



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Κβαντική Μηχανική II

Ενότητα 3: Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

Αθανάσιος Λαχανάς

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Περιεχόμενα 3ης ενότητας

Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

Οι εξισώσεις κίνησης και τα δυναμικά

Κίνηση σε σταθερό μαγνητικό πεδίο

└ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

└ Οι εξισώσεις κίνησης και τα δυναμικά

Δυναμικά και Λαγκρανζιανή του συστήματος

Σωματίδιο με μάζα m και φορτίο e εντός Η/Μ πεδίου υφίσταται δύναμη

- Σύστημα μονάδων Gauss

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = m \frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{u} \times \vec{B}$$

Λαγκρανζιανή από την οποία προέρχεται αυτή είναι - (σύστημα μονάδων Gauss)

$$L = \frac{m\vec{u}^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c} \vec{u} \cdot \vec{A}$$

Η Λαγκρανζιανή εκφράζεται με το βαθμωτό Φ και το ανυσματικό \vec{A} δυναμικό

$$\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

που ικανοποιούν τις δύο (από τις τέσσερεις) εξισώσεις Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Faraday})$$

- Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

- Οι εξισώσεις κίνησης και τα δυναμικά

Δυναμικά και Λαγκρανζιανή του συστήματος

Σωματίδιο με μάζα m και φορτίο e εντός H/M πεδίου υφίσταται δύναμη
 - Σύστημα μονάδων Gauss

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = m \frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{u} \times \vec{B}$$

Λαγκρανζιανή από την οποία προέρχεται αυτή είναι - (σύστημα μονάδων Gauss)

$$L = \frac{m\vec{u}^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c} \vec{u} \cdot \vec{A}$$

Η Λαγκρανζιανή εκφράζεται με το βαθμωτό Φ και το ανυσματικό \vec{A} δυναμικό

$$\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

που ικανοποιούν τις δύο (από τις τέσσερεις) εξισώσεις Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Faraday})$$

- Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

- Οι εξισώσεις κίνησης και τα δυναμικά

Δυναμικά και Λαγκρανζιανή του συστήματος

Σωματίδιο με μάζα m και φορτίο e εντός Η/Μ πεδίου υφίσταται δύναμη
 - Σύστημα μονάδων Gauss

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = m \frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{u} \times \vec{B}$$

Λαγκρανζιανή από την οποία προέρχεται αυτή είναι - (σύστημα μονάδων Gauss)

$$L = \frac{m\vec{u}^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c} \vec{u} \cdot \vec{A}$$

Η Λαγκρανζιανή εκφράζεται με το βαθμωτό Φ και το ανυσματικό \vec{A} δυναμικό

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

που ικανοποιούν τις δύο (από τις τέσσερεις) εξισώσεις Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Faraday})$$

└ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

└ Οι εξισώσεις κίνησης και τα δυναμικά

Δυναμικά και Λαγκρανζιανή του συστήματος

Σωματίδιο με μάζα m και φορτίο e εντός Η/Μ πεδίου υφίσταται δύναμη
- Σύστημα μονάδων Gauss

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = m \frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{u} \times \vec{B}$$

Λαγκρανζιανή από την οποία προέρχεται αυτή είναι - (σύστημα μονάδων Gauss)

$$L = \frac{m\vec{u}^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c} \vec{u} \cdot \vec{A}$$

Η Λαγκρανζιανή εκφράζεται με το βαθμωτό Φ και το ανυσματικό \vec{A} δυναμικό

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

που ικανοποιούν τις δύο (από τις τέσσερις) εξισώσεις Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Faraday})$$

└ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

└ Οι εξισώσεις κίνησης και τα δυναμικά

Μετασχηματισμοί βαθμίδας, Χαμιλτωνιανή του συστήματος

Τα δυναμικά δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα !

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad , \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Μετασχηματισμοί βαθμίδας (gauge)

- ▶ Η κλασική Χαμιλτωνιανή του συστήματος είναι

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi$$

- ▶ Η κανονική ορμή \vec{p} συνδέεται με την μηχανική ορμή $\vec{\pi} = m\vec{u}$ μέσω της

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$$

Η Κβαντική Χαμιλτωνιανή προέρχεται από την H με την αντικατάσταση

$$x, y, z \implies \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \quad p_x, p_y, p_z \implies \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$$

└ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

└ Οι εξισώσεις κίνησης και τα δυναμικά

Μετασχηματισμοί βαθμίδας, Χαμιλτωνιανή του συστήματος

Τα δυναμικά δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα !

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Μετασχηματισμοί βαθμίδας (gauge)

- ▶ Η κλασική Χαμιλτωνιανή του συστήματος είναι

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi$$

- ▶ Η κανονική ορμή \vec{p} συνδέεται με την μηχανική ορμή $\vec{\pi} = m\vec{u}$ μέσω της

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$$

Η Κβαντική Χαμιλτωνιανή προέρχεται από την H με την αντικατάσταση

$$x, y, z \implies \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \quad p_x, p_y, p_z \implies \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$$

└ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

└ Οι εξισώσεις κίνησης και τα δυναμικά

Μετασχηματισμοί βαθμίδας, Χαμιλτωνιανή του συστήματος

Τα δυναμικά δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα !

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Μετασχηματισμοί βαθμίδας (gauge)

- ▶ Η κλασική Χαμιλτωνιανή του συστήματος είναι

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi$$

- ▶ Η κανονική ορμή \vec{p} συνδέεται με την μηχανική ορμή $\vec{\pi} = m\vec{u}$ μέσω της

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$$

Η Κβαντική Χαμιλτωνιανή προέρχεται από την H με την αντικατάσταση

$$x, y, z \Rightarrow \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \quad p_x, p_y, p_z \Rightarrow \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$$

└ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

└ Οι εξισώσεις κίνησης και τα δυναμικά

Μετασχηματισμοί βαθμίδας, Χαμιλτωνιανή του συστήματος

Τα δυναμικά δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα !

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad , \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Μετασχηματισμοί βαθμίδας (gauge)

- ▶ Η κλασική Χαμιλτωνιανή του συστήματος είναι

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi$$

- ▶ Η κανονική ορμή \vec{p} συνδέεται με την μηχανική ορμή $\vec{\pi} = m\vec{u}$ μέσω της

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$$

- ▶ Η Κβαντική Χαμιλτωνιανή προέρχεται από την H με την αντικατάσταση

$$x, y, z \implies \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \quad p_x, p_y, p_z \implies \hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$$

└ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

└ Οι εξισώσεις κίνησης και τα δυναμικά

Η Κβαντική Χαμιλτωνιανή

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}} \right)^2 + e\hat{\Phi}$$

- ▶ $\hat{\mathbf{p}}$ οι συνιστώσες του τελεστή της ορμής

$$\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$$

- ▶ $\hat{\mathbf{A}}$ οι συνιστώσες του τελεστή του ανυσματικού πεδίου

$$\hat{\mathbf{A}} = (\hat{A}_x, \hat{A}_y, \hat{A}_z)$$

Προκύπτουν από τις συνιστώσες A_x, A_y, A_z όταν οι θέσεις x, y, z γίνουν τελεστές.

- ▶ $\hat{\Phi}$ ο τελεστής του βαθμωτού πεδίου

$$\hat{\Phi} = \Phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

- Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

- Οι εξισώσεις κίνησης και τα δυναμικά

Η Κβαντική Χαμιλτωνιανή

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}} \right)^2 + e\hat{\Phi}$$

- ▶ $\hat{\mathbf{p}}$ οι συνιστώσες του τελεστή της ορμής

$$\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z)$$

- ▶ $\hat{\mathbf{A}}$ οι συνιστώσες του τελεστή του ανυσματικού πεδίου

$$\hat{\mathbf{A}} = (\hat{A}_x, \hat{A}_y, \hat{A}_z)$$

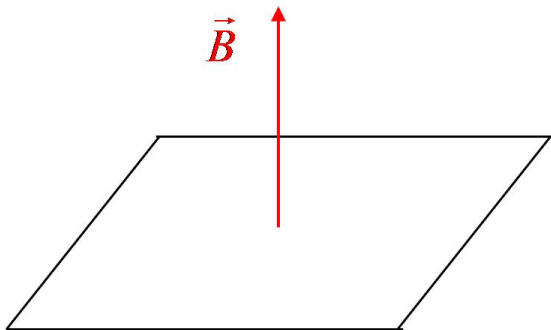
Προκύπτουν από τις συνιστώσες A_x, A_y, A_z όταν οι θέσεις x, y, z γίνουν τελεστές.

- ▶ $\hat{\Phi}$ ο τελεστής του βαθμωτού πεδίου

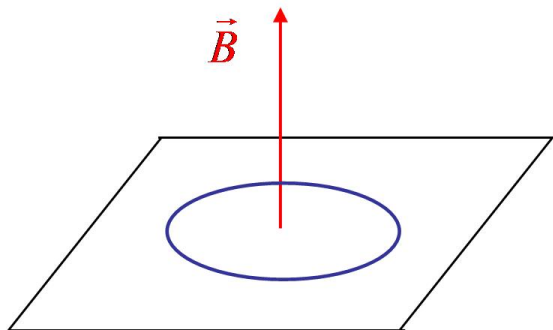
$$\hat{\Phi} = \Phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

- └ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο
- └ Κίνηση σε σταθερό μαγνητικό πεδίο

Κίνηση σε επίπεδο - Ένας ασυνήθιστος ταλαντωτής !



- └ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο
- └ Κίνηση σε σταθερό μαγνητικό πεδίο



$$\omega_B = \frac{eB}{mc}$$

cyclotron frequency

└ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

└ Κίνηση σε σταθερό μαγνητικό πεδίο

$$i \hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

- └ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο
 - └ Κίνηση σε σταθερό μαγνητικό πεδίο

- Για σταθερό μαγνητικό πεδίο μια επιλογή του ανυσματικού δυναμικού είναι

$$\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{x}) \implies \text{σταν } \vec{B} = \hat{z}B, \quad \vec{A} = \left(-\frac{yB}{2}, \frac{xB}{2}, 0 \right)$$

- Σε αυτήν την βαθμίδα

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

- Με την παρουσία μόνο του \vec{B} το βαθμωτό δυναμικό μπορεί να επιλεγεί μηδέν.

Η Χαμιλτωνιανή, στο επίπεδο x, y (κόβεται στο μαγνητικό πεδίο)

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_x + \frac{eB}{2c} \hat{y} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_y - \frac{eB}{2c} \hat{x} \right)^2$$

- └ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο
- └ Κίνηση σε σταθερό μαγνητικό πεδίο

- Για σταθερό μαγνητικό πεδίο μια επιλογή του ανυσματικού δυναμικού είναι

$$\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{x}) \implies \text{σταν } \vec{B} = \hat{z}B, \vec{A} = \left(-\frac{yB}{2}, \frac{xB}{2}, 0 \right)$$

- Σε αυτήν την βαθμίδα

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

- Με την παρουσία μόνο του \vec{B} το βαθμωτό δυναμικό μπορεί να επιλεγεί μηδέν.

Η Χαμιλτωνιανή, στο επίπεδο x, y (κάθετο στο μαγνητικό πεδίο)

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_x + \frac{eB}{2c} \hat{y} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_y - \frac{eB}{2c} \hat{x} \right)^2$$

- └ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο
- └ Κίνηση σε σταθερό μαγνητικό πεδίο

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2)$$

- ▶ $\hat{\pi}_x = m u_x$, $\hat{\pi}_y = m u_y$ οι μηχανικές ορμές στις κατευθύνσεις x, y

$$\hat{\pi}_x = \hat{p}_x + \frac{eB}{2c} \hat{y} \quad , \quad \hat{\pi}_y = \hat{p}_y - \frac{eB}{2c} \hat{x}$$

- ▶ Ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης

$$[\hat{\pi}_y, \hat{\pi}_x] = -i \left(\frac{eB\hbar}{c} \right)$$

- └ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο
- └ Κίνηση σε σταθερό μαγνητικό πεδίο

Οι αυτοσυζυγείς τελεστές \hat{P} , \hat{Q} που ορίζονται ως

$$\hat{\pi}_y = \sqrt{\frac{eB\hbar}{c}} \hat{P} \quad , \quad \hat{\pi}_x = \sqrt{\frac{eB\hbar}{c}} \hat{Q}$$

ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης $[\hat{P}, \hat{Q}] = -i$

Η Χαμιλτωνιανή είναι

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_B}{2} (\hat{P}^2 + \hat{Q}^2) \quad \text{οπου} \quad \omega_B = \frac{eB}{m c} \quad \text{cyclotron frequency !}$$

Το ενεργειακό φάσμα είναι επομένως

$$E_n = \hbar\omega_B \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{"σταθμες Landau"})$$

- └ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο
- └ Κίνηση σε σταθερό μαγνητικό πεδίο

Οι αυτοσυζυγείς τελεστές \hat{P} , \hat{Q} που ορίζονται ως

$$\hat{\pi}_y = \sqrt{\frac{eB\hbar}{c}} \hat{P} , \quad \hat{\pi}_x = \sqrt{\frac{eB\hbar}{c}} \hat{Q}$$

ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης $[\hat{P}, \hat{Q}] = -i$

Η Χαμιλτωνιανή είναι

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_B}{2} (\hat{P}^2 + \hat{Q}^2) \quad \text{οπου} \quad \omega_B = \frac{eB}{mc} \quad \text{cyclotron frequency !}$$

Το ενεργειακό φάσμα είναι επόμενως

$$E_n = \hbar\omega_B \left(n + \frac{1}{2} \right) , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{"σταθμες Landau"})$$

- └ Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο
- └ Κίνηση σε σταθερό μαγνητικό πεδίο

Οι αυτοσυζυγείς τελεστές \hat{P} , \hat{Q} που ορίζονται ως

$$\hat{\pi}_y = \sqrt{\frac{eB\hbar}{c}} \hat{P} \quad , \quad \hat{\pi}_x = \sqrt{\frac{eB\hbar}{c}} \hat{Q}$$

ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης $[\hat{P}, \hat{Q}] = -i$

Η Χαμιλτωνιανή είναι

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_B}{2} (\hat{P}^2 + \hat{Q}^2) \quad \text{οπου} \quad \omega_B = \frac{eB}{mc} \quad \text{cyclotron frequency !}$$

Το ενεργειακό φάσμα είναι επομένως

$$E_n = \hbar\omega_B \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{"σταθμες Landau"})$$

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1

Η έκδοση 1.0 είναι διαθέσιμη [εδώ](#).



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών. Αθανάσιος Λαχανάς. «Κβαντική Μηχανική II. Ενότητα 3: Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο». Έκδοση: 0.1. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/PHYS9/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

