ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Κβαντική Μηχανική ΙΙ

Ενότητα 2: Μονοδιάστατος Γραμμικός Αρμονικός Ταλαντωτής

Αθανάσιος Λαχανάς
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Περιεχόμενα 2ης ενότητας

Μονοδιάστατος Γραμμικός Αρμονικός Ταλαντωτής

- Επίλυση με τελεστές καταστροφής και δημιουργίας
- Συνοχικές Καταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή
- Επίλυση με την εξίσωση Schrödinger

Γραμμικός Αρμονικός Ταλαντωτής

Κβαντικός Ταλαντωτής

- Κβαντικό σύστημα με Χαμιλτωνιανή

$$\hat{H} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\hat{P}^2 + \hat{Q}^2\right) \quad \mu\epsilon \quad [\hat{P}, \hat{Q}] = -i$$

$\hat{P}$, $\hat{Q}$ = αυτοσυζυγείς

- Τελεστές "καταστροφής" και "δημιουργίας" $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{a} = \frac{\hat{Q} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} , \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{Q} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} \quad \rightleftharpoons \quad \hat{Q} = \frac{\hat{a}^\dagger + \hat{a}}{\sqrt{2}} , \quad \hat{P} = i\,\frac{\hat{a}^\dagger - \hat{a}}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{H} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\right) \quad \mu\epsilon \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

Κβαντικός Ταλαντωτής

- Κβαντικό σύστημα με Χαμιλτωνιανή

$$\hat{H} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\hat{P}^2 + \hat{Q}^2\right) \quad \mu\epsilon \quad [\hat{P}, \hat{Q}] = -i$$

$\hat{P}$, $\hat{Q}$ = αυτοσυζυγείς

- Τελεστές "καταστροφής" και "δημιουργίας" $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{a} = \frac{\hat{Q} + i\hat{P}}{\sqrt{2}} , \; \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{Q} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} \rightleftharpoons \hat{Q} = \frac{\hat{a}^\dagger + \hat{a}}{\sqrt{2}} , \; \hat{P} = i\,\frac{\hat{a}^\dagger - \hat{a}}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{H} = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\right) \quad \mu\epsilon \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

- Η Χαμιλτωνιανή γράφεται

$$\hat{H} = \epsilon_0 \left(\hat{a}^{\dagger} \hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \epsilon_0 \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right)$$

$\hat{N} \equiv \hat{a}^{\dagger} \hat{a}$, "τελεστής αρίθμησης" (**number operator**)

- Ιδοκαταστάσεις / Ιδιοτιμές του $\hat{N}$

$$\hat{N} \, |\nu\rangle = \nu \, |\nu\rangle$$

Οι ιδιοκαταστάσεις του $\hat{N}$ είναι ιδιοκαταστάσεις του $\hat{H}$

$$\hat{H} \, |\nu\rangle = \epsilon_0 \left(\nu + \frac{1}{2} \right) |\nu\rangle$$

Αλγεβρα των $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, $\hat{N}$

1. Οι ιδιοτιμές του τελεστή αρίθμησης είναι θετικές, $\nu \geq 0$ και επομένως η ενέργεια του συστήματος είναι $E \geq \epsilon_0/2$

$$\nu \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad E \geq \frac{\epsilon_0}{2}$$

2. Οι $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, $\hat{N}$ ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad , \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = +\hat{a}^\dagger \quad , \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

Η δράση του $\hat{a}$ σε ιδιοκατάσταση του $\hat{N}$ παράγει ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή κατά **μία μονάδα μικρότερη** εκτός βέβαια αν το αποτέλεσμα της δράσης δίνει το μηδενικό άνυσμα !

Η δράση του $\hat{a}^\dagger$ σε ιδιοκατάσταση του $\hat{N}$ παράγει ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή κατά **μία μονάδα μεγαλύτερη** !

Αλγεβρα των $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, $\hat{N}$

1. Οι ιδιοτιμές του τελεστή αρίθμησης είναι θετικές, $\nu \geq 0$ και επομένως η ενέργεια του συστήματος είναι $E \geq \epsilon_0/2$

$$\nu \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad E \geq \frac{\epsilon_0}{2}$$

2. Οι $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, $\hat{N}$ ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad , \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = +\hat{a}^\dagger \quad , \quad [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

Η δράση του $\hat{a}$ σε ιδιοκατάσταση του $\hat{N}$ παράγει ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή κατά **μία μονάδα μικρότερη** εκτός βέβαια αν το αποτέλεσμα της δράσης δίνει το μηδενικό άνυσμα !

Η δράση του $\hat{a}^\dagger$ σε ιδιοκατάσταση του $\hat{N}$ παράγει ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή κατά **μία μονάδα μεγαλύτερη** !

- Αφού η δράση του $\hat{a}$ σε ιδιοκατάσταση του $\hat{N}$ παράγει ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή κατά μία μονάδα μικρότερη και οι ιδιοτιμές του $\hat{N}$ είναι πάντα θετικές, θα πρέπει η διαδοχική δράση του $\hat{a}$ κάποτε να τερματισθεί με την έννοια ότι μετά από κάποιον αριθμό δράσεων θα δώσει μηδέν. Αν δεν γίνει αυτό και συνεχώς παράγονται ανύσματα με μη μηδενική νόρμα (= μη-μηδενικά) τότε μετά από έναν αριθμό δράσεων του $\hat{a}$ υποχρεωτικά θα παραχθεί ιδιοάνυσμα του $\hat{N}$ με αρνητική ιδιοτιμή που δεν μπορεί να συμβεί !

- Αρα θα πρέπει να υπάρχει μια μη-μηδενική κατάσταση, η ονομαζομένη και κατάσταση του κενού επειδή έχει την μικρότερη ενέργεια όπως θα δειχθεί, που η δράση του τελεστή $\hat{a}$ επάνω σε αυτή δίνει μηδέν.

Στην επόμενη διαφάνεια αποτυπώνεται η συλλογιστική που οδηγεί στο συμπέρασμα αυτό $\Longrightarrow$

- Αφού η δράση του $\hat{a}$ σε ιδιοκατάσταση του $\hat{N}$ παράγει ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή κατά μία μονάδα μικρότερη και οι ιδιοτιμές του $\hat{N}$ είναι πάντα θετικές, θα πρέπει η διαδοχική δράση του $\hat{a}$ κάποτε να τερματισθεί με την έννοια ότι μετά από κάποιον αριθμό δράσεων θα δώσει μηδέν. Αν δεν γίνει αυτό και συνεχώς παράγονται ανύσματα με μη μηδενική νόρμα (= μη-μηδενικά) τότε μετά από έναν αριθμό δράσεων του $\hat{a}$ υποχρεωτικά θα παραχθεί ιδιοάνυσμα του $\hat{N}$ με αρνητική ιδιοτιμή που δεν μπορεί να συμβεί !

- Αρα θα πρέπει να υπάρχει μια μη-μηδενική κατάσταση, η ονομαζομένη και κατάσταση του κενού επειδή έχει την μικρότερη ενέργεια όπως θα δειχθεί, που η δράση του τελεστή $\hat{a}$ επάνω σε αυτή δίνει μηδέν.

Στην επομένη διαφάνεια αποτυπώνεται η συλλογιστική που οδηγεί στο συμπέρασμα αυτό $\Longrightarrow$

$\Downarrow \quad \hat{a}$

$\Downarrow \quad \hat{a}$

$\cdots\cdots$

$\Downarrow \quad \hat{a}$

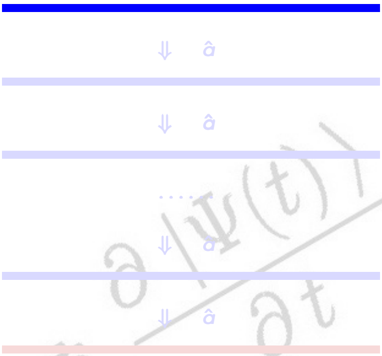
$\Downarrow \quad \hat{a}$

Ιδιοκατάσταση	Ιδιοτιμή
$\vert\nu\rangle$	ν
$\hat{a}\,\vert\nu\rangle$	$\nu - 1$
$\hat{a}^2\,\vert\nu\rangle$	$\nu - 2$
$\cdots\cdots$	
$\hat{a}^{n_0}\,\vert\nu\rangle$	$\nu - n_0$

$$\hat{a}^{n_0+1}\,|\nu\rangle = 0 \quad !$$

- Υπάρχει κατάσταση κενού $|\Omega\rangle = \hat{a}^{n_0}\,|\nu\rangle$

$$\hat{a}\,|\Omega\rangle = 0 \quad !$$



Ιδιοκατάσταση	Ιδιοτιμή
$\lvert\nu\rangle$	ν
$\hat{a}\,\lvert\nu\rangle$	$\nu-1$
$\hat{a}^2\,\lvert\nu\rangle$	$\nu-2$
$\cdots\cdots$	
$\hat{a}^{n_0}\,\lvert\nu\rangle$	$\nu-n_0$

$\hat{a}^{n_0+1}\,\lvert\nu\rangle = 0 \;\; !$

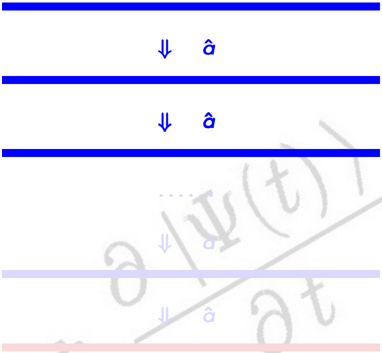
- Υπάρχει κατάσταση κενού $\lvert\Omega\rangle = \hat{a}^{n_0}\,\lvert\nu\rangle$

$\hat{a}\,\lvert\Omega\rangle = 0 \;\; !$

	Ιδιοκατάσταση	Ιδιοτιμή
	$\vert\nu\rangle$	ν
$\Downarrow \quad \hat{a}$		
	$\hat{a}\,\vert\nu\rangle$	$\nu - 1$
$\Downarrow \quad \hat{a}$		
	$\hat{a}^2\,\vert\nu\rangle$	$\nu - 2$
$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	
$\Downarrow \quad \hat{a}$		
	$\hat{a}^{n_0}\,\vert\nu\rangle$	$\nu - n_0$
$\Downarrow \quad \hat{a}$		
	$\hat{a}^{n_0+1}\,\vert\nu\rangle = 0$!	

- Υπάρχει κατάσταση κενού $\vert\Omega\rangle = \hat{a}^{n_0}\,\vert\nu\rangle$

$$\hat{a}\,\vert\Omega\rangle = 0 \; !$$

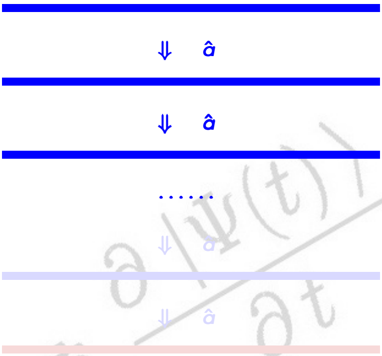


Ιδιοκατάσταση	Ιδιοτιμή
$\|\nu\rangle$	ν
$\hat{a}\,\|\nu\rangle$	$\nu - 1$
$\hat{a}^2\,\|\nu\rangle$	$\nu - 2$
$\cdots\cdots$	
$\hat{a}^{n_0}\,\|\nu\rangle$	$\nu - n_0$

$$\hat{a}^{n_0+1}\,|\nu\rangle = 0 \;\;!$$

- Υπάρχει κατάσταση κενού $|\Omega\rangle = \hat{a}^{n_0}\,|\nu\rangle$

$$\hat{a}\,|\Omega\rangle = 0 \;\;!$$

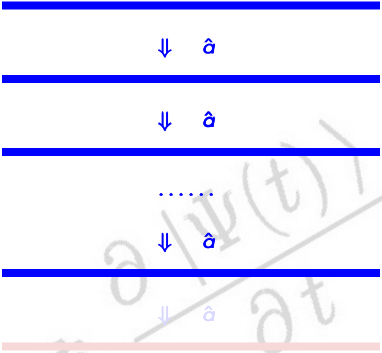


Ιδιοκατάσταση	Ιδιοτιμή
$\lvert \nu \rangle$	ν
$\hat{a} \lvert \nu \rangle$	$\nu - 1$
$\hat{a}^2 \lvert \nu \rangle$	$\nu - 2$
$\ldots\ldots$	
$\hat{a}^{n_0} \lvert \nu \rangle$	$\nu - n_0$

$\hat{a}^{n_0+1} \lvert \nu \rangle = 0 \quad !$

- Υπάρχει κατάσταση κενού $\lvert \Omega \rangle = \hat{a}^{n_0} \lvert \nu \rangle$

$$\hat{a} \lvert \Omega \rangle = 0 \ !$$

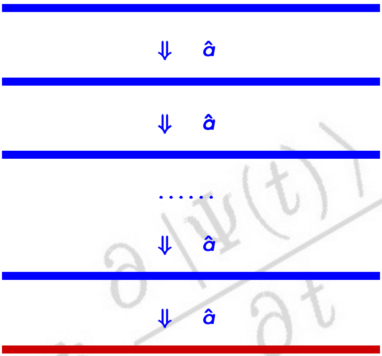


Ιδιοκατάσταση	Ιδιοτιμή
$\vert\nu\rangle$	ν
$\hat{a}\,\vert\nu\rangle$	$\nu-1$
$\hat{a}^2\,\vert\nu\rangle$	$\nu-2$
$\cdots\cdots$	
$\hat{a}^{n_0}\,\vert\nu\rangle$	$\nu-n_0$

$\hat{a}^{n_0+1}\,|\nu\rangle = 0 \;\;!$

- Υπάρχει κατάσταση κενού $|\Omega\rangle = \hat{a}^{n_0}\,|\nu\rangle$

$\hat{a}\,|\Omega\rangle = 0 \;\;!$

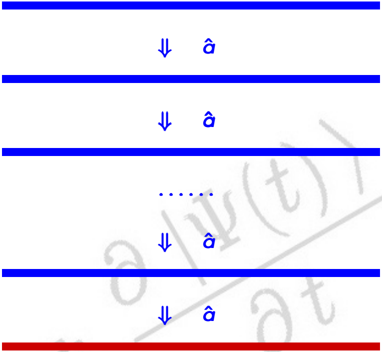


Ιδιοκατάσταση	Ιδιοτιμή
$\lvert\nu\rangle$	ν
$\hat{a}\,\lvert\nu\rangle$	$\nu-1$
$\hat{a}^2\,\lvert\nu\rangle$	$\nu-2$
. . . . . .	
$\hat{a}^{n_0}\,\lvert\nu\rangle$	$\nu-n_0$

$$\hat{a}^{n_0+1}\,\lvert\nu\rangle = 0 \quad !$$

- Υπάρχει κατάσταση κενού $\lvert\Omega\rangle = \hat{a}^{n_0}\,\lvert\nu\rangle$

$$\hat{a}\,\lvert\Omega\rangle = 0 \;\;!$$



Ιδιοκατάσταση	Ιδιοτιμή
$\vert \nu \rangle$	ν
$\hat{a} \vert \nu \rangle$	$\nu - 1$
$\hat{a}^2 \vert \nu \rangle$	$\nu - 2$
......	
$\hat{a}^{n_0} \vert \nu \rangle$	$\nu - n_0$

$$\hat{a}^{n_0+1} \, |\nu\rangle = 0 \quad !$$

- Υπάρχει κατάσταση κενού $|\Omega\rangle = \hat{a}^{n_0} \, |\nu\rangle$

$$\hat{a} \, |\Omega\rangle = 0 \; !$$

- Η κατάσταση του κενού $|\Omega\rangle$ είναι ιδιοάνυσμα του $\hat{N}$ με ιδιοτιμή 0 και επομένως της Χαμιλτωνιανής $\hat{H}$ με ιδιοτιμη $\epsilon_0/2$

$$\hat{N}\,|\Omega\rangle = 0\,|\Omega\rangle \quad , \quad \hat{H}\,|\Omega\rangle = \frac{\epsilon_0}{2}\,|\Omega\rangle$$

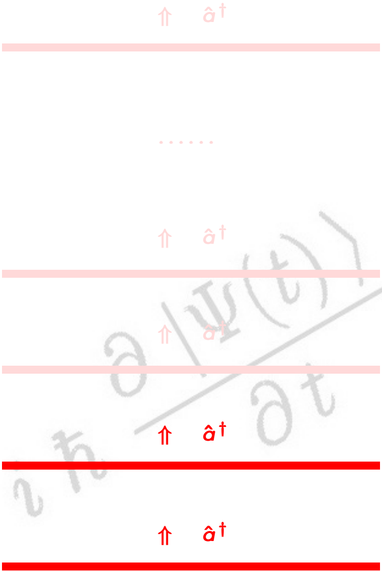
- Διαδοχική δράση του $\hat{a}^{\dagger}$ παράγει ιδιοανύσματα $|n\rangle$ του $\hat{N}$ και της $\hat{H}$ με ιδιοτιμές n και $\epsilon_0(n+\frac{1}{2})$ όπου $n = 0, 1, 2, \cdots$

$$\hat{N}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \quad , \quad \hat{H}\,|n\rangle = \epsilon_0\,(n+\frac{1}{2})\,|n\rangle$$

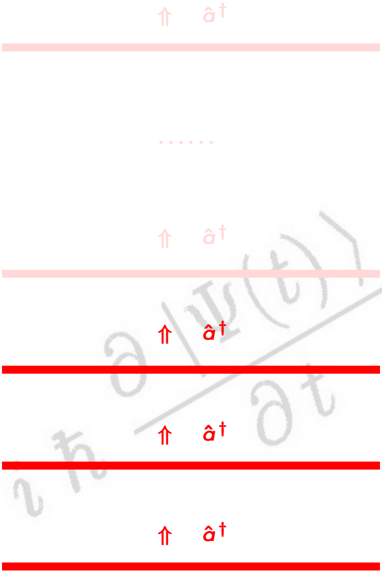
- Την κανονικοποιημένη στην μονάδα κατάσταση του κενού θα συμβολίζουμε με $|0\rangle$ αντι του $|\Omega\rangle$

$\hat{a}^{\dagger n} \lvert\Omega\rangle$	n	$\epsilon_0(n+\frac{1}{2})$
......		
$\hat{a}^{\dagger 3} \lvert\Omega\rangle$	3	$7\epsilon_0/2$
$\hat{a}^{\dagger 2} \lvert\Omega\rangle$	2	$5\epsilon_0/2$
$\hat{a}^{\dagger} \lvert\Omega\rangle$	1	$3\epsilon_0/2$
$\lvert\Omega\rangle$	0	$\epsilon_0/2$

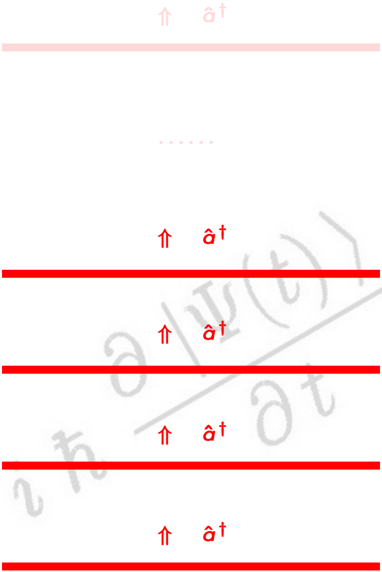
$\hat{a}^{\dagger n}\lvert\Omega\rangle$	n	$\epsilon_0(n+\frac{1}{2})$
$\cdots\cdots$		
$\hat{a}^{\dagger 3}\lvert\Omega\rangle$	3	$7\epsilon_0/2$
$\hat{a}^{\dagger 2}\lvert\Omega\rangle$	2	$5\epsilon_0/2$
$\hat{a}^{\dagger}\lvert\Omega\rangle$	1	$3\epsilon_0/2$
$\lvert\Omega\rangle$	0	$\epsilon_0/2$



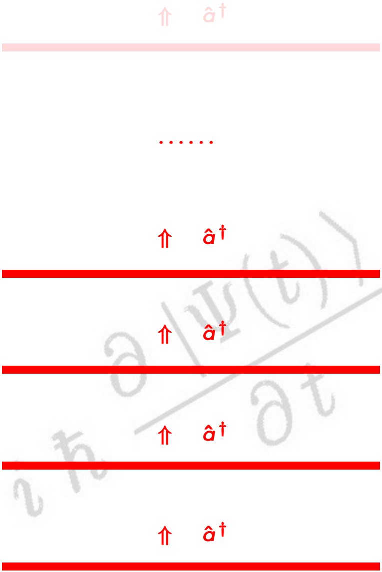
$\hat{a}^{\dagger\, n}\,\|\Omega\rangle$	n	$\epsilon_0(n+\frac{1}{2})$
......		
$\hat{a}^{\dagger\, 3}\,\|\Omega\rangle$	3	$7\,\epsilon_0/2$
$\hat{a}^{\dagger\, 2}\,\|\Omega\rangle$	2	$5\,\epsilon_0/2$
$\hat{a}^{\dagger}\,\|\Omega\rangle$	1	$3\,\epsilon_0/2$
$\|\Omega\rangle$	0	$\epsilon_0/2$



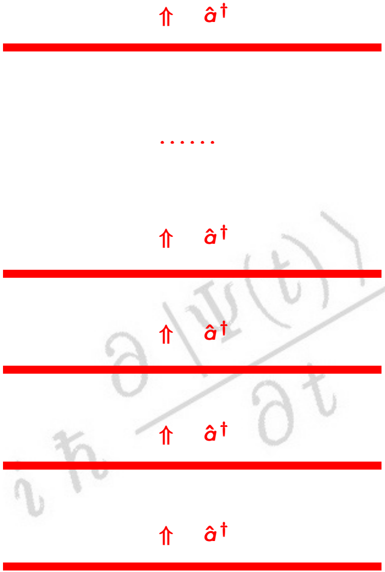
$\hat{a}^{\dagger^n}\|\Omega\rangle$	n	$\epsilon_0(n+\frac{1}{2})$
. . . . . .		
$\hat{a}^{\dagger^3}\|\Omega\rangle$	3	$7\epsilon_0/2$
$\hat{a}^{\dagger^2}\|\Omega\rangle$	2	$5\epsilon_0/2$
$\hat{a}^{\dagger}\|\Omega\rangle$	1	$3\epsilon_0/2$
$\|\Omega\rangle$	0	$\epsilon_0/2$



$\hat{a}^{\dagger\, n}\,|\Omega\rangle$	n	$\epsilon_0(n+\frac{1}{2})$
......		
$\hat{a}^{\dagger\, 3}\,|\Omega\rangle$	3	$7\epsilon_0/2$
$\hat{a}^{\dagger\, 2}\,|\Omega\rangle$	2	$5\epsilon_0/2$
$\hat{a}^{\dagger}\,|\Omega\rangle$	1	$3\epsilon_0/2$
$|\Omega\rangle$	0	$\epsilon_0/2$



${\hat{a}^\dagger}^n \lvert\Omega\rangle$	n	$\epsilon_0(n+\frac{1}{2})$
......		
${\hat{a}^\dagger}^3 \lvert\Omega\rangle$	3	$7\epsilon_0/2$
${\hat{a}^\dagger}^2 \lvert\Omega\rangle$	2	$5\epsilon_0/2$
$\hat{a}^\dagger \lvert\Omega\rangle$	1	$3\epsilon_0/2$
$\lvert\Omega\rangle$	0	$\epsilon_0/2$



$\hat{a}^{\dagger\,n}\lvert\Omega\rangle$	n	$\epsilon_0(n+\frac{1}{2})$
......		
$\hat{a}^{\dagger\,3}\lvert\Omega\rangle$	3	$7\epsilon_0/2$
$\hat{a}^{\dagger\,2}\lvert\Omega\rangle$	2	$5\epsilon_0/2$
$\hat{a}^{\dagger}\lvert\Omega\rangle$	1	$3\epsilon_0/2$
$\lvert\Omega\rangle$	0	$\epsilon_0/2$

- Κανονικοποιημένες στην μονάδα ιδιοκαταστάσεις του $\hat{N}$ και της $\hat{H}$:

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger\,n}}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle$$

- Δράση των $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$:

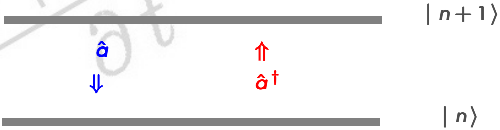
$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \quad , \quad \hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

- Κανονικοποιημένες στην μονάδα ιδιοκαταστάσεις του $\hat{N}$ και της $\hat{H}$:

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger\, n}}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle$$

- Δράση των $\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}$:

$$\hat{a}^{\dagger}\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \quad , \quad \hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$



Κβαντικός αριθμός	Κατάσταση	Ενέργεια
0	$\vert 0\rangle$	$\epsilon_0/2$
1	$\vert 1\rangle$	$3\epsilon_0/2$
2	$\vert 2\rangle$	$5\epsilon_0/2$
3	$\vert 3\rangle$	$7\epsilon_0/2$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n	$\vert n\rangle$	$\epsilon_0(n+\frac{1}{2})$

$$E_n = \epsilon_0\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Κίνηση σε δυναμικό $V(x) = kx^2/2$

Η Χαμιλτωνιανή του συστήματος

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}_x^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

μπορει να γραφεί ως

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{P}^2 + \hat{Q}^2)$$

όπου

$$\hat{P} = \frac{\hat{p}_x}{\sqrt{\hbar m\omega}} \quad , \quad \hat{Q} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{x}$$

$\hat{P}$, $\hat{Q}$ αυτοσυζυγείς τελεστές με $[\hat{P}, \hat{Q}] = -i$

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Η θέση και η ορμή συναρτήσει των τελεστών καταστροφής και δημιουργίας :

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\hat{a}^{\dagger} + \hat{a})$$

$$\hat{p}_x = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(\hat{a}^{\dagger} - \hat{a})$$

...

Συνοχικές Καταστάσεις (Coherent States - Roy J. Glauber)

- Οι μέσες τιμές της θέσης και της ορμής του γραμμικού ταλαντωτή στις καταστάσεις καθορισμένης ενέργειας είναι μηδενικές κάθε χρονική στιγμή και επομένως δεν έχουν τα χαρακτηριστικά της κλασσικής εξίσωσης κίνησης.

- Υπάρχουν καταστάσεις που είναι γραμμικοί συνδυασμοί (υπερθέσεις) καταστάσεων συγκεκριμένης ενέργειας για τις οποίες οι μέσες της θέσης και της ορμής προσομοιάζουν με αυτές του κλασσικού γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή. Αυτές οι καταστάσεις ονομάζονται συνοχικές (**coherent**) η αλλοιώς **σύμφωνες** σύμφωνα με την Ελληνική βιβλιογραφία ο όρος όμως αυτός υπολείπεται από το να αποδίδει τις πραγματικές ιδιότητες των καταστάσεων αυτών.

- Οι καταστάσεις αυτές υιοθετήθηκαν πριν από περίπου πέντε δεκαετίες από τον **R. J. Glauber** για την περιγραφή κβαντικών καταστάσεων πολλών φωτονίων στην κβαντική οπτική που παρουσιάζουν συνοχική συμπεριφορά γνωστή ως **optical coherence** . Ο Glauber βραβεύθηκε με το βραβείο **Nobel** το 2005

Συνοχικές καταστάσεις ως λύσεις της εξίσωσης Schrödinger του αρμονικού ταλαντωτή που έχουν την μορφή κυματομορφών Gauss εισήχθησαν για πρώτη φορά το 1926 από τον ίδιο τον Schrödinger ως απάντηση στον Lorentz που διατύπωσε ερώτημα κατά πόσον υπάρχουν κυματικές συναρτήσεις των οποίων τα χαρακτηριστικά της κίνησης τους είναι αυτά του κλασσικού ταλαντωτή, (E. Schrödinger, Naturwiss ***14****, 664 (1926)).*

Συνοχικές Καταστάσεις (Coherent States - Roy J. Glauber)

- Οι μέσες τιμές της θέσης και της ορμής του γραμμικού ταλαντωτή στις καταστάσεις καθορισμένης ενέργειας είναι μηδενικές κάθε χρονική στιγμή και επομένως δεν έχουν τα χαρακτηριστικά της κλασσικής εξίσωσης κίνησης.

- Υπάρχουν καταστάσεις που είναι γραμμικοί συνδυασμοί (υπερθέσεις) καταστάσεων συγκεκριμένης ενέργειας για τις οποίες οι μέσες της θέσης και της ορμής προσομοιάζουν με αυτές του κλασσικού γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή. Αυτές οι καταστάσεις ονομάζονται συνοχικές (**coherent**) - η αλλοιώς **σύμφωνες** σύμφωνα με την Ελληνική βιβλιογραφία ο όρος όμως αυτός υπολείπεται από το να αποδίδει τις πραγματικές ιδιότητες των καταστάσεων αυτών.

- Οι καταστάσεις αυτές υιοθετήθηκαν πριν από περίπου πέντε δεκαετίες από τον **R. J. Glauber** για την περιγραφή κβαντικών καταστάσεων πολλών φωτονίων στην κβαντική οπτική που παρουσιάζουν συνοχική συμπεριφορά γνωστή ως **optical coherence** . Ο Glauber βραβεύθηκε με το βραβείο **Nobel** το 2005

*Συνοχικές καταστάσεις ως λύσεις της εξίσωσης Schrödinger του αρμονικού ταλαντωτή που έχουν την μορφή κυματομορφών Gauss εισήχθησαν για πρώτη φορά το 1926 από τον ίδιο τον Schrödinger ως απάντηση στον Lorentz που διατύπωσε ερώτημα κατά πόσον υπάρχουν κυματικές συναρτήσεις των οποίων τα χαρακτηριστικά της κίνησης τους είναι αυτά του κλασσικού ταλαντωτή, (E. Schrödinger, Naturwiss **14**, 664 (1926)).*

Συνοχικές Καταστάσεις (Coherent States - Roy J. Glauber)

- Οι μέσες τιμές της θέσης και της ορμής του γραμμικού ταλαντωτή στις καταστάσεις καθορισμένης ενέργειας είναι μηδενικές κάθε χρονική στιγμή και επομένως δεν έχουν τα χαρακτηριστικά της κλασσικής εξίσωσης κίνησης.

- Υπάρχουν καταστάσεις που είναι γραμμικοί συνδυασμοί (υπερθέσεις) καταστάσεων συγκεκριμένης ενέργειας για τις οποίες οι μέσες της θέσης και της ορμής προσομοιάζουν με αυτές του κλασσικού γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή. Αυτές οι καταστάσεις ονομάζονται συνοχικές (**coherent**) - η αλλοιώς **σύμφωνες** σύμφωνα με την Ελληνική βιβλιογραφία ο όρος όμως αυτός υπολείπεται από το να αποδίδει τις πραγματικές ιδιότητες των καταστάσεων αυτών.

- Οι καταστάσεις αυτές υιοθετήθηκαν πριν από περίπου πέντε δεκαετίες από τον **R. J. Glauber** για την περιγραφή κβαντικών καταστάσεων πολλών φωτονίων στην κβαντική οπτική που παρουσιάζουν συνοχική συμπεριφορά γνωστή ως **optical coherence** . Ο Glauber βραβεύθηκε με το βραβείο **Nobel** το 2005

Συνοχικές καταστάσεις ως λύσεις της εξίσωσης Schrödinger του αρμονικού ταλαντωτή που έχουν την μορφή κυματομορφών Gauss εισήχθησαν για πρώτη φορά το 1926 από τον ίδιο τον Schrödinger ως απάντηση στον Lorentz που διατύπωσε ερώτημα κατά πόσον υπάρχουν κυματικές συναρτήσεις των οποίων τα χαρακτηριστικά της κίνησης τους είναι αυτά του κλασσικού ταλαντωτή, (E. Schrödinger, Naturwiss ***14****, 664 (1926)).*

The Nobel Prize in Physics 2005
Roy J. Glauber, John L. Hall, Theodor W. Hänsch

The Nobel Prize in Physics 2005
Nobel Prize Award Ceremony
Roy J. Glauber
John L. Hall
Theodor W. Hänsch

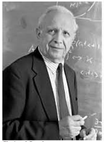


Photo: J.Reed
Roy J. Glauber


Photo: Sears.P.Studio
John L. Hall


Photo: F.M. Schmidt
Theodor W. Hänsch

The Nobel Prize in Physics 2005 was divided, one half awarded to Roy J. Glauber *"for his contribution to the quantum theory of optical coherence"*, the other half jointly to John L. Hall and Theodor W. Hänsch *"for their contributions to the development of laser-based precision spectroscopy, including the optical frequency comb technique"*.

Photos: Copyright © The Nobel Foundation

- οι συνοχικές καταστάσεις $|\lambda\rangle$ είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της καταστροφής $\hat{a}$

$$\hat{a}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle$$

όπου η ιδιοτιμή λ είναι ένας οιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός !

- Οι κανονικοποιημένες στην μονάδα ιδιοκαταστάσεις $|\lambda\rangle$ είναι της μορφής

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} \sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

η διαφέρουν από αυτή κατά μια πολλαπλασιαστική φάση (Ασκηση !).

- Οι καταστάσεις $|\lambda\rangle$ μπορούν να γραφούν και στην μορφή

$$|\lambda\rangle = c\, e^{\lambda \hat{a}^\dagger}\,|0\rangle$$

όπου η σταθερά c είναι $c = exp(-|\lambda|^2/2)$. (Ασκηση !)

- Αν δεδομένη χρονική στιγμή, έστω $t = 0$ το σύστημα βρίσκεται σε μια συνοχική κατάσταση $|\lambda\rangle$ τότε κάθε στιγμή το σύστημα βρίσκεται σε μια συνοχική κατάσταση αλλά με διαφορετική τιμή της ιδιοτιμής λ . Για τις συνοχικές καταστάσεις η χρονική εξάρτηση των μέσων τιμών της θέσης και της ορμής είναι όπως αυτές του κλασσικού ταλαντωτή !

$$\langle x\rangle = A_0 \cos(\omega t - \theta) \quad , \quad \langle p_x\rangle = -A_0\, m\omega \sin(\omega t - \theta)$$

όπου η γωνία θ είναι το όρισμα της μιγαδικής ιδιοτιμής λ και το πλάτος A_0 είναι

$$A_0 = 2|\lambda| \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

- οι συνοχικές καταστάσεις $|\lambda\rangle$ είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της καταστροφής $\hat{a}$

$$\hat{a}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle$$

όπου η ιδιοτιμή λ είναι ένας οιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός !

- Οι κανονικοποιημένες στην μονάδα ιδιοκαταστάσεις $|\lambda\rangle$ είναι της μορφής

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} \sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

η διαφέρουν από αυτή κατά μια πολλαπλασιαστική φάση (Ασκηση !).

- Οι καταστάσεις $|\lambda\rangle$ μπορούν να γραφούν και στην μορφή

$$|\lambda\rangle = c\,e^{\lambda \hat{a}^\dagger}\,|0\rangle$$

όπου η σταθερά c είναι $c = exp(-|\lambda|^2/2)$. (Ασκηση !)

- Αν δεδομένη χρονική στιγμή, έστω $t = 0$ το σύστημα βρίσκεται σε μια συνοχική κατάσταση $|\lambda\rangle$ τότε κάθε στιγμή το σύστημα βρίσκεται σε μια συνοχική κατάσταση αλλά με διαφορετική τιμή της ιδιοτιμής λ . Για τις συνοχικές καταστάσεις η χρονική εξάρτηση των μέσων τιμών της θέσης και της ορμής είναι όπως αυτές του κλασσικού ταλαντωτή !

$$\langle x\rangle = A_0 \cos(\omega t - \theta) \quad , \quad \langle p_x\rangle = -A_0\, m\omega \sin(\omega t - \theta)$$

όπου η γωνία θ είναι το όρισμα της μιγαδικής ιδιοτιμής λ και το πλάτος A_0 είναι

$$A_0 = 2|\lambda|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

- οι συνοχικές καταστάσεις $|\lambda\rangle$ είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της καταστροφής $\hat{a}$

$$\hat{a}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle$$

όπου η ιδιοτιμή λ είναι ένας οιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός !

- Οι κανονικοποιημένες στην μονάδα ιδιοκαταστάσεις $|\lambda\rangle$ είναι της μορφής

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} \sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

η διαφέρουν από αυτή κατά μια πολλαπλασιαστική φάση (Ασκηση !).

- Οι καταστάσεις $|\lambda\rangle$ μπορούν να γραφούν και στην μορφή

$$|\lambda\rangle = c\,e^{\lambda \hat{a}^\dagger}\,|0\rangle$$

όπου η σταθερά c είναι $c = exp\,(-|\lambda|^2/2)$. (Ασκηση !)

- Αν δεδομένη χρονική στιγμή, έστω $t = 0$ το σύστημα βρίσκεται σε μια συνοχική κατάσταση $|\lambda\rangle$ τότε κάθε στιγμή το σύστημα βρίσκεται σε μια συνοχική κατάσταση αλλά με διαφορετική τιμή της ιδιοτιμής λ . Για τις συνοχικές καταστάσεις η χρονική εξάρτηση των μέσων τιμών της θέσης και της ορμής είναι όπως αυτές του κλασσικού ταλαντωτή !

$$\langle x\rangle = A_0\cos(\omega t - \theta) \quad , \quad \langle p_x\rangle = -A_0\,m\omega\sin(\omega t - \theta)$$

όπου η γωνία θ είναι το όρισμα της μιγαδικής ιδιοτιμής λ και το πλάτος A_0 είναι

$$A_0 = 2|\lambda|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

- οι συνοχικές καταστάσεις $|\lambda\rangle$ είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της καταστροφής $\hat{a}$

$$\hat{a}\,|\lambda\rangle = \lambda\,|\lambda\rangle$$

όπου η ιδιοτιμή λ είναι ένας οιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός !

- Οι κανονικοποιημένες στην μονάδα ιδιοκαταστάσεις $|\lambda\rangle$ είναι της μορφής

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} \sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle$$

η διαφέρουν από αυτή κατά μια πολλαπλασιαστική φάση (Ασκηση !).

- Οι καταστάσεις $|\lambda\rangle$ μπορούν να γραφούν και στην μορφή

$$|\lambda\rangle = c\,e^{\lambda\hat{a}^\dagger}\,|0\rangle$$

όπου η σταθερά c είναι $c = exp\left(-|\lambda|^2/2\right)$. (Ασκηση !)

- Αν δεδομένη χρονική στιγμη, έστω $t = 0$, το σύστημα βρίσκεται σε μια συνοχική κατάσταση $|\lambda\rangle$ τότε κάθε στιγμή το σύστημα βρίσκεται σε μια συνοχική κατάσταση αλλά με διαφορετική τιμή της ιδιοτιμής λ. Για τις συνοχικές καταστάσεις η χρονική εξάρτηση των μέσων τιμών της θέσης και της ορμής είναι όπως αυτές του κλασσικού ταλαντωτή !

$$\langle x\rangle = A_0\,\cos(\omega t-\theta) \quad , \quad \langle p_x\rangle = -A_0\,m\omega\,\sin(\omega t-\theta)$$

όπου η γωνία θ είναι το όρισμα της μιγαδικής ιδιοτιμής λ και το πλάτος A_0 είναι

$$A_0 = 2|\lambda|\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

- Η διασπορά στην θέση και την ορμή σε συνοχική κατάσταση είναι χρονικά σταθερές και έχουν τις ακόλουθες εκφράσεις
(Ασκηση !)

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad , \quad \Delta p_x = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}$$

- Από τα Δx και Δp_x προκύπτει ότι το γινόμενο των αβεβαιοτήτων θέσης- ορμής είναι το ελάχιστο δυνατό

$$\Delta x \, \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}$$

επομένως η (κανονικοποιημένη στην μονάδα) κυματική συνάρτηση έχει υποχρεωτικά την Γκαουσιανή μορφή

$$\psi(x,t) = \left[2\pi(\Delta x)^2\right]^{-1/4} \exp\left[-\left(\frac{x-\langle x\rangle}{2\,\Delta x}\right)^2 + \frac{\iota\,\langle p_x\rangle\, x}{\hbar}\right]$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των μέσων τιμών της θέσης και της ορμής και της διασποράς της θέσης, που έχουν ήδη βρεθεί, στην πιο πάνω κυματική συνάρτηση παίρνουμε την κυματική συνάρτηση μιας συνοχικής κατάστασης. Θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι το κέντρο αυτής της Γκαουσιανής μεταβάλλεται (ταλαντεύεται) με τον χρόνο ακριβώς όπως η μέση τιμή της θέσης ! Η χρονική εξέλιξη της πυκνότητας πιθανότητας για κάποιες τιμές των παραμέτρων δίνεται στην γραφική απεικόνιση της επομένης διαφάνειας

$\Longrightarrow$

Η πρώτη εικόνα είναι η πυκνότητα πιθανότητας της θέσης, για επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων του προβλήματος.

Η δεύτερη δείχνει πως μεταβάλλεται με τον χρόνο η πυκνότητα πιθανότητας της θέσης (άξονας - x) αλλά και αυτή της ορμής (άξονας - p)

Συνοχικές Καταστάσεις (Coherent States)

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}\, |\Psi(t)\rangle$$

Ιδιοτιμές - ιδιοσυναρτήσεις της Schrödinger - Γενικά

- Η εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων της ενέργειας από την διαφορική εξίσωση Schrödinger σε δυναμικά που δεν είναι σταθερά δεν είναι εν γένει εύκολη και στις περισσότερες περιπτώσεις ενδέχεται να μην υπάρχουν καν αναλυτικές λύσεις !
- Στην εξίσωση Schrödinger η ενέργεια υπεισέρχεται ως μία παράμετρος και παρ όλο που η εξίσωση ως δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση έχει δύο ανεξάρτητες λύσεις οι συνοριακές συνθήκες δεν ικανοποιούνται παρά μόνο αν η παράμετρος αυτή λάβει ιδιαίτερες τιμές.
- Γενικά οι συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, όπως για παράδειγμα η απαίτηση να έχουμε δέσμια κατάσταση, θέτουν περιορισμούς στις δυνατές τιμές των ιδιοτιμών για τις οποίες ικανοποιείται το πρόβλημα.
- Για παράδειγμα αυτός είναι ο λόγος που δεν είναι αποδεκτές όλες οι τιμές της ενέργειας σε ένα πρόβλημα δέσμιων καταστάσεων και οι καταστάσεις εμφανίζονται με κβαντισμένες ενέργειες ! Μάλιστα σε κάποιες περιπτώσεις δεν υπάρχουν καν λύσεις με τις συνοριακές συνθήκες που θέτει το πρόβλημα !

Ιδιοτιμές - ιδιοσυναρτήσεις της Schrödinger - Γενικά

- **Η εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων της ενέργειας από την διαφορική εξίσωση Schrödinger σε δυναμικά που δεν είναι σταθερά δεν είναι εν γένει εύκολη και στις περισσότερες περιπτώσεις ενδέχεται να μην υπάρχουν καν αναλυτικές λύσεις !**
- Στην εξίσωση Schrödinger η ενέργεια υπεισέρχεται ως μία παράμετρος και παρ όλο που η εξίσωση ως δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση έχει δύο ανεξάρτητες λύσεις οι συνοριακές συνθήκες δεν ικανοποιούνται παρά μόνο αν η παράμετρος αυτή λάβει ιδιαίτερες τιμές.
- Γενικά οι συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, όπως για παράδειγμα η απαίτηση να έχουμε δέσμια κατάσταση, θέτουν περιορισμούς στις δυνατές τιμές των ιδιοτιμών για τις οποίες ικανοποιείται το πρόβλημα.
- Για παράδειγμα αυτός είναι ο λόγος που δεν είναι αποδεκτές όλες οι τιμές της ενέργειας σε ένα πρόβλημα δέσμιων καταστάσεων και οι καταστάσεις εμφανίζονται με κβαντισμένες ενέργειες ! Μάλιστα σε κάποιες περιπτώσεις δεν υπάρχουν καν λύσεις με τις συνοριακές συνθήκες που θέτει το πρόβλημα !

Ιδιοτιμές - ιδιοσυναρτήσεις της Schrödinger - Γενικά

- **Η εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων της ενέργειας από την διαφορική εξίσωση Schrödinger σε δυναμικά που δεν είναι σταθερά δεν είναι εν γένει εύκολη και στις περισσότερες περιπτώσεις ενδέχεται να μην υπάρχουν καν αναλυτικές λύσεις !**
- **Στην εξίσωση Schrödinger η ενέργεια υπεισέρχεται ως μία παράμετρος και παρ όλο που η εξίσωση ως δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση έχει δύο ανεξάρτητες λύσεις οι συνοριακές συνθήκες δεν ικανοποιούνται παρά μόνο αν η παράμετρος αυτή λάβει ιδιαίτερες τιμές.**
- Γενικά οι συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, όπως για παράδειγμα η απαίτηση να έχουμε δέσμια κατάσταση, θέτουν περιορισμούς στις δυνατές τιμές των ιδιοτιμών για τις οποίες ικανοποιείται το πρόβλημα.
- Για παράδειγμα αυτός είναι ο λόγος που δεν είναι αποδεκτές όλες οι τιμές της ενέργειας σε ένα πρόβλημα δέσμιων καταστάσεων και οι καταστάσεις εμφανίζονται με κβαντισμένες ενέργειες ! Μάλιστα σε κάποιες περιπτώσεις δεν υπάρχουν καν λύσεις με τις συνοριακές συνθήκες που θέτει το πρόβλημα !

Ιδιοτιμές - ιδιοσυναρτήσεις της Schrödinger - Γενικά

- **Η εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων της ενέργειας από την διαφορική εξίσωση Schrödinger σε δυναμικά που δεν είναι σταθερά δεν είναι εν γένει εύκολη και στις περισσότερες περιπτώσεις ενδέχεται να μην υπάρχουν καν αναλυτικές λύσεις !**
- **Στην εξίσωση Schrödinger η ενέργεια υπεισέρχεται ως μία παράμετρος και παρ όλο που η εξίσωση ως δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση έχει δύο ανεξάρτητες λύσεις οι συνοριακές συνθήκες δεν ικανοποιούνται παρά μόνο αν η παράμετρος αυτή λάβει ιδιαίτερες τιμές.**
- **Γενικά οι συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, όπως για παράδειγμα η απαίτηση να έχουμε δέσμια κατάσταση, θέτουν περιορισμούς στις δυνατές τιμές των ιδιοτιμών για τις οποίες ικανοποιείται το πρόβλημα.**
- Για παράδειγμα αυτός είναι ο λόγος που δεν είναι αποδεκτές όλες οι τιμές της ενέργειας σε ένα πρόβλημα δέσμιων καταστάσεων και οι καταστάσεις εμφανίζονται με κβαντισμένες ενέργειες ! Μάλιστα σε κάποιες περιπτώσεις δεν υπάρχουν καν λύσεις με τις συνοριακές συνθήκες που θέτει το πρόβλημα !

Ιδιοτιμές - ιδιοσυναρτήσεις της Schrödinger - Γενικά

- **Η εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων της ενέργειας από την διαφορική εξίσωση Schrödinger σε δυναμικά που δεν είναι σταθερά δεν είναι εν γένει εύκολη και στις περισσότερες περιπτώσεις ενδέχεται να μην υπάρχουν καν αναλυτικές λύσεις !**
- **Στην εξίσωση Schrödinger η ενέργεια υπεισέρχεται ως μία παράμετρος και παρ όλο που η εξίσωση ως δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση έχει δύο ανεξάρτητες λύσεις οι συνοριακές συνθήκες δεν ικανοποιούνται παρά μόνο αν η παράμετρος αυτή λάβει ιδιαίτερες τιμές.**
- **Γενικά οι συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, όπως για παράδειγμα η απαίτηση να έχουμε δέσμια κατάσταση, θέτουν περιορισμούς στις δυνατές τιμές των ιδιοτιμών για τις οποίες ικανοποιείται το πρόβλημα.**
- **Για παράδειγμα αυτός είναι ο λόγος που δεν είναι αποδεκτές όλες οι τιμές της ενέργειας σε ένα πρόβλημα δέσμιων καταστάσεων και οι καταστάσεις εμφανίζονται με κβαντισμένες ενέργειες ! Μάλιστα σε κάποιες περιπτώσεις δεν υπάρχουν καν λύσεις με τις συνοριακές συνθήκες που θέτει το πρόβλημα !**

Η εξίσωση Schrödinger του αρμονικού ταλαντωτή

- Η χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger του μονοδιάστατου ταλαντωτή είναι

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\Psi = E\,\Psi$$

Με αλλαγή της μεταβλητής $x = \lambda\xi$, όπου $\lambda = (\hbar/m\omega)^{1/2}$ και ξ αδιάστατη, και συμβολίζοντας με $\Phi(\xi) \equiv \Psi(\lambda\xi)$ αυτή γίνεται

$$-\frac{d^2\Phi}{d\xi^2} + \xi^2\Phi = \epsilon\,\Phi \qquad \mu\varepsilon \qquad \epsilon \equiv 2E/\hbar\omega$$

- Για μεγάλα ξ αυτή έχει ως ασυμπτωτικές λύσεις $\Phi \simeq \exp(\pm\xi^2/2)$. Για δέσμιες καταστάσεις οι λύσεις $\Psi(x)$ μηδενίζονται για μεγάλα x, και επομένως οι $\Phi(\xi)$ μηδενίζονται για μεγάλα ξ. Αρα η λύση με την συμπεριφορά $\Phi \simeq \exp(-\xi^2/2)$ είναι αυτή που αντιστοιχεί σε δέσμια κατάσταση !

Η εξίσωση Schrödinger του αρμονικού ταλαντωτή

- Η χρονικά ανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger του μονοδιάστατου ταλαντωτή είναι

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{m\omega^2}{2}x^2\Psi = E\,\Psi$$

Με αλλαγή της μεταβλητής $x=\lambda\xi$, όπου $\lambda=(\hbar/m\omega)^{1/2}$ και ξ αδιάστατη, και συμβολίζοντας με $\Phi(\xi)\equiv\Psi(\lambda\xi)$ αυτή γίνεται

$$-\frac{d^2\Phi}{d\xi^2}+\xi^2\Phi = \epsilon\,\Phi \qquad \mu\varepsilon \qquad \epsilon \equiv 2E/\hbar\omega$$

- Για μεγάλα ξ αυτή έχει ως ασυμπτωτικές λύσεις $\Phi \simeq \exp\left(\pm\xi^2/2\right)$. Για δέσμιες καταστάσεις οι λύσεις $\Psi(x)$ μηδενίζονται για μεγάλα x, και επομένως οι $\Phi(\xi)$ μηδενίζονται για μεγάλα ξ. Αρα η λύση με την συμπεριφορά $\Phi \simeq \exp\left(-\xi^2/2\right)$ είναι αυτή που αντιστοιχεί σε δέσμια κατάσταση !

Τα 4 βήματα για την επίλυση :

- ✓ Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση ορίζουμε την $H(\xi)$ μέσω της σχέσης

$$\Phi(\xi) \equiv e^{-\xi^2/2} H(\xi) .$$

- ✓ Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Schrödinger έχουμε

$$H'' + (-2\xi) H' + (\epsilon - 1) H = 0 . \quad (1)$$

- ✓ Το πλεονέκτημα αυτής είναι ότι επιδέχεται λύσεις στην μορφή αναπτύγματος (μέθοδος **Frobenius - Fuchs**)

$$H(\xi) = \xi^s (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots)$$

- ✓ Ασυμπτωτικά για μεγάλα ξ η λύση $H(\xi)$ προσεγγίζει την e^{ξ^2} με συνέπεια η $\Phi(\xi)$ να μην τείνει στο μηδέν όταν $\xi \to \pm\infty$. Οταν όμως η παράμετρος ϵ παίρνει τιμές $\epsilon = 1, 3, 5, \ldots$ τότε η $H(\xi)$ είναι πολυώνυμο και επομένως η $\Phi(\xi)$ τείνει στο μηδέν ! Αρα μόνο αυτές οι λύσεις είναι φυσικά αποδεκτές. Αυτές οι τιμές για την ϵ δίνουν για την ενέργεια $E_n = \hbar\omega\,(n + \frac{1}{2})$!

Τα 4 βήματα για την επίλυση :

✓ Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση ορίζουμε την $H(\xi)$ μέσω της σχέσης

$$\Phi(\xi) \equiv e^{-\xi^2/2} H(\xi) .$$

✓ Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Schrödinger έχουμε

$$H'' + (-2\xi) H' + (\epsilon - 1) H = 0 . \qquad (1)$$

✓ Το πλεονέκτημα αυτής είναι ότι επιδέχεται λύσεις στην μορφή αναπτύγματος (μέθοδος **Frobenius - Fuchs**)

$$H(\xi) = \xi^s (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \cdots)$$

✓ Ασυμπτωτικά για μεγάλα ξ η λύση $H(\xi)$ προσεγγίζει την e^{ξ^2} με συνέπεια η $\Phi(\xi)$ να μην τείνει στο μηδέν όταν $\xi \to \pm\infty$. Οταν όμως η παράμετρος ϵ παίρνει τιμές $\epsilon = 1, 3, 5, \ldots$ τότε η $H(\xi)$ είναι πολυώνυμο και επομένως η $\Phi(\xi)$ τείνει στο μηδέν ! Αρα μόνο αυτές οι λύσεις είναι φυσικά αποδεκτές. Αυτές οι τιμές για την ϵ δίνουν για την ενέργεια $E_n = \hbar\omega\,(n + \frac{1}{2})$!

Τα 4 βήματα για την επίλυση :

- ✓ Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση ορίζουμε την $H(\xi)$ μέσω της σχέσης

$$\Phi(\xi) \equiv e^{-\xi^2/2}\, H(\xi) \,.$$

- ✓ Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Schrödinger έχουμε

$$H'' + (-2\xi)\, H' + (\epsilon - 1)\, H = 0 \,. \qquad (1)$$

- ✓ Το πλεονέκτημα αυτής είναι ότι επιδέχεται λύσεις στην μορφή αναπτύγματος (μέθοδος Frobenius - Fuchs)

$$H(\xi) = \xi^s\,(a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots)$$

- ✓ Ασυμπτωτικά για μεγάλα ξ η λύση $H(\xi)$ προσεγγίζει την e^{ξ^2} με συνέπεια η $\Phi(\xi)$ να μην τείνει στο μηδέν όταν $\xi \to \pm\infty$. Οταν όμως η παράμετρος ϵ παίρνει τιμές $\epsilon = 1, 3, 5, \ldots$ τότε η $H(\xi)$ είναι πολυώνυμο και επομένως η $\Phi(\xi)$ τείνει στο μηδέν ! Αρα μόνο αυτές οι λύσεις είναι φυσικά αποδεκτές. Αυτές οι τιμές για την ϵ δίνουν για την ενέργεια $E_n = \hbar\omega\,(n + \frac{1}{2})$!

Τα 4 βήματα για την επίλυση :

✓ Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση ορίζουμε την $H(\xi)$ μέσω της σχέσης

$$\Phi(\xi) \equiv e^{-\xi^2/2}\, H(\xi)\ .$$

✓ Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Schrödinger έχουμε

$$H'' + (-2\xi)\, H' + (\epsilon - 1)\, H = 0\ . \tag{1}$$

✓ Το πλεονέκτημα αυτής είναι ότι επιδέχεται λύσεις στην μορφή αναπτύγματος (μέθοδος **Frobenius - Fuchs**)

$$H(\xi) = \xi^s\,(\,a_0 + a_1\xi + a_2\,\xi^2 + \cdots)$$

✓ Ασυμπτωτικά για μεγάλα ξ η λύση $H(\xi)$ προσεγγίζει την e^{ξ^2} με συνέπεια η $\Phi(\xi)$ να μην τείνει στο μηδέν όταν $\xi \to \pm\infty$. Οταν όμως η παράμετρος ϵ παίρνει τιμές $\epsilon = 1, 3, 5, \ldots$ τότε η $H(\xi)$ είναι πολυώνυμο και επομένως η $\Phi(\xi)$ τείνει στο μηδέν ! Αρα μόνο αυτές οι λύσεις είναι φυσικά αποδεκτές. Αυτές οι τιμές για την ϵ δίνουν για την ενέργεια $E_n = \hbar\omega\,(n + \frac{1}{2})$!

Τα 4 βήματα για την επίλυση :

- Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση ορίζουμε την $H(\xi)$ μέσω της σχέσης

$$\Phi(\xi) \equiv e^{-\xi^2/2} H(\xi) .$$

- Αντικαθιστώντας στην εξίσωση Schrödinger έχουμε

$$H'' + (-2\xi) H' + (\epsilon - 1) H = 0 . \qquad (1)$$

- Το πλεονέκτημα αυτής είναι ότι επιδέχεται λύσεις στην μορφή αναπτύγματος (μέθοδος **Frobenius - Fuchs**)

$$H(\xi) = \xi^s (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \cdots)$$

- **Ασυμπτωτικά για μεγάλα ξ η λύση $H(\xi)$ προσεγγίζει την e^{ξ^2} με συνέπεια η $\Phi(\xi)$ να μην τείνει στο μηδέν όταν $\xi \to \pm\infty$. Οταν όμως η παράμετρος ϵ παίρνει τιμές $\epsilon = 1, 3, 5, \ldots$ τότε η $H(\xi)$ είναι πολυώνυμο και επομένως η $\Phi(\xi)$ τείνει στο μηδέν ! Αρα μόνο αυτές οι λύσεις είναι φυσικά αποδεκτές. Αυτές οι τιμές για την ϵ δίνουν για την ενέργεια $E_n = \hbar\omega (n + \frac{1}{2})$!**

Η λεπτομερής ανάλυση :

- Με αυτό το ανάπτυγμα από την εξίσωση (1) παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
s(s-1) &= 0, \qquad a_1\, s(s+1) = 0 \\
a_{k+2} &= a_k \, \frac{2(s+k)+1-\epsilon}{(s+k+1)(s+k+2)}\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \;.
\end{aligned}
$$

- Από την πρώτη προκύπτει ότι $s = 0$ η $s = 1$. Για $s = 1 \Longrightarrow a_1 = 0$ και όλοι οι συντελεστές $a_{3,5,7,\ldots}$ με περιττό δείκτη μηδενίζονται, λόγω της δεύτερης ! Για $s = 0$ επιλέγουμε $a_1 = 0$.
- Από τις δύο περιπτώσεις $s = 0, 1$ παίρνουμε δύο ανεξάρτητες λύσεις, μία **άρτια** και μία **περιττή** όταν $\xi \to -\xi$.

- Οι δύο λύσεις, για $s = 0, 1$ είναι

$$
\begin{aligned}
H(\xi) &= \xi^s \left(a_0 + a_2\,\xi^2 + a_4\,\xi^4 + \cdots \right) \\
a_{2n+2} &= a_{2n} \, \frac{2\,(s+2n)+1-\epsilon}{(s+2n+1)\,(s+2n+2)}\,, \quad n = 0, 1, 2 \cdots
\end{aligned}
$$

Η λεπτομερής ανάλυση :

- Με αυτό το ανάπτυγμα από την εξίσωση (1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} s(s-1) &= 0, \qquad a_1\, s(s+1) = 0 \\ a_{k+2} &= a_k\, \frac{2(s+k)+1-\epsilon}{(s+k+1)(s+k+2)}\,, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \,. \end{aligned}$$

  - Από την πρώτη προκύπτει ότι $s = 0$ η $s = 1$. Για $s = 1 \implies a_1 = 0$ και όλοι οι συντελεστές $a_{3,5,7,\ldots}$ με περιττό δείκτη μηδενίζονται, λόγω της δεύτερης ! Για $s = 0$ επιλέγουμε $a_1 = 0$.
  - Από τις δύο περιπτώσεις $s = 0, 1$ παίρνουμε δύο ανεξάρτητες λύσεις, μία **άρτια** και μία **περιττή** όταν $\xi \to -\xi$.

- Οι δύο λύσεις, για $s = 0, 1$ είναι

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \xi^s\,(\,a_0 + a_2\,\xi^2 + a_4\,\xi^4 + \cdots) \\ a_{2n+2} &= a_{2n}\,\frac{2\,(s+2n)+1-\epsilon}{(s+2n+1)\,(s+2n+2)}\,, \quad n = 0, 1, 2\cdots \end{aligned}$$

- Για μεγάλα **"n"** έχουμε $a_{2n+2} \approx a_{2n}/n$ ακριβώς όπως στους συντελεστές του αναπτύγματος της συνάρτησης $\exp(\ \xi^2\ )$. Με βάση αυτό, για μεγάλα ξ η συνάρτηση $H(\xi)$ συμπεριφέρεται ως $H(\xi) \approx \exp(\ \xi^2\ )$, σε ασυνέπεια με την απαίτηση $\boldsymbol{\Phi(\xi)} \xrightarrow{\xi\to\infty} \mathbf{0}$ όπως απαιτείται για δέσμια κατάσταση. Από το επιχείρημα εξαιρούνται μόνον οι περιπτώσεις όπου

$$\epsilon \ = \ 2\,(s + 2n_0) + 1$$

με $\boldsymbol{n_0}$ θετικό ακέραιο $\mathbf{0, 1, 2, \cdots}$. Τότε η $\boldsymbol{H(\xi)}$ είναι πολυώνυμο βαθμού $\boldsymbol{2\,n_0 + s}$, δεν αυξάνει εκθετικά όταν το ξ γίνεται μεγάλο και $\boldsymbol{\Phi(\xi)} \xrightarrow{\xi\to\infty} \mathbf{0}$. Αρα μόνον για αυτές τις τιμές του $\boldsymbol{\epsilon}$ έχουμε αποδεκτές λύσεις.

- Για κάθε $n_0 = 0, 1, 2, \cdots$ οι αποδεκτές λυσεις $H(\xi)$, για τις δύο περιπτώσεις $s = 0, 1$, προσδιορίζονται πλήρως εκτός μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς "c" η οποία θα καθορισθεί από την κανονικοποίηση. Οι τιμές της ενέργειας προσδιορίζονται από την σχέση $\epsilon = 2\,E/\hbar\omega$ και είναι

$$E_n \ = \ \hbar\omega\,(\,n + \frac{1}{2}\,) \qquad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

- Για μεγάλα "n" έχουμε $a_{2n+2} \approx a_{2n}/n$ ακριβώς όπως στους συντελεστές του αναπτύγματος της συνάρτησης $\exp(\ \xi^2\ )$. Με βάση αυτό, για μεγάλα ξ η συνάρτηση $H(\xi)$ συμπεριφέρεται ως $H(\xi) \approx \exp(\ \xi^2\ )$, σε ασυνέπεια με την απαίτηση $\Phi(\xi) \xrightarrow{\xi \to \infty} 0$ όπως απαιτείται για δέσμια κατάσταση. Από το επιχείρημα εξαιρούνται μόνον οι περιπτώσεις όπου

$$\epsilon \ = \ 2\,(s + 2n_0) + 1$$

με n_0 θετικό ακέραιο $0, 1, 2, \cdots$. Τότε η $H(\xi)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $2\,n_0 + s$, δεν αυξάνει εκθετικά όταν το ξ γίνεται μεγάλο και $\Phi(\xi) \xrightarrow{\xi \to \infty} 0$. Αρα μόνον για αυτές τις τιμές του ϵ έχουμε αποδεκτές λύσεις.

- Για κάθε $n_0 \ = \ 0, 1, 2, \cdots$ οι αποδεκτές λυσεις $H(\xi)$, για τις δύο περιπτώσεις $s = 0, 1$, προσδιορίζονται πλήρως εκτός μιάς πολλαπλασιαστικής σταθεράς "c" η οποία θα καθορισθεί από την κανονικοποίηση. Οι τιμές της ενέργειας προσδιορίζονται από την σχέση $\epsilon = 2\,E/\hbar\omega$ και είναι

$$\boxed{E_n \ = \ \hbar\omega\,(\,n + \frac{1}{2}\,) \qquad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots}$$

$s=0$			
n_0	ϵ	E	$H(\xi)$
0	1	$\hbar\omega/2$	c
1	5	$5\ \hbar\omega/2$	$c\,(1-2\xi^2)$
2	9	$9\ \hbar\omega/2$	$c\,(1-4\xi^2+\frac{4}{3}\xi^4)$
...	...	...	...

$s=1$			
n_0	ϵ	E	$H(\xi)$
0	3	$3\ \hbar\omega/2$	$c\,\xi$
1	7	$7\ \hbar\omega/2$	$c\,(\xi-\frac{2}{3}\xi^3)$
2	11	$11\ \hbar\omega/2$	$c\,(\xi-\frac{4}{3}\xi^3+\frac{4}{15}\xi^5)$
...	...	...	...

Στην μαθηματική βιβλιογραφία οι συναρτήσεις $H(\xi)$, με κατάλληλη επιλογή μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς, είναι γνωστές και ως πολυώνυμα του **Hermite** .

$s = 0$			
n_0	ϵ	E	$H(\xi)$
0	1	$\hbar\omega/2$	c
1	5	$5\ \hbar\omega/2$	$c\,(1-2\xi^2)$
2	9	$9\ \hbar\omega/2$	$c\,(1-4\xi^2+\frac{4}{3}\xi^4)$
...	...	...	...

$s = 1$			
n_0	ϵ	E	$H(\xi)$
0	3	$3\ \hbar\omega/2$	$c\,\xi$
1	7	$7\ \hbar\omega/2$	$c\,(\xi-\frac{2}{3}\xi^3)$
2	11	$11\ \hbar\omega/2$	$c\,(\xi-\frac{4}{3}\xi^3+\frac{4}{15}\xi^5)$
...	...	...	...

Στην μαθηματική βιβλιογραφία οι συναρτήσεις $H(\xi)$, με κατάλληλη επιλογή μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς, είναι γνωστές και ως πολυώνυμα του Hermite .

$s=0$			
n_0	ϵ	E	$H(\xi)$
0	1	$\hbar\omega/2$	c
1	5	$5\ \hbar\omega/2$	$c\,(1-2\xi^2)$
2	9	$9\ \hbar\omega/2$	$c\,(1-4\xi^2+\frac{4}{3}\xi^4)$
...	...	...	...

$s=1$			
n_0	ϵ	E	$H(\xi)$
0	3	$3\ \hbar\omega/2$	$c\,\xi$
1	7	$7\ \hbar\omega/2$	$c\,(\xi-\frac{2}{3}\xi^3)$
2	11	$11\ \hbar\omega/2$	$c\,(\xi-\frac{4}{3}\xi^3+\frac{4}{15}\xi^5)$
...	...	...	...

Στην μαθηματική βιβλιογραφία οι συναρτήσεις $H(\xi)$, με κατάλληλη επιλογή μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς, είναι γνωστές και ως πολυώνυμα του **Hermite** .

Ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\Psi_n(x) = N_n\, e^{-\xi^2/2}\, H_n(\xi) \quad , \quad \text{οπου } \xi \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x$$

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1

Η έκδοση 1.0 είναι διαθέσιμη εδώ.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών. Αθανάσιος Λαχανάς. «Κβαντική Μηχανική ΙΙ. Ενότητα2: Μονοδιάστατος Γραμμικός Αρμονικός Ταλαντωτής». Έκδοση: 1.1. Αθήνα 2016. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/PHYS9/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.