ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Κβαντική Μηχανική ΙΙ

Ενότητα 1: Γενική διατύπωση της Κβαντικής Μηχανικής

Αθανάσιος Λαχανάς
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Περιεχόμενα 1ης ενότητας

Γενική διατύπωση της QM

- Φορμαλισμός Dirac
- Πλάτη πιθανοτήτων - Πιθανότητες
- Χρονική εξέλιξη πλατών
- Καταστάσεις καθορισμένης ενέργειας
- Ανάλυση στις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας - Χρονική εξέλιξη των αντιστοίχων πλατών
- Παραδείγματα χρονικής εξέλιξης καταστάσεων - Συστήματα δύο καταστάσεων
- Η έννοια των ¨bra¨ και ¨ket¨ στην Κβαντική Μηχανική
- Κβαντική Μηχανική ως ¨ Μηχανική Πινάκων ¨ - (Heisenberg , Jordan)

Quantum Mechanics reloaded

Η έννοια της κατάστασης

- Κάθε φυσική κατάσταση περιγράφεται από ένα "άνυσμα" (**ket**) σε ένα χώρο **Hilbert** που ικανοποιεί την εξίσωση **Schrödinger**

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}\, |\Psi(t)\rangle$$

Η έννοια της κατάστασης

- Κάθε φυσική κατάσταση περιγράφεται από ένα "ανυσμα" (**ket**) σε ένα χώρο **Hilbert** που ικανοποιεί την εξίσωση **Schrödinger**

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\,|\,\Psi(t)\,\rangle}{\partial\,t} = \hat{H}\,|\,\Psi(t)\,\rangle$$

- Τα ανύσματα του χώρου **Hilbert** συμβολίζονται με $|\,a\,\rangle$, (κατά **Dirac**)
Το εσωτερικό γινόμενο δύο ανυσμάτων $|\,a\,\rangle$, $|\,b\,\rangle$

$$(\,|\,a\,\rangle\,,\,|\,b\,\rangle\,) \equiv \langle\,a\,|\,b\,\rangle$$

Η έννοια της κατάστασης

- Κάθε φυσική κατάσταση περιγράφεται από ένα ‘‘ανυσμα" (**ket**) σε ένα χώρο **Hilbert** που ικανοποιεί την εξίσωση **Schrödinger**

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\,|\,\Psi(t)\,\rangle}{\partial\,t} = \hat{H}\,|\,\Psi(t)\,\rangle$$

- Τα ανύσματα του χώρου **Hilbert** συμβολίζονται με $|\,a\,\rangle$, (κατά **Dirac**)
Το εσωτερικό γινόμενο δύο ανυσμάτων $|\,a\,\rangle\,,\,|\,b\,\rangle$

$$(\,|\,a\,\rangle\,,\,|\,b\,\rangle\,)\equiv\langle\,a\,|\,b\,\rangle$$

- $\langle\,a\,|\,a\,\rangle \geq 0$, ίσο με μηδέν $\leftrightsquigarrow$ $|\,a\,\rangle = 0$
- $\langle\,a\,|\,b\,\rangle = \langle\,b\,|\,a\,\rangle^*$
- $|\,\chi\,\rangle = \lambda_1\,|\,\phi_1\,\rangle + \lambda_2\,|\,\phi_2\,\rangle$ $\rightsquigarrow$ $\langle\,a\,|\,\chi\,\rangle = \lambda_1\,\langle\,a\,|\,\phi_1\,\rangle + \lambda_2\,\langle\,a\,|\,\phi_2\,\rangle$

- Η **Norm** $\| \, |\Phi\rangle \, \|$ ενός ket $|\Phi\rangle$ ορίζεται ως

$$\| \, |\Phi\rangle \, \|^2 \equiv \langle \Phi | \Phi \rangle$$

και το $|\Phi\rangle$ είναι κανονικοποιημένο όταν $\| \, |\Phi\rangle \, \| = 1$.

- Η **Norm** $||\,|\Phi\rangle\,||$ ενός ket $|\Phi\rangle$ ορίζεται ως

$$||\,|\Phi\rangle\,||^2 \equiv \langle\Phi|\Phi\rangle$$

και το $|\Phi\rangle$ είναι κανονικοποιημένο όταν $||\,|\Phi\rangle\,|| = 1$.

- **Τελεστές στον χώρο Hilbert**
  - Ενάς τελεστής $\hat{Q}$ δρα σε ενα ket και δίνει ένα άλλο ket ,

$$\hat{Q}\,|\Phi\rangle = |\Phi'\rangle$$

  - Ο συζυγής $\hat{Q}^\dagger$ τελεστή $\hat{Q}$ ορίζεται από την σχέση

$$\langle a|\,\hat{Q}^\dagger\,|b\rangle \equiv \langle b|\,\hat{Q}\,|a\rangle^*$$

  - Ενάς τελεστής $\hat{Q}$ είναι αυτοσυζυγής όταν

$$\hat{Q}^\dagger = \hat{Q}$$

- Ολα τα μετρήσιμα μεγέθη (πιθανότητες, μέσες τιμές, ...) παράγονται από εσωτερικά γινόμενα !

- Κάθε παρατηρήσιμο (**observable**) μέγεθος $\boldsymbol{A}$ αντιπροσωπεύεται από έναν αυτοσυζυγή τελεστή $\hat{A}$ και η μέση τιμή $\langle A \rangle$ του φυσικού μεγέθους $\boldsymbol{A}$ σε μια (κανονικοποιημένη) κατάσταση $|\Psi\rangle$ είναι

$$\boxed{\langle A \rangle \equiv \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle}$$

Ιδιοτιμές / Ιδιοανύσματα τελεστή

$$\hat{A}\,|\phi\rangle = \lambda\,|\phi\rangle \quad \mu\epsilon \quad |\phi\rangle \neq 0$$

$\Longrightarrow \quad |\phi\rangle =$ **Ιδιοάνυσμα** $, \lambda =$ **Ιδιοτιμή**

- Ολα τα μετρήσιμα μεγέθη (πιθανότητες, μέσες τιμές, ...) παράγονται από εσωτερικά γινόμενα !
- Κάθε παρατηρήσιμο (**observable**) μέγεθος A αντιπροσωπεύεται από έναν αυτοσυζυγή τελεστή $\hat{A}$ και η μέση τιμή $\langle A \rangle$ του φυσικού μεγέθους A σε μια (κανονικοποιημένη) κατάσταση $|\Psi\rangle$ είναι

$$\boxed{\langle A \rangle \equiv \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle}$$

Ιδιοτιμές / Ιδιοανύσματα τελεστή

$$\hat{A}\,|\phi\rangle = \lambda\,|\phi\rangle \quad \mu\epsilon \quad |\phi\rangle \neq 0$$

$\Longrightarrow$ $|\phi\rangle =$ **Ιδιοάνυσμα** , $\lambda =$ **Ιδιοτιμή**

- Φάσμα ιδιοσυναρτήσεων και αντιστοίχων ιδιοτιμών :

$$\hat{A}\,|\phi_i\rangle = \lambda_i\,|\phi_i\rangle$$

Φάσμα **διακριτό** ($i =$ διακριτός δείκτης) η **συνεχές** ($i =$ συνεχής δείκτης)

- Οι ιδιοτιμές αυτοσυζυγούς τελεστή είναι πραγματικές

$$\lambda_i = \quad \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\epsilon\varsigma$$

και τα ιδιοανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα

$$\langle\phi_k|\phi_j\rangle = 0 \quad , \quad k \neq j$$

- Τα ιδιοανύσματα $|\phi_i\rangle$ αυτοσυζυγούς τελεστή αποτελούν βάση. Κάθε $|\Psi\rangle$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός

$$\boxed{|\Psi\rangle = \sum c_k\,|\phi_k\rangle}$$

Φασματικό Θεώρημα , (**Spectral Theorem**).

Τα ιδιοανύσματα $|\phi_i\rangle$ μπορουν να κανονικοποιηθούν στην μονάδα οπότε αποτελούν ορθοκανονική βάση !

$$\langle \phi_k | \phi_j \rangle = \delta_{kj}$$

$$|\Psi\rangle = \sum c_k |\phi_k\rangle \quad \leftrightarrows \quad c_k = \langle \phi_k | \Psi \rangle$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση του **Parseval**

$$\| \, |\Psi\rangle \, \|^2 = \sum |c_k|^2$$

και επίσης

$$\langle A \rangle \equiv \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \sum |c_k|^2 \lambda_k$$

Τα ιδιοανύσματα $|\phi_i\rangle$ μπορουν να κανονικοποιηθούν στην μονάδα οπότε αποτελούν ορθοκανονική βάση !

$$\langle \phi_k | \phi_j \rangle = \delta_{kj}$$

$$\boxed{|\Psi\rangle = \sum c_k |\phi_k\rangle \quad \leftrightarrows \quad c_k = \langle \phi_k | \Psi \rangle}$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση του **Parseval**

$$\boxed{\| |\Psi\rangle \|^2 = \sum |c_k|^2}$$

και επίσης

$$\boxed{\langle A \rangle \equiv \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \sum |c_k|^2 \lambda_k}$$

Τα ιδιοανύσματα $|\phi_i\rangle$ μπορουν να κανονικοποιηθούν στην μονάδα οπότε αποτελούν ορθοκανονική βάση !

$$\langle \phi_k | \phi_j \rangle = \delta_{kj}$$

$$|\Psi\rangle = \sum c_k |\phi_k\rangle \quad \leftrightarrows \quad c_k = \langle \phi_k | \Psi \rangle$$

Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση του **Parseval**

$$\| \, |\Psi\rangle \, \|^2 = \sum |c_k|^2$$

και επίσης

$$\langle A \rangle \equiv \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \sum |c_k|^2 \lambda_k$$

Πλάτη πιθανοτήτων

- Αν η $|\Psi(t)\rangle$ είναι κανονικοποιημένη στην μονάδα από την σχέση του **Parseval** προκύπτει

$$\sum |c_k(t)|^2 = 1$$

- και η μέση τιμή του μεγέθους A είναι

$$\langle A \rangle = \sum |c_k(t)|^2 \lambda_k$$

- **Οι συντελεστές $c_k(t)$ εκφράζουν πλάτη πιθανότητας :**
$|c_k(t)|^2 =$ **πιθανότητα σε διαδικασία μέτρησης του μεγέθους A, την χρονική στιγμή t, να μετρηθεί τιμή λ_k !**

Πλάτη πιθανοτήτων

- Αν η $|\Psi(t)\rangle$ είναι κανονικοποιημένη στην μονάδα από την σχέση του **Parseval** προκύπτει

$$\sum |c_k(t)|^2 = 1$$

- και η μέση τιμή του μεγέθους A είναι

$$\langle A \rangle = \sum |c_k(t)|^2 \lambda_k$$

- Οι συντελεστές $c_k(t)$ εκφράζουν πλάτη πιθανότητας : $|c_k(t)|^2 =$ πιθανότητα σε διαδικασία μέτρησης του μεγέθους A, την χρονική στιγμή t, να μετρηθεί τιμή λ_k !

Πλάτη πιθανοτήτων

- Αν η $|\Psi(t)\rangle$ είναι κανονικοποιημένη στην μονάδα από την σχέση του **Parseval** προκύπτει

$$\sum |c_k(t)|^2 = 1$$

- και η μέση τιμή του μεγέθους A είναι

$$\langle A \rangle = \sum |c_k(t)|^2 \lambda_k$$

- **Οι συντελεστές $c_k(t)$ εκφράζουν πλάτη πιθανότητας :**
  $|c_k(t)|^2 =$ **πιθανότητα σε διαδικασία μέτρησης του μεγέθους A, την χρονική στιγμή t, να μετρηθεί τιμή λ_k !**

Πλάτη πιθανοτήτων

Οι ιδιοτιμές του τελεστή $\hat{A}$ είναι οι μόνες δυνατές που προκύπτουν σε διαδικασία μέτρησης του μεγέθους A και η πιθανότητα εύρεσης μιάς από αυτές προκύπτει από τους συντελεστές $c_k(t)$!

- Ο συντελεστής $c_k(t)$ είναι το πλάτος πιθανότητας να μετρηθεί τιμή λ_k, για το φυσικό μέγεθος A, την χρονική στιγμή t !
- Ισοδύναμα οι συντελεστές $c_k(t)$ εκφράζουν το πλάτος πιθανότητας η κατάσταση $|\Psi(t)\rangle$ να βρεθεί στην $|\phi_k\rangle$, την χρονική στιγμή t !
- Αν σε μιά μέτρηση την χρονική στιγμή t προέκυψε τιμή λ_k αμέσως μετά την μέτρηση το φυσικό σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $|\phi_k\rangle$

$$|\Psi(t_+)\rangle = |\phi_k\rangle$$

Πλάτη πιθανοτήτων

Οι ιδιοτιμές του τελεστή $\hat{A}$ είναι οι μόνες δυνατές που προκύπτουν σε διαδικασία μέτρησης του μεγέθους A και η πιθανότητα εύρεσης μιάς από αυτές προκύπτει από τους συντελεστές $c_k(t)$!

- **Ο συντελεστής $c_k(t)$ είναι το πλάτος πιθανότητας να μετρηθεί τιμή λ_k , για το φυσικό μέγεθος A , την χρονική στιγμή t !**
- Ισοδύναμα οι συντελεστές $c_k(t)$ εκφράζουν το πλάτος πιθανότητας η κατάσταση $|\Psi(t)\rangle$ να βρεθεί στην $|\phi_k\rangle$, την χρονική στιγμή t !
- Αν σε μιά μέτρηση την χρονική στιγμή t προέκυψε τιμή λ_k αμέσως μετά την μέτρηση το φυσικό σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $|\phi_k\rangle$

$$|\Psi(t_+)\rangle = |\phi_k\rangle$$

Πλάτη πιθανοτήτων

Οι ιδιοτιμές του τελεστή $\hat{A}$ είναι οι μόνες δυνατές που προκύπτουν σε διαδικασία μέτρησης του μεγέθους A και η πιθανότητα εύρεσης μιάς από αυτές προκύπτει από τους συντελεστές $c_k(t)$!

- Ο συντελεστής $c_k(t)$ είναι το πλάτος πιθανότητας να μετρηθεί τιμή λ_k, για το φυσικό μέγεθος A, την χρονική στιγμή t !
- Ισοδύναμα οι συντελεστές $c_k(t)$ εκφράζουν το πλάτος πιθανότητας η κατάσταση $|\Psi(t)\rangle$ να βρεθεί στην $|\phi_k\rangle$, την χρονική στιγμή t !
- Αν σε μιά μέτρηση την χρονική στιγμή t προέκυψε τιμή λ_k αμέσως μετά την μέτρηση το φυσικό σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $|\phi_k\rangle$

$$|\Psi(t_+)\rangle = |\phi_k\rangle$$

Πλάτη πιθανοτήτων

Οι ιδιοτιμές του τελεστή $\hat{A}$ είναι οι μόνες δυνατές που προκύπτουν σε διαδικασία μέτρησης του μεγέθους A και η πιθανότητα εύρεσης μιάς από αυτές προκύπτει από τους συντελεστές $c_k(t)$!

- Ο συντελεστής $c_k(t)$ είναι το πλάτος πιθανότητας να μετρηθεί τιμή λ_k , για το φυσικό μέγεθος A , την χρονική στιγμή t !
- Ισοδύναμα οι συντελεστές $c_k(t)$ εκφράζουν το πλάτος πιθανότητας η κατάσταση $|\Psi(t)\rangle$ να βρεθεί στην $|\phi_k\rangle$, την χρονική στιγμή t !
- Αν σε μιά μέτρηση την χρονική στιγμή t προέκυψε τιμή λ_k αμέσως μετά την μέτρηση το φυσικό σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $|\phi_k\rangle$

$$|\Psi(t_+)\rangle = |\phi_k\rangle$$

Ενας κομψός και εύχρηστος τρόπος να γραφεται το ανάπτυγμα της φυσικής κατάστασης $|\Psi(t)\rangle$ στην ορθοκανονική βάση $|\phi_k\rangle$ είναι

$$|\Psi\rangle = \sum |\phi_k\rangle\langle\phi_k|\Psi\rangle$$

Το εσωτερικό γινόμενο $\langle\phi_k|\Psi\rangle$ δίνει το πλάτος πιθανότητας την χρονική στιγμή t, το σύστημα, να βρεθεί στην κατάσταση $|\phi_k\rangle$.

Το ανάπτυγμα της ίδιας κατάστασης σε μία άλλη βάση $|s_j\rangle$ θα γραφόταν επομένως ως

$$|\Psi\rangle = \sum |s_j\rangle\langle s_j|\Psi\rangle$$

με το εσωτερικό γινόμενο $\langle s_k|\Psi\rangle$ να δίνει το πλάτος πιθανότητας την χρονική στιγμή t, το σύστημα, να βρεθεί στην κατάσταση $|s_k\rangle$.

Πως συνδέονται τα δύο πλάτη ;

Αν στο πλάτος $\langle s_k | \Psi \rangle$ η $| \Psi \rangle$ γραφεί ως ανάπτυγμα στην βάση $| \phi_k \rangle$ προκύπτει άμεσα η σχέση των πλατών μετάβασης

$$\langle s_j | \Psi \rangle = \sum_k \langle s_j | \phi_k \rangle \langle \phi_k | \Psi \rangle$$

- Τα πλάτη στην βάση $| s_j \rangle$ συνδέονται με τα πλάτη της ανάπτυξης στην βάση $| \phi_k \rangle$ μέσω των εσωτερικών γινομένων $\langle s_j | \phi_k \rangle$!

Συγκρίνετε με το τί συμβαίνει όταν ένα άνυσμα στον συνήθη τριδιάστατο χώρο αναλύεται σε δύο διαφορετικές ορθοκανονικές βάσεις. Οι συντελεστές, η αλλοιώς ¨ συνιστώσες ¨, των δύο αναπτυγμάτων σε αυτή την περίπτωση συνδέονται μεταξύ τους με τα εσωτερικά γινόμενα των ανυσμάτων των δύο βάσεων με έναν ακριβώς αντίστοιχο τρόπο !

Παράδειγμα 1

Δίνεται ότι το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί σε δύο ανεξάρτητες καταστάσεις, που είναι ιδιοκαταστάσεις της προβολής του σπιν σε οποιαδήποτε κατεύθυνση, με ιδιοτιμές $+\hbar/2$ και $-\hbar/2$ αντίστοιχα. Αν επιλέξουμε ως κατεύθυνση τον άξονα z , τις ορθοκανονικές αυτές καταστάσεις αυτές καταστάσεις θα τις συμβολίσουμε με

$$|z,+\rangle \quad , \quad |z,-\rangle$$

Η γενική κατασταση του ηλεκτρονίου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών

$$|\Psi\rangle = |z,+\rangle\langle z,+|\Psi\rangle + |z,-\rangle\langle z,-|\Psi\rangle$$

- $\langle z,+|\Psi\rangle$ είναι το πλάτος πιθανότητας το ηλεκτρόνιο να βρεθεί στην $|z,+\rangle$ η το ίδιο να μετρήσουμε σπιν $+\hbar/2$ στην κατεύθυνση z
- $\langle z,-|\Psi\rangle$ είναι το πλάτος πιθανότητας το ηλεκτρόνιο να βρεθεί στην $|z,-\rangle$ η το ίδιο να μετρήσουμε σπιν $-\hbar/2$ στην κατεύθυνση z

Πως συνδέονται αυτά τα πλάτη με τα αντίστοιχα πλάτη πιθανοτήτων να μετρηθεί σπίν $\pm\hbar/2$ στην x κατεύθυνση ;

Στην κατεύθυνση του άξονα των x , τις ορθοκανονικές καταστάσεις με τιμές της προβολής του σπιν $\pm\hbar/2$ καταστάσεις θα τις συμβολίσουμε με

$$|x,+\rangle \quad , \quad |x,-\rangle$$

και η κατασταση του ηλεκτρονίου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών

$$|\Psi\rangle = |x,+\rangle\langle x,+|\Psi\rangle + |x,-\rangle\langle x,-|\Psi\rangle$$

- $\langle x,+|\Psi\rangle$ είναι το πλάτος πιθανότητας το ηλεκτρόνιο να βρεθεί στην $|x,+\rangle$ η το ίδιο να μετρήσουμε σπιν $+\hbar/2$ στην κατεύθυνση x
- $\langle x,-|\Psi\rangle$ είναι το πλάτος πιθανότητας το ηλεκτρόνιο να βρεθεί στην $|x,-\rangle$ η το ίδιο να μετρήσουμε σπιν $-\hbar/2$ στην κατεύθυνση x

Η σχέση μεταξύ των πλατών θα είναι

$$\langle x,+|\Psi\rangle = \langle x,+|z,+\rangle\langle z,+|\Psi\rangle + \langle x,+|z,-\rangle\langle z,-|\Psi\rangle$$

$$\langle x,-|\Psi\rangle = \langle x,-|z,+\rangle\langle z,+|\Psi\rangle + \langle x,-|z,-\rangle\langle z,-|\Psi\rangle$$

Παράδειγμα 2

Ενα σωματίδιο κινείται κατά μήκος του άξονα x. Τις ορθοκανονικές ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της θέσης $\hat{x}$ με ιδιοτιμή x θα τις συμβολίσουμε με

$$|x\rangle$$

Τις ορθοκανονικές ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της αντίστοιχης ορμής $\hat{p}_x$ με ιδιοτιμή p θα τις συμβολίσουμε με

$$|p\rangle$$

Επομένως

$$\hat{x}\,|x\rangle = x\,|x\rangle \quad , \quad \hat{p}_x\,|p\rangle = p\,|p\rangle$$

Αν η κατάσταση του σωματιδίου $|\Psi(t)\rangle$ γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $|x\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_x |x\rangle\,\langle x|\Psi(t)\rangle$$

⇝ $\langle x|\Psi(t)\rangle$ είναι το πλάτος πιθανότητας το σωματίδιο να βρεθεί στην θέση x την χρονική στιγμή t άρα είναι η **κυματική συνάρτηση** που πραγματι έχει αυτή την φυσική ερμηνεία !

$$\psi(x,t) = \langle x \,|\, \Psi(t) \rangle$$

Αν η κατάσταση του σωματιδίου $|\,\Psi(t)\,\rangle$ γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $|\,p\,\rangle$

$$|\,\Psi(t)\,\rangle = \sum_p |\,p\rangle \, \langle p \,|\, \Psi(t)\,\rangle$$

$\rightsquigarrow$ $\langle\, p \,|\, \Psi(t)\,\rangle$ είναι το πλάτος πιθανότητας το σωματίδιο να βρεθεί με ορμή p την χρονική στιγμή t άρα είναι η **κυματική συνάρτηση για την ορμή** που πραγματι έχει αυτή την φυσική ερμηνεία !

$$\tilde{\psi}(p,t) = \langle p \,|\, \Psi(t)\,\rangle$$

Πως συνδέεται η $\tilde{\psi}(p,t)$ με την $\psi(x,t)$;

$$\langle x \,|\, \Psi(t) \rangle = \sum_p \langle x \,|\, p \rangle \, \langle p \,|\, \Psi(t) \rangle$$

Αν γνωρίζαμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle x \,|\, p \rangle$ θα γνωρίζαμε και την σχέση μεταξύ των κυματικών συναρτήσεων $\psi(x,t)$ και $\tilde{\psi}(p,t)$.

Επισημάνσεις :

- **Τα φάσματα των ιδιοτιμών της θέσης και ορμής είναι συνεχή με τιμές στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, άρα τα προηγούμενα αθροίσματα είναι ολοκληρώματα !**
- **Αποδεικνύεται ότι (βλέπε ασκήσεις)**

$$\langle x \,|\, p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \, e^{i p x / \hbar}$$

Με βάση αυτά η σχέση μεταξύ των $\psi(x,t)$, $\tilde{\psi}(p,t)$ γράφεται

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i p x / \hbar} \, \tilde{\psi}(p,t) \, dp$$

Χρονική εξέλιξη των πλατών πιθανότητας

Τα πλάτη μεταβάλλονται με τον χρόνο ως

$$i\hbar \frac{dc_k}{dt} = \langle \phi_k | \, i\hbar \frac{d}{dt} \, | \Psi(t) \rangle = \langle \phi_k | \, \hat{H} \, | \Psi(t) \rangle$$

και αναπτύσσοντας το $| \Psi(t) \rangle$

$$i\hbar \frac{dc_k}{dt} = \langle \phi_k | \, \hat{H} \left(\sum_j c_j \, | \phi_j \rangle \right) = \sum_j \langle \phi_k | \, \hat{H} \, | \phi_j \rangle \, c_j$$

$$i\hbar \frac{dc_k}{dt} = \sum_j H_{kj} \, c_j \qquad \epsilon\xi. \quad \text{Schrödinger}$$

όπου $H_{kj} \equiv \langle \phi_k | \, \hat{H} \, | \phi_j \rangle$

Ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας - Στάσιμες καταστάσεις

Υπάρχουν λύσεις της εξίσωσης Schrödinger που χαρακτηρίζονται από δεδομένη ενέργεια. Αυτές είναι ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτωνιανής και επομένως η διασπορά στην ενέργεια είναι μηδενική ! Αυτές ονομάζονται και στάσιμες διότι οι μέσες τιμές των παρατηρησίμων μεγεθών, όταν το σύστημα περιγράφεται από μία τέτοια κατάσταση, δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλύσει το πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοανυσμάτων της ενέργειας για Χαμιλτωνιανή $\hat{H}$ που δεν έχει εξάρτηση από τον χρόνο

$$\hat{H}\,|E_k\rangle = E_k\,|E_k\rangle$$

Ο δείκτης k χαρακτηρίζει τις ιδιοτιμές E_k και τις αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις $|E_k\rangle$ και μπορεί να είναι συνεχής ή διακριτός (Γενικά για δέσμιες καταστάσεις ο δείκτης είναι διακριτός αλλά για το μέρος του φάσματος που περιγράφει καταστάσεις που δεν είναι δέσμιες είναι συνεχής)
Είναι προφανές ότι οι καταστάσεις

$$|\Psi_k(t)\rangle = e^{-iE_k t/\hbar}\,|E_k\rangle$$

ικανοποιούν αυτομάτως την εξίσωση Schrödinger και επομένως περιγράφουν φυσικές καταστάσεις και μάλιστα με καθορισμένη ενέργεια γιατί είναι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας.

Ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας - Στάσιμες καταστάσεις

Υπάρχουν λύσεις της εξίσωσης Schrödinger που χαρακτηρίζονται από δεδομένη ενέργεια. Αυτές είναι ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτωνιανής και επομένως η διασπορά στην ενέργεια είναι μηδενική ! Αυτές ονομάζονται και στάσιμες διότι οι μέσες τιμές των παρατηρησίμων μεγεθών, όταν το σύστημα περιγράφεται από μία τέτοια κατάσταση, δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλύσει το πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοανυσμάτων της ενέργειας για Χαμιλτωνιανή $\hat{H}$ που δεν έχει εξάρτηση από τον χρόνο

$$\hat{H}\,|E_k\rangle = E_k\,|E_k\rangle$$

Ο δείκτης k χαρακτηρίζει τις ιδιοτιμές E_k και τις αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις $|E_k\rangle$ και μπορεί να είναι συνεχής η διακριτός (Γενικά για δέσμιες καταστάσεις ο δείκτης είναι διακριτός αλλά για το μέρος του φάσματος που περιγράφει καταστάσεις που δεν είναι δέσμιες είναι συνεχής)
Είναι προφανές ότι οι καταστάσεις

$$\boxed{|\Psi_k(t)\rangle = e^{-iE_k t/\hbar}\,|E_k\rangle}$$

ικανοποιούν αυτομάτως την εξίσωση Schrödinger και επομένως περιγράφουν φυσικές καταστάσεις και μάλιστα με καθορισμένη ενέργεια γιατί είναι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας.

Οποιαδήποτε κατάσταση $|\Psi\rangle$ μπορεί να αναλυθεί ως

$$|\Psi(t)\rangle = \sum c_k(t)\,|E_k\rangle$$

Για κανονικοποιημένες στην μονάδα ιδιοκαταστάσεις $|E_k\rangle$, οι συντελεστές $c_k(t)$ ικανοποιούν το σύστημα της σελίδας 20. Τα στοιχεία H_{kj} που καθορίζουν την χρονική εξέλιξη τους είναι μηδενικά όταν οι δείκτες $k\,,\,j$ αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές ενώ όταν αντιστοιχούν σε ίδιες ιδιοτιμές

$$\langle E_k|\hat{H}|E_k\rangle = E_k$$

Σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα της σελίδας 20 δεν εμπλέκει συντελεστές με διαφορετικούς δείκτες (είναι διαγώνιο !) και επιλύεται άμεσα με λύσεις

$$c_k(t) = e^{-iE_k t/\hbar}\,c_k(0)$$

Η λύση αυτή ισχύει μόνο για την ανάλυση σε ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας !

" Two - state systems "

Υπάρχουν κβαντικά συστήματα τα οποία έχουν δύο ενεργειακές καταστάσεις αλλα οι καταστάσεις που τα περιγράφουν δεν είναι καμμία από αυτές τις καταστάσεις αλλα ανάμειξη αυτών

Μεταξύ αυτών των συστημάτων είναι :

- ✓ **Σωματίδια με σπιν που έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, όπως το ηλεκτρόνιο, πρωτόνιο κ.α. , ευρισκόμενα σε μαγνητικό πεδίο με δεδομένο προσανατολισμό σπιν που δεν είναι αυτός της κατεύθυνσης του μαγνητικού πεδίου**
- ✓ **Τα μεσόνια K_0 , $\bar{K}_0$ τα οποία ως κβαντικές καταστάσεις είναι αναμείξεις άλλων βαθμών ελευθερίας, των σωματιδίων K_L , K_S**
- ✓ **Τα νετρίνα τα οποία ως βαθμοί ελευθερίας που παράγονται σε ασθενείς διασπάσεις άλλων σωματιδίων είναι υπέρθεση άλλων καταστάσεων δεδομένης μάζας**
- ✓ **...**

ΕΡΩΤΗΜΑ : Οι καταστάσεις $|1\rangle$, $|2\rangle$ είναι ορθοκανονικές ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας κάποιου συστήματος με ιδιοτιμές E_1 , E_2 αντίστοιχα. Οι καταστάσεις $|A\rangle$, $|B\rangle$ είναι επίσης ορθοκανονικές και γραμμικοί συνδυασμοί των $|1\rangle$, $|2\rangle$ που δίνονται ως

$$|A\rangle = \cos\theta\,|1\rangle + \sin\theta\,|2\rangle \quad , \quad |B\rangle = -\sin\theta\,|1\rangle + \cos\theta\,|2\rangle$$

όπου θ δεδομένη γωνία. Την μηδενική χρονική στιγμή στο εργαστήριο παράγεται μία κατάσταση $|A\rangle$. Ποιά η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $|B\rangle$ την στιγμή t ;

" Two - state systems "

Υπάρχουν κβαντικά συστήματα τα οποία έχουν δύο ενεργειακές καταστάσεις αλλα οι καταστάσεις που τα περιγράφουν δεν είναι καμμία από αυτές τις καταστάσεις αλλα ανάμειξη αυτών

Μεταξύ αυτών των συστημάτων είναι :

- ✓ **Σωματίδια με σπιν που έχει δύο βαθμούς ελευθερίας, όπως το ηλεκτρόνιο, πρωτόνιο κ.α. , ευρισκόμενα σε μαγνητικό πεδίο με δεδομένο προσανατολισμό σπιν που δεν είναι αυτός της κατεύθυνσης του μαγνητικού πεδίου**
- ✓ **Τα μεσόνια K_0 , $\bar{K}_0$ τα οποία ως κβαντικές καταστάσεις είναι αναμείξεις άλλων βαθμών ελευθερίας, των σωματιδίων K_L , K_S**
- ✓ **Τα νετρίνα τα οποία ως βαθμοί ελευθερίας που παράγονται σε ασθενείς διασπάσεις άλλων σωματιδίων είναι υπέρθεση άλλων καταστάσεων δεδομένης μάζας**
- ✓ **...**

ΕΡΩΤΗΜΑ : Οι καταστάσεις $|1\rangle$, $|2\rangle$ είναι ορθοκανονικές ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας κάποιου συστήματος με ιδιοτιμές E_1 , E_2 αντίστοιχα. Οι καταστάσεις $|A\rangle$, $|B\rangle$ είναι επίσης ορθοκανονικές και γραμμικοί συνδυασμοί των $|1\rangle$, $|2\rangle$ που δίνονται ως

$$|A\rangle = \cos\theta\,|1\rangle + \sin\theta\,|2\rangle \quad , \quad |B\rangle = -\sin\theta\,|1\rangle + \cos\theta\,|2\rangle$$

όπου θ δεδομένη γωνία. Την μηδενική χρονική στιγμή στο εργαστήριο παράγεται μία κατάσταση $|A\rangle$. Ποιά η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $|B\rangle$ την στιγμή t ;

Η κατάσταση $|\Psi(t)\rangle$ εξελίσσεται χρονικά σύμφωνα με την εξ. **Schrödinger** και μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση των $|1\rangle$ και $|2\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t)\,|1\rangle + c_2(t)\,|2\rangle$$

Επειδή οι $|1,2\rangle$ είναι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας οι συντελεστές c_1, c_2 εξελίσσονται ως

$$c_1(t) = c_1(0)\,e^{-iE_1 t/\hbar} \quad , \quad c_2(t) = c_2(0)\,e^{-iE_2 t/\hbar}$$

Την μηδενική χρονική στιγμή $|\Psi(0)\rangle = |A\rangle$ οπότε $c_1(0) = \cos\theta$ και $c_2(0) = \sin\theta$ και η κατάσταση γράφεται ως

$$|\Psi(t)\rangle = c\,e^{-iE_1 t/\hbar}\,|1\rangle + s\,e^{-iE_2 t/\hbar}\,|2\rangle$$

η οποία αν εκφρασθεί συναρτήσει των $|A, B\rangle$ είναι

$$|\Psi(t)\rangle = (c^2 e^{-iE_1 t/\hbar} + s^2 e^{-iE_2 t/\hbar})\,|A\rangle + cs(-e^{-iE_1 t/\hbar} + e^{-iE_2 t/\hbar})\,|B\rangle$$

Η κατάσταση $|\Psi(t)\rangle$ εξελίσσεται χρονικά σύμφωνα με την εξ. **Schrödinger** και μπορεί να γραφεί ως υπέρθεση των $|1\rangle$ και $|2\rangle$

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t)\,|1\rangle + c_2(t)\,|2\rangle$$

Επειδή οι $|1,2\rangle$ είναι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας οι συντελεστές c_1, c_2 εξελίσσονται ως

$$c_1(t) = c_1(0)\,e^{-iE_1 t/\hbar} \quad , \quad c_2(t) = c_2(0)\,e^{-iE_2 t/\hbar}$$

Την μηδενική χρονική στιγμή $|\Psi(0)\rangle = |A\rangle$ οπότε $c_1(0) = \cos\theta$ και $c_2(0) = \sin\theta$ και η κατάσταση γράφεται ως

$$|\Psi(t)\rangle = c\,e^{-iE_1 t/\hbar}\,|1\rangle + s\,e^{-iE_2 t/\hbar}\,|2\rangle$$

η οποία αν εκφρασθεί συναρτήσει των $|A, B\rangle$ είναι

$$|\Psi(t)\rangle = \left(c^2\,e^{-iE_1 t/\hbar} + s^2\,e^{-iE_2 t/\hbar}\right)|A\rangle + cs\left(-e^{-iE_1 t/\hbar} + e^{-iE_2 t/\hbar}\right)|B\rangle$$

Το πλάτος μετάβασης στην κατάσταση $|B\rangle$ είναι

$$\langle B|\Psi(t)\rangle = cs(-e^{-iE_1t/\hbar} + e^{-iE_2t/\hbar})$$

και η πιθανότητα $P(A \to B)$ για την μετάβαση ("ταλάντωση") στην κατάσταση $|B\rangle$

$$P(A \to B) = |\langle B|\Psi(t)\rangle|^2 = \sin^2(2\theta)\ \sin^2\frac{(E_1 - E_2)t}{2\hbar}$$

Η πιθανότητα $P(A \to B)$ είναι μικρότερη από την μονάδα όταν $|\sin 2\theta| < 1$. Αν η γωνία θ είναι τέτοια ώστε $|\sin 2\theta| = 1$ τότε υπάρχουν χρονικές στιγμές για τις οποίες η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα στην κατάσταση $|B\rangle$ είναι μονάδα !

Τα συμπεράσματα αυτά είναι άμεσα εφαρμόσιμα στις ταλαντώσεις των νετρίνων $\Longrightarrow$

Ταλαντώσεις νετρίνων

Στην Φύση είναι γνωστές η ηλεκτρονική, $|\nu_e\rangle$, και μιονική κατάσταση, $|\nu_\mu\rangle$, νετρίνων που παράγονται σε συγκεκριμένες **Ασθενείς διαδικασίες** . Οι καταστάσεις αυτές δεν ειναι μονοσωματιδιακές καταστάσεις συγκεκριμένης ενέργειας-μάζας. Οι ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτωνιανής συγκεκριμένης μάζας με ορμή p και ενέργεια $E_1 = \sqrt{c^2p^2 + m_1^2 c^4}$ και $E_2 = \sqrt{c^2p^2 + m_2^2 c^4}$ αντίστοιχα είναι $|\nu_1\rangle$ και $|\nu_2\rangle$. Οι μάζες m_1, m_2 των καταστάσεων $|\nu_{1,2}\rangle$ είναι πολύ μικρές σε σύγκριση με την ορμή p. Οι καταστάσεις $|\nu_e, \nu_\mu\rangle$ είναι υπερθέσεις των $|\nu_{1,2}\rangle$

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= c\,|\nu_1\rangle + s\,|\nu_2\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= -s\,|\nu_1\rangle + c\,|\nu_2\rangle \end{aligned}$$

με $c \equiv \cos\theta$ και $s \equiv \sin\theta$ και θ δεδομένη γωνία. Αν την χρονική στιγμή $t = 0$ παραχθεί μιά κατάσταση $|\nu_e\rangle$ ποιά η πιθανότητα την στιγμή $t > 0$ η κατάσταση αυτή να μεταβεί στην $|\nu_\mu\rangle$;

Το πλάτος μετάβασης στην μιονική κατάσταση είναι

$$\langle \nu_\mu | \Psi(t) \rangle = -s\,c\, e^{-i E_1 t/\hbar} + s\,c\, e^{-i E_2 t/\hbar}$$

και η πιθανότητα $P(\nu_e \to \nu_\mu)$ για την μετάβαση (¨ταλάντωση¨)

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = |\langle \nu_\mu | \Psi(t) \rangle|^2 = \sin^2(2\theta)\, \sin^2 \frac{(E_1 - E_2)\, t}{2\hbar}$$

Για πολύ μικρές μάζες $E_{1,2} = E + m_{1,2}^2 c^4 / 2E$ όπου $E \simeq p\,c$ και

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = \sin^2(2\theta)\, \sin^2 \frac{\pi\, r}{L}$$

- $r = c\,t$ Απόσταση που διανύθηκε σε χρόνο t από τα νετρίνα
- $L = 4 E \pi \hbar / c^3 \Delta m^2$ ορίζει το **Μήκος ταλάντωσης** όπου Δm^2 η διαφορά $|m_1^2 - m_2^2|$

Το πλάτος μετάβασης στην μιονική κατάσταση είναι

$$\langle \nu_\mu | \Psi(t) \rangle = -s\,c\,e^{-iE_1 t/\hbar} + s\,c\,e^{-iE_2 t/\hbar}$$

και η πιθανότητα $P(\nu_e \to \nu_\mu)$ για την μετάβαση ("ταλάντωση")

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = |\langle \nu_\mu | \Psi(t) \rangle|^2 = \sin^2(2\theta)\,\sin^2\frac{(E_1 - E_2)\,t}{2\,\hbar}$$

Για πολύ μικρές μάζες $E_{1,2} = E + m_{1,2}^2 c^4/2E$ όπου $E \simeq p\,c$ και

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = \sin^2(2\theta)\,\sin^2\frac{\pi\,r}{L}$$

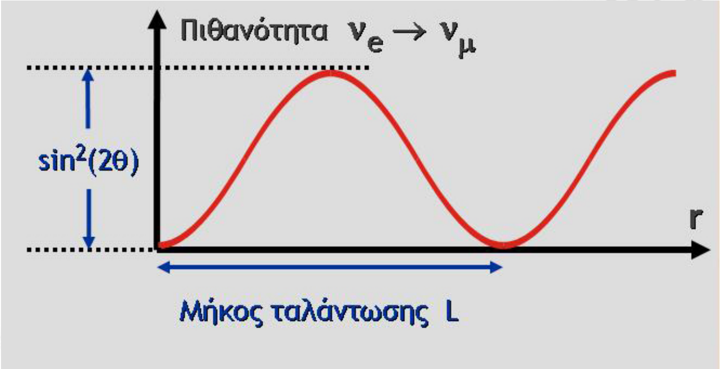
- ✓ $r = c\,t$ Απόσταση που διανύθηκε σε χρόνο t από τα νετρίνα
- ✓ $L = 4E\pi\,\hbar/c^3\Delta m^2$ ορίζει το **Μήκος ταλάντωσης** όπου Δm^2 η διαφορά $|m_1^2 - m_2^2|$

Το μήκος ταλάντωσης συνήθως γράφεται ως

$$L = \frac{2.48\,E}{\Delta m^2\,c^4}\ \textit{meters}$$

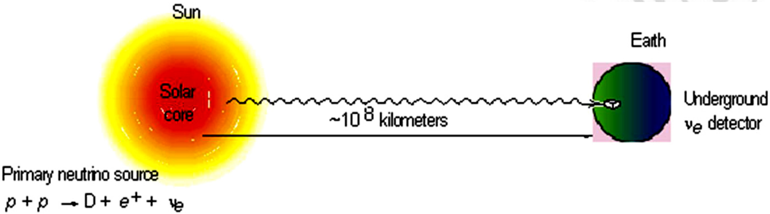
όπου η ενέργεια E δίνεται σε MeV και η διαφορά $\Delta\,m$ σε eV/c^2 . Για $E = 1\,MeV$ και $\Delta\,m = 1\,eV/c^2$ το μήκος ταλάντωσης είναι περίπου $L \simeq 2,5$ μέτρα. Για την ίδια ενέργεια και για $\Delta\,m = 10^{-2}\,eV/c^2$ είναι περίπου $L \simeq 25$ χιλιόμετρα !

Οι μάζες των νετρίνων είναι πολύ μικρές, της τάξης των eV, η και ακόμα μικρότερες, με τα αυστηρότερα άνω όρια να προέρχονται από αστροφυσικές παρατηρήσεις και κυρίως από το γεγονός ότι δεν μπορούν να ερμηνεύσουν την περίσσεια της Σκοτεινής Υλης του Σύμπαντος !


Πιθανότητα $\nu_e \to \nu_\mu$
$\sin^2(2\theta)$
r
Μήκος ταλάντωσης L

Bruno Pontecorvo
(1913 - 1993)
Invented nu oscillations

Ηλιακά νετρίνα - Μόνο το 1/3 φθάνει στη Γή !



BRA c KET

- Ο χώρος $\mathcal{H}$ των φυσικών καταστάσεων είναι ο χώρος των ket που τα συμβολίζουμε με $|\,a\,\rangle$
- Μπορούμε να ορίσουμε έναν δυικό χώρο $\mathcal{H}^*$, τον λεγόμενο χώρο των bra, που θα τα συμβολίζουμε με $\langle\,a\,|$ αντιστοιχώντας σε κάθε ket ένα bra !

$$|a\rangle \in \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad \langle a| \in \mathcal{H}^*$$

Η αντιστοιχία ορίζεται έτσι ώστε για κάθε bra, $\langle\,b\,|$ και κάθε ket, $|\,a\,\rangle$ να αντιστοιχούμε έναν μιγαδικό αριθμό που είναι το εσωτερικό γινόμενο του $|\,b\,\rangle$ με το $|\,a\,\rangle$ δηλαδή

$$\langle b| \in \mathcal{H}^* \quad \kappa\alpha\iota \quad |a\rangle \in \mathcal{H} \quad \Longrightarrow \quad \langle b|a\rangle$$

- Παρατηρήστε ότι το εσωτερικό γινόμενο $\langle\,b\,|\,a\,\rangle$ μπορεί να το πάρει κανείς βάζοντας το $\langle\,b\,|$ δίπλα στο $|\,a\,\rangle$ πλάτη με πλάτη που αποδεικνύεται ένα εξαιρετικά εύχρηστο εργαλείο !

BRA c KET

- Ο χώρος $\mathcal{H}$ των φυσικών καταστάσεων είναι ο χώρος των ket που τα συμβολίζουμε με $|\,a\,\rangle$
- Μπορούμε να ορίσουμε έναν δυικό χώρο $\mathcal{H}^*$, τον λεγόμενο χώρο των bra, που θα τα συμβολίζουμε με $\langle\,a\,|$ αντιστοιχώντας σε κάθε ket ένα bra !

$$|a\rangle \in \mathcal{H} \iff \langle a| \in \mathcal{H}^*$$

Η αντιστοιχία ορίζεται έτσι ώστε για κάθε bra, $\langle\,b\,|$ και κάθε ket, $|\,a\,\rangle$ να αντιστοιχούμε έναν μιγαδικό αριθμό που είναι το εσωτερικό γινόμενο του $|\,b\,\rangle$ με το $|\,a\,\rangle$ δηλαδή

$$\langle b| \in \mathcal{H}^* \quad \kappa\alpha\iota \quad |a\rangle \in \mathcal{H} \implies \langle b|a\rangle$$

- Παρατηρήστε ότι το εσωτερικό γινόμενο $\langle\,b\,|\,a\,\rangle$ μπορεί να το πάρει κανείς βάζοντας το $\langle\,b\,|$ δίπλα στο $|\,a\,\rangle$ πλάτη με πλάτη που αποδεικνύεται ένα εξαιρετικά εύχρηστο εργαλείο !

Με βάση τα προηγούμενα πολύ εύκολα μπορούν να δειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες

$$|\Phi\rangle = \lambda_1 |\Phi_1\rangle + \lambda_2 |\Phi_2\rangle \iff \langle\Phi| = \lambda_1^* \langle\Phi_1| + \lambda_2^* \langle\Phi_2|$$

$$|\Phi\rangle = \hat{A}|\chi\rangle \iff \langle\Phi| = \langle\chi|\hat{A}^\dagger$$

- Είναι σύνηθες στην Κβαντική Μηχανική να συναντάμε τελεστές με την ακόλουθη μορφή

$$\hat{Q} \equiv |a\rangle\langle b|$$

Η δράση αυτού του τελεστή σε κάποιο ket $|\psi\rangle$ είναι εξ ορισμού

$$\hat{Q}|\psi\rangle \equiv |a\rangle\langle b|\psi\rangle$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει βάζοντας το ket $|\psi\rangle$ στα δεξιά του $\hat{Q} \equiv |a\rangle\langle b|$!
Βάζοντας ένα bra $\langle\phi|$ στα αριστερά του $\hat{Q}$ προκύπτει το bra $\langle\phi|\hat{Q} \equiv \langle\phi|a\rangle\langle b|$.
Ετσι ορίζεται η δράση του $\hat{Q}$ στον χώρο των bra !

- Ο συζυγής του $\hat{Q}$ που ορίσθηκε προηγουμένως εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι

$$\hat{Q}^\dagger = |b\rangle\langle a|$$

- Είναι προφανές ότι μπορούμε να ορίσουμε και αθροίσματα τέτοιων τελεστών όπως για παράδειγμα

$$\hat{R} \equiv c_1 |a_1\rangle\langle b_1| + c_2 |a_2\rangle\langle b_2| + \cdots$$

του οποίου βέβαια ο συζυγής είναι

$$\hat{R}^\dagger = c_1^* |b_1\rangle\langle a_1| + c_2^* |b_2\rangle\langle a_2| + \cdots$$

Αν θέλουμε να βρούμε γινόμενα τέτοιων τελεστών δεν έχουμε παρά να τους βάλουμε στην σειρά και μετά να βάλουμε πλάτη με πλάτη τα bra με τα ket . Για παράδειγμα αν έχουμε τους τελεστές $\hat{Q} = |a\rangle\langle b|$ και $\hat{S} = |A\rangle\langle B|$ τότε

$$\hat{S}\hat{Q} = |A\rangle\langle B|a\rangle\langle b| \quad = c\,|A\rangle\langle b|$$

όπου στην τελευταία ισότητα απλά συμβολίσαμε με $c = \langle B|a\rangle$.

- Μιά ειδική κατηγορία τέτοιων τελεστών είναι

$$\hat{P} = |a\rangle\langle a| \quad \mu\epsilon \quad \langle a|a\rangle = 1$$

Αυτοί οι τελεστές έχουν την ιδιότητα

$$\hat{P}^2 = \hat{P} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \hat{P}^\dagger = \hat{P}$$

Τελεστές με αυτές τις ιδιότητες ονομάζονται γενικά προβολικοί.

- Μπορούμε να έχουμε και αθροίσματα τέτοιων τελεστών

$$\hat{P} = \sum_j |a_j\rangle\langle a_j| \quad \mu\epsilon \quad \langle a_k|a_m\rangle = \delta_{km}$$

που είναι επίσης προβολικοί !

Στην περίπτωση που το σύνολο των $|a_j\rangle$ είναι επιπρόσθετα και **πλήρες** ο τελεστές $\hat{P}$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής $\hat{1}$, οπότε

$$\hat{1} = \sum_j |a_j\rangle\langle a_j| \qquad \textit{ιδιοτητα πληροτητας}$$

Για να δειχθεί αυτό : Η δράση του δεξιού μέλους σε ένα τυχαίο $|\Psi\rangle$ δίνει

$$\sum_j |a_j\rangle\langle a_j|\Psi\rangle$$

που είναι ακριβώς το ίδιο το $|\Psi\rangle$ όταν αυτό αναπτυχθεί ως προς την βάση $|a_j\rangle$ (δες τις σχετικές εκφράσεις στην σελίδα 13). Επειδή αυτό ισχύει για το οποιοδήποτε $|\Psi\rangle$ ο τελεστής αυτός είναι ο ταυτοτικός που η δράση του σε κάθε άνυσμα του χώρου δίνει το ίδιο το άνυσμα !

Είναι προφανές ότι η ιδιότητα της πληρότητας , όπως εκφράζεται πιο πάνω, ισχύει για τα ιδιοανύσματα ενός αυτοσυζυγούς και γραμμικού τελεστή όταν αυτά κανονικοποιηθούν κατάλληλα στην μονάδα.

Αναπαράσταση με πίνακες - Matrix Mechanics

- Σε οποιαδήποτε **πλήρη ορθοκανονική** βάση ανυσμάτων $|e_n\rangle$ κάθε ket μπορεί να αναπτυχθεί ως

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n \, |e_n\rangle$$

όπου οι συντελεστές $|e_n\rangle$ δίνονται από την $c_n = \langle e_n | \Psi \rangle$.

Αν $|\Psi(t)\rangle$ είναι φυσική κατάσταση τότε έχει χρονική εξάρτηση και οι συντελεστές $c_n(t)$ εξαρτώνται από τον χρόνο

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) \, |e_n\rangle$$

- Τα $|e_n\rangle$ μπορούν να είναι π.χ. τα κανονικοποιημένα στην μονάδα ιδιοανύσματα κάποιου **Ερμιτιανού** τελεστή !

- Το εσωτερικό γινόμενο δύο ket $|\Psi\rangle$, $|\Phi\rangle$ με συντελεστές c_n , d_n :

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \sum_n c_n^* d_n$$

- Η μέση τιμή φυσικού μεγέθους A με τελεστή $\hat{A}$ είναι :

$$\langle A \rangle = \sum_{n,m} c_n^* A_{nm} c_m$$

όπου τα στοιχεία A_{nm} ορίζονται ως $A_{nm} = \langle e_n | \hat{A} | e_m \rangle$

- Από την εξίσωση Schrödinger έχουμε :

$$i\hbar \frac{dc_k}{dt} = \sum_j H_{kj} c_j$$

όπου $H_{kj} \equiv \langle e_k | \hat{H} | e_j \rangle$

- Το εσωτερικό γινόμενο δύο ket $|\Psi\rangle$, $|\Phi\rangle$ με συντελεστές c_n , d_n :

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \sum_n c_n^* d_n$$

- Η μέση τιμή φυσικού μεγέθους A με τελεστή $\hat{A}$ είναι :

$$\langle A \rangle = \sum_{n,m} c_n^* A_{nm} c_m$$

όπου τα στοιχεία A_{nm} ορίζονται ως $A_{nm} = \langle e_n | \hat{A} | e_m \rangle$

- Από την εξίσωση Schrödinger έχουμε :

$$i\hbar \frac{dc_k}{dt} = \sum_j H_{kj} c_j$$

όπου $H_{kj} \equiv \langle e_k | \hat{H} | e_j \rangle$

- **Το εσωτερικό γινόμενο δύο ket $|\Psi\rangle$, $|\Phi\rangle$ με συντελεστές c_n , d_n :**

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \sum_n c_n^* d_n$$

- **Η μέση τιμή φυσικού μεγέθους A με τελεστή $\hat{A}$ είναι :**

$$\langle A \rangle = \sum_{n,m} c_n^* A_{nm} c_m$$

όπου τα στοιχεία A_{nm} ορίζονται ως $A_{nm} = \langle e_n | \hat{A} | e_m \rangle$

- **Από την εξίσωση Schrödinger έχουμε :**

$$i\hbar \frac{d c_k}{d t} = \sum_j H_{kj} c_j$$

όπου $H_{kj} \equiv \langle e_k | \hat{H} | e_j \rangle$

Με βαση αυτά μπορούμε να αναπαραστήσουμε :

- Τα ket και τα bra

Κάθε ket με μονόστηλο πίνακα:

$$|\Psi\rangle \Longrightarrow \mathbb{C} \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \dots \\ c_N \end{pmatrix}$$

Το αντίστοιχο bra με τον πίνακα:

$$\langle\Psi| \Longrightarrow \mathbb{C}^{\dagger} \equiv (\, c_1^* \,,\, c_2^* \,,\, \cdots c_N^* \,)$$

- Οποιονδήποτε τελεστή με $N \times N$ πίνακα:

$$\hat{A} \Longrightarrow \mathbb{A} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & \dots & \dots & A_{NN} \end{pmatrix}$$

Με βαση αυτά μπορούμε να αναπαραστήσουμε :

- **Τα ket και τα bra**

Κάθε ket με μονόστηλο πίνακα:

$$|\,\Psi\,\rangle \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{C} \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdots \\ c_N \end{pmatrix}$$

Το αντίστοιχο bra με τον πίνακα:

$$\langle\,\Psi\,| \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{C}^{\dagger} \equiv \left(\, c_1^* \,,\; c_2^* \,,\; \cdots c_N^* \,\right)$$

- **Οποιονδήποτε τελεστή με $N \times N$ πίνακα:**

$$\hat{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{A} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{N1} & \cdots & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix}$$

Με βαση αυτά μπορούμε να αναπαραστήσουμε :

- **Τα ket και τα bra**

Κάθε ket με μονόστηλο πίνακα:

$$|\Psi\rangle \implies \mathbb{c} \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \ldots \\ c_N \end{pmatrix}$$

Το αντίστοιχο bra με τον πίνακα:

$$\langle\Psi| \implies \mathbb{c}^\dagger \equiv (\, c_1^*\,,\; c_2^*\,,\; \cdots c_N^*\,)$$

- **Οποιονδήποτε τελεστή με $N \times N$ πίνακα:**

$$\hat{A} \implies \mathbb{A} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{N1} & \ldots & \ldots & A_{NN} \end{pmatrix}$$

Με βαση αυτά μπορούμε να αναπαραστήσουμε :

Τα ket και τα bra

Κάθε ket με μονόστηλο πίνακα:

$$|\Psi\rangle \Longrightarrow \mathbb{c} \equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdots \\ c_N \end{pmatrix}$$

Το αντίστοιχο bra με τον πίνακα:

$$\langle\Psi| \Longrightarrow \mathbb{c}^\dagger \equiv (\, c_1^*\,,\, c_2^*\,,\, \cdots c_N^* \,)$$

Οποιονδήποτε τελεστή με $N \times N$ πίνακα:

$$\hat{A} \Longrightarrow \mathbb{A} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{N1} & \cdots & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix}$$

- **Εσωτερικό γινόμενο :**

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \mathbb{c}^\dagger \, \mathbb{d}$$

- **Μέση τιμή :**

$$\langle A \rangle = \mathbb{c}^\dagger \, \mathbb{A} \, \mathbb{c}$$

- **Εξίσωση Schrödinger :**

$$\imath \, \hbar \, \frac{d \, \mathbb{c}}{d \, t} = \mathbb{H} \, \mathbb{c}$$

Εσωτερικό γινόμενο :

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \mathbb{c}^{\dagger} \, \mathbb{d}$$

Μέση τιμή :

$$\langle A \rangle = \mathbb{c}^{\dagger} \, \mathbb{A} \, \mathbb{c}$$

Εξίσωση Schrödinger :

$$\imath \hbar \frac{d \, \mathbb{c}}{d t} = \mathbb{H} \, \mathbb{c}$$

Εσωτερικό γινόμενο :

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \mathbf{c}^{\dagger}\, \mathbf{d}$$

Μέση τιμή :

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{c}^{\dagger}\, \mathbf{A}\, \mathbf{c}$$

Εξίσωση Schrödinger :

$$\imath\, \hbar\, \frac{d\, \mathbf{c}}{d\, t} = \mathbb{H}\, \mathbf{c}$$

Εσωτερικό γινόμενο :

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \mathbb{c}^{\dagger} \mathbb{d}$$

Μέση τιμή :

$$\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{c}^{\dagger} \mathbb{A} \mathbb{c}$$

Εξίσωση Schrödinger :

$$\iota \hbar \frac{d \mathbb{c}}{d t} = \mathbb{H} \mathbb{c}$$

- Οι αυτοσυζυγείς τελεστές στην αναπαράσταση πινάκων είναι αυτοσυζυγείς πίνακες. Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία πίνακα είναι τέτοια ώστε

$$A_{kj} = A^{*}_{jk}$$

Τα φυσικά μεγέθη αντιπροσωπεύονται από αυτοσυζυγείς τελεστές και επομένως τα στοιχεία πίνακα έχουν πράγματι αυτήν την ιδιότητα.

- Στην αναπαράσταση πινάκων οι ιδιοτιμές λ κάποιου τελεστή $\hat{A}$ προκύπτουν ως οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου

$$det\,(\,\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{1}\,) = 0$$

Μετά την εύρεση των ιδιοτιμών μπορούμε στην αναπαράσταση αυτή να βρούμε και τα αντίστοιχα ιδιανύσματα

Η **αναπαράσταση** των καταστάσεων και των τελεστών από πίνακες είναι από τα σημαντικά θέματα της Κβαντικής Μηχανικής. Η γλώσσα της Κυματικής Μηχανικής μέσω της εξίσωσης Schrödinger δεν είναι παρά η λεγομένη **αναπαράσταση θέσης** όπου η βάση των $|e_n\rangle$ έχει επιλεγεί να είναι τα (συνεχή) ιδιοανύσματα του τελεστή της θέσης $|x\rangle$. Σε αυτήν τη περίπτωση η κατάσταση $|\Psi(t)\rangle$ αναλύεται σε αυτά τα ιδιοανύσματα και οι συντελεστές $c_n = \langle e_n | \Psi(t) \rangle$ γίνονται $\langle x | \Psi(t) \rangle$ που είναι το πλάτος πιθανότητας το σύστημα να βρεθεί στην θέση x άρα είναι η **κυματική συνάρτηση !** (Δες και σελίδες 17 - 18)

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1

Η έκδοση 1.0 είναι διαθέσιμη εδώ.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών. Αθανάσιος Λαχανάς. «Κβαντική Μηχανική ΙΙ. Ενότητα 1: Γενική διατύπωση της Κβαντικής Μηχανικής». Έκδοση: 1.1. Αθήνα 2016. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/PHYS9/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.