεκτρόνιο κινείται σε σταθερό μαγνητικό πεδίο προσανατολισμένο κατά τον z-άξονα. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το ηλεκτρόνιο βρίσκεται προσανατολισμένο με σπιν $\hbar/2$ στον άξονα των x . Να βρεθεί η μέση τιμή της s_x συνιστώσας του σπιν την χρονική στιγμή $t > 0$, και από αυτήν να βρεθούν οι πιθανότητες να μετρηθούν τιμές $+\,\hbar/2$ και $-\,\hbar/2$ αντίστοιχα για την s_x συνιστώσα.

Ασκήσεις Κβαντικής Μηχανικής ΙΙ (6η Σειρά)

Τμήμα: Α. Λαχανά

1) Να βρεθεί το ενεργειακό φάσμα σε πρώτη τάξη στην παράμετρο ϵ της Χαμιλτωνιανής

$$\hat{H} \;=\; \begin{pmatrix} E & E+\epsilon & 0 \\ E+\epsilon & E & \epsilon \\ 0 & \epsilon & E \end{pmatrix} \;.$$

2) Το δυναμικό του μονοδιάστατου γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή επιδέχεται μιά παραμόρφωση από πρόσθετο όρο της μορφής

$$\Delta V(x) \;=\; \{ \quad \begin{array}{ccc} g\,x & , & -a \le x \le +a \\ 0 & , & |x| > a \end{array}$$

Να βρεθεί η διόρθωση στο ενεργειακό του φάσμα σε πρώτη τάξη στην σταθερά ζεύξης g .

3) Το δυναμικό του μονοδιάστατου γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή $V(x) = \frac{m\omega^2}{2}\, x^2$ υφίσταται την επίδραση αναρμονικού όρου της μορφής

$$\hat{H}_1 \;=\; \lambda\, \hat{x}^4$$

όπου η σταθερά ζεύξης λ είναι αρκετά μικρή για να εξασφαλίζει ότι ο όρος αυτός αποτελεί μιά διαταραχή στο αρχικό σύστημα. Να βρεθεί η διόρθωση στο ενεργειακό φάσμα και να εκτιμηθεί για ποιές ενέργειες μπορεί η θεωρία διαταραχών να αποτελέσει αξιόπιστη προσέγγιση σε πρώτη τάξη στην σταθερά ζεύξης λ .

4) Το μονοδιάστατο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού, με τα ανακλώντα τοιχώματα τοποθετημένα στα σημεία $x = 0$, $x = L$ του άξονα των x, διαταράσσεται από πρόσθετο όρο της μορφής

$$\Delta V(x) \;=\; \{ \quad \begin{array}{ccc} g\,V_0 & , & |x - L/2| \le a \\ 0 & , & |x - L/2| > a \end{array}$$

Να βρεθεί η διόρθωση στο ενεργειακό φάσμα και στις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας σε πρώτη τάξη στην σταθερά ζεύξης g .

5) Να βρεθούν οι διορθώσεις στις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας, για μη εκφυλισμένο ενεργειακό φάσμα, σε πρώτη προσέγγιση στην θεωρία διαταραχών.

6) Να βρεθεί το ενεργειακό φάσμα της Χαμιλτωνιανής

$$\hat{H} \;=\; \lambda\, \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \;+\; g\, \hat{s}_z$$

όταν οι κβαντικοί αριθμοί που χαρακτηρίζουν τις ιδιοστροφορμές $\vec{s}_{1,2}$ ειναι $s_1 = s_2 = 1/2$.

Ασκήσεις Κβαντικής Μηχανικής ΙΙ (7η Σειρά)

Τμήμα: Α. Λαχανά

Είναι γνωστό ότι για κίνηση σωματιδίου μάζας m και φορτίου $e > 0$ στο επίπεδο x, y, υπό την επίδραση σταθερού μαγνητικού πεδίου κάθετου στο επίπεδο κίνησης, $\vec{B} = \hat{z}\, B$, η Χαμιλτωνιανή του συστήματος μπορεί να τεθεί σε μορφή Χαμιλτωνιανής που μοιάζει με αυτήν του γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή

$$\hat{H} \;=\; \frac{1}{2\,m}\,(\,\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2\,) \;=\; \hbar\omega_B\,(\,\hat{a}^\dagger\,\hat{a} + \frac{1}{2}\,)$$

όπου $\omega_B = eB/mc$ η κλασική συχνότητα του ¨κυκλότρου¨, και $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ τελεστές ¨καταστροφής¨ και ¨δημιουργίας¨ με τον $\hat{a}$ να δίνεται από την σχέση

$$\hat{a} \;=\; \sqrt{\frac{c}{2\,B\,\hbar\,e}}\;(\,\hat{\pi}_x + i\,\hat{\pi}_y\,)$$

Οι $\hat{\pi}_i$, για $i \,=\, x, y$, είναι οι ¨μηχανικές¨ ορμές, που κλασικά ορίζονται ως η μάζα επί την ταχύτητα, και οι οποίες στην βαθμίδα όπου το ανυσματικό δυναμικό είναι $\vec{A} = \frac{1}{2}\,\vec{B}\times\vec{x}$ εκφράζονται συναρτήσει των ¨κανονικών¨ ορμών $\hat{p}_i$ ως

$$\hat{\pi}_x \;=\; \hat{p}_x + \frac{eB}{2\,c}\,\hat{y} \quad , \quad \hat{\pi}_y \;=\; \hat{p}_y - \frac{eB}{2\,c}\,\hat{x}$$

Με βάση αυτά απαντήστε στα πιο κάτω ερωτήματα :

1) Να γράψετε την Χαμιλτωνιανή αναλυτικά συναρτήσει των θέσεων και των κανονικών ορμών και να δείξετε ότι έχει την μορφή δύο ανεξάρτητων γραμμικών αρμονικών ταλαντωτών στις κατευθύνσεις x και y , με ένα προσθετο όρο αλληλεπίδρασης ο οποιος έχει την μορφή ζεύξης του μαγνητικού πεδίου με την μαγνητική ροπή του σωματιδίου ! Αν η στροφορμή του συστήματος ήταν μηδενική ποιά θα ήταν η θεμελειώδης ενέργεια και ποιά η κυματική συνάρτηση $\psi(x\,y)$;

2) Αν $|x, y\rangle$ είναι το ιδιοάνυσμα των τελεστων θέσης $\hat{x}$ και $\hat{y}$, με ιδιοτιμές x και y, αντίστοιχα να δειχθεί ότι η σχέση $\hat{a}\;|0\rangle = 0$ για την κατάσταση του κενού, η οποία συνεπάγεται $\langle x, y|\,\hat{a}\;|0\rangle = 0$, οδηγεί στην εξίσωση

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{eB}{2\,\hbar\,c}\,(x + i\,y)\right)\,\psi(x, y) \;=\; 0 \tag{1}$$

από την οποία μπορούν να προσδιορισθούν όλες οι κυματικές συναρτήσεις $\psi(x, y)$ της θεμελειώδους ενέργειας του συστήματος $E_0 = \hbar\omega_B/2$.

3) Χρησιμοποιώντας ως ανεξάρτητες μεταβλητές τους μιγαδικούς $z = x + i\,y$ και $\bar{z} = x - i\,y$ και εκφράζοντας τις παραγωγίσεις ως προς x, y σε παραγωγίσεις ως προς $z, \bar{z}$ να δειχθεί ότι η εξ. (1) τίθεται στην απλή μορφή

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{eB}{4\,\hbar\,c}\,z\right)\,\psi(z, \bar{z}) \;=\; 0 \tag{2}$$

(Αποδείξτε πρώτα αναλυτικά ότι $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ και $\frac{\partial}{\partial y} = i\,(\,\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\,)$!)

4) Με ολοκλήρωση ως προς την μεταβλητή $\bar{z} = x - i\,y$ να δειχθεί ότι η εξ. (2) οδηγεί πολύ εύκολα στην γενική λύση (3) , με $f(z)$ αυθαίρετη συνάρτηση της $z = x + i\,y$, και την σταθερά λ ίση με $\frac{e\,B}{2\,c\,\hbar}$

$$\psi(z, \bar{z}) \;=\; f(z)\,e^{-\,\frac{\lambda}{2}\,|z|^2} \tag{3}$$

5) Η εξ. (3) οδηγεί στις πιο κάτω ανεξάρτητες λύσεις με την επιλογή $f(z) = (\sigma\tau\alpha\theta)\; z^n$

$$\psi_n(z,\bar{z}) \;=\; N\, z^n\, e^{-\frac{\lambda}{2}|z|^2} \tag{4}$$

η οποία σε πολικές συντεταγμένες $x = \rho\, \cos\phi$, $y = \rho\, \sin\phi$, η το ίδιο $z = \rho e^{i\phi}$, παίρνουν την μορφή

$$\psi_n(z,\bar{z}) \;=\; N\, \rho^n\, e^{-\frac{\lambda}{2}\rho^2}\, e^{in\phi} \tag{5}$$

Να δείξετε ότι αυτή η μορφή της κυματικής συνάρτησης απαιτεί όπως $n =$ ακέραιος. Να δειχθεί επίσης ότι αυτές είναι ιδιοσυναρτήσεις της z-συνιστώσας της τροχιακής στροφορμής, $\hat{L}_z \;\equiv\; \hat{x}\,\hat{p}_y - \hat{y}\,\hat{p}_x$ με ιδιοτιμή $\hbar n$. Να δειχθεί ότι οι κυματοσυναρτήσεις (5) είναι κανονικοποιήσιμες μόνον όταν $n \geq 0$ και να προσδιορισθεί η σταθερά κανονικοποίησης N. (Δίνεται ότι $\int_0^\infty x^{2n+1}\, \exp(-a\,x^2)\, dx = \frac{n!}{2\,a^{n+1}}$ για ακέραιο $n \geq 0$)

6) Να δειχθεί ότι η μέση τιμή $\left\langle \rho^2 \right\rangle$ είναι

$$\left\langle \rho^2 \right\rangle \;=\; \frac{2\hbar}{m\,\omega_B}\,(n+1) \tag{6}$$

Αν $\hat{K}_z \;\equiv\; \hat{x}\,\hat{\pi}_y - \hat{y}\,\hat{\pi}_x$, που ονομάζεται και ¨κινητική¨ τροχιακή στροφορμή, να βρεθεί η σχέση του με την $\hat{L}_z$ και από αυτή με χρήση του αποτελέσματος (6) να βρεθεί ότι

$$\left\langle \hat{K}_z \right\rangle \;=\; -\,\hbar \tag{7}$$

Ποιά ειναι η φυσική σημασία του $\hat{K}_z$ και του αποτελέσματος (7) ;

7) Οι ιδιοσυναρτήσεις (5) έχουν τροχιακή στροφορμή στον z-άξονα ίση με $\hbar n$, με n ακέραιο θετικό η μηδέν, και είναι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας με ιδιοτιμή $E_0 = \hbar\omega_B/2$. Αρα το σύστημα ακόμα και στην θεμελειώδη του κατάσταση παρουσιάζει εκφυλισμό. Για κάθε κατάσταση να βρεθούν οι ιδισυναρτήσεις με την αμέσως μεγαλύτερη ενέργεια $E_1 = 3\,\hbar\omega_B/2$ ενεργώντας στην κατάσταση του κενού $|0\rangle$ με τον τελεστή της δημιουργίας $\hat{a}^\dagger$. Ποιές τιμές της στροφορμής $\hat{L}_z$ είναι τώρα αποδεκτές ;

8) Να γραφεί η ακτίνα περιστροφής του κλασικού προβλήματος και να γραφεί συναρτήσει της τροχιακής στροφορμής. Πως συγκρίνεται αυτή με την πιό πιθανή απόσταση από την αρχή των αξόνων στις καταστάσεις με στροφορμή $\hat{L}_z \;=\; \hbar n$;

9) Ποιά θα ήταν η μορφή της Χαμιλτωνιανής στην περίπτωση που είχε χρησιμοποιηθεί η βαθμίδα $\vec{A} = \hat{y}\,B\,x$ για την περιγραφή του μαγνητικού πεδίου ; ($\hat{y}$ είναι το μοναδιαίο κατά τον άξονα των y). Ποιές οι κυματικές συναρτήσεις που αντιστοιχούν στην θεμελειώδη ενέργεια ;

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1

Η έκδοση 1.0 είναι διαθέσιμη εδώ.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.