ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Κβαντική Μηχανική ΙΙ

Ενότητα 3: Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

Αθανάσιος Λαχανάς
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Περιεχόμενα 3ης ενότητας

Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο

- **Οι εξισώσεις κίνησης και τα δυναμικά**
- **Κίνηση σε σταθερό μαγνητικό πεδίο**

Δυναμικά και Λαγκρανζιανή του συστήματος

Σωματίδιο με μάζα m και φορτίο e εντός Η/Μ πεδίου υφίσταται δύναμη - Σύστημα μονάδων Gauss

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = m\frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\,\vec{u}\times\vec{B}$$

Λαγκρανζιανή από την οποία προέρχεται αυτή είναι - (σύστημα μονάδων Gauss)

$$L = \frac{m\vec{u}^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c}\,\vec{u}\cdot\vec{A}$$

Η Λαγκρανζιανή εκφράζεται με το βαθμωτό Φ και το ανυσματικό $\vec{A}$ δυναμικό

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

που ικανοποιούν τις δύο (από τις τέσσερεις) εξισώσεις Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Faraday})$$

Δυναμικά και Λαγκρανζιανή του συστήματος

Σωματίδιο με μάζα m και φορτίο e εντός Η/Μ πεδίου υφίσταται δύναμη
- Σύστημα μονάδων Gauss

$$\vec{F}_{\mathrm{Lorentz}} = m\frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{u}\times\vec{B}$$

Λαγκρανζιανή από την οποία προέρχεται αυτή είναι - (σύστημα μονάδων Gauss)

$$L = \frac{m\vec{u}^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c}\vec{u}\cdot\vec{A}$$

Η Λαγκρανζιανή εκφράζεται με το βαθμωτό Φ και το ανυσματικό $\vec{A}$ δυναμικό

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

που ικανοποιούν τις δύο (από τις τέσσερεις) εξισώσεις Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\mathrm{Faraday})$$

Δυναμικά και Λαγκρανζιανή του συστήματος

Σωματίδιο με μάζα m και φορτίο e εντός Η/Μ πεδίου υφίσταται δύναμη
- Σύστημα μονάδων Gauss

$$\vec{F}_{\mathrm{Lorentz}} = m\frac{d\vec{u}}{dt} = e\,\vec{E} + \frac{e}{c}\,\vec{u}\times\vec{B}$$

Λαγκρανζιανή από την οποία προέρχεται αυτή είναι - (σύστημα μονάδων Gauss)

$$L = \frac{m\vec{u}^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c}\,\vec{u}\cdot\vec{A}$$

Η Λαγκρανζιανή εκφράζεται με το βαθμωτό Φ και το ανυσματικό $\vec{A}$ δυναμικό

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

που ικανοποιούν τις δύο (από τις τέσσερεις) εξισώσεις Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\mathrm{Faraday})$$

Δυναμικά και Λαγκρανζιανή του συστήματος

Σωματίδιο με μάζα m και φορτίο e εντός Η/Μ πεδίου υφίσταται δύναμη - Σύστημα μονάδων Gauss

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = m\frac{d\vec{u}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{u}\times\vec{B}$$

Λαγκρανζιανή από την οποία προέρχεται αυτή είναι - (σύστημα μονάδων Gauss)

$$L = \frac{m\vec{u}^2}{2} - e\Phi + \frac{e}{c}\vec{u}\cdot\vec{A}$$

Η Λαγκρανζιανή εκφράζεται με το βαθμωτό Φ και το ανυσματικό $\vec{A}$ δυναμικό

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

που ικανοποιούν τις δύο (από τις τέσσερεις) εξισώσεις Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Faraday})$$

Μετασχηματισμοί βαθμίδας, Χαμιλτωνιανή του συστήματος

Τα δυναμικά δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα !

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad , \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

$$Μετασχηματισμοι \quad βαθμιδας \quad (\text{gauge})$$

- Η κλασική Χαμιλτωνιανή του συστήματος είναι

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\Phi$$

- Η κανονική ορμή $\vec{p}$ συνδέεται με την μηχανική ορμή $\vec{\pi} = m\vec{u}$ μέσω της

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$$

- Η Κβαντική Χαμιλτωνιανή προέρχεται από την H με την αντικατάσταση

$$x\,, \quad y\,, \quad z \Longrightarrow \hat{x}\,, \quad \hat{y}\,, \quad \hat{z} \qquad p_x\,, \quad p_y\,, \quad p_z \Longrightarrow \hat{p}_x\,, \quad \hat{p}_y\,, \quad \hat{p}_z$$

Μετασχηματισμοί βαθμίδας, Χαμιλτωνιανή του συστήματος

Τα δυναμικά δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα !

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad , \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

$$\textit{Μετασχηματισμοι} \quad \textit{βαθμιδας} \ (\text{gauge})$$

- Η κλασική Χαμιλτωνιανή του συστήματος είναι

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\Phi$$

- Η κανονική ορμή $\vec{p}$ συνδέεται με την μηχανική ορμή $\vec{\pi} = m\vec{u}$ μέσω της

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$$

- Η Κβαντική Χαμιλτωνιανή προέρχεται από την H με την αντικατάσταση

$$x\,,\quad y\,,\quad z \Longrightarrow \hat{x}\,,\quad \hat{y}\,,\quad \hat{z} \qquad p_x\,,\quad p_y\,,\quad p_z \Longrightarrow \hat{p}_x\,,\quad \hat{p}_y\,,\quad \hat{p}_z$$

Μετασχηματισμοί βαθμίδας, Χαμιλτωνιανή του συστήματος

Τα δυναμικά δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα !

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad , \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

$$\textit{Μετασχηματισμοι} \quad \textit{βαθμιδας} \quad (\textbf{gauge})$$

- Η κλασική Χαμιλτωνιανή του συστήματος είναι

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\Phi$$

- Η κανονική ορμή $\vec{p}$ συνδέεται με την μηχανική ορμή $\vec{\pi} = m\vec{u}$ μέσω της

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$$

- Η Κβαντική Χαμιλτωνιανή προέρχεται από την H με την αντικατάσταση

$$x\,,\quad y\,,\quad z \Longrightarrow \hat{x}\,,\quad \hat{y}\,,\quad \hat{z} \qquad p_x\,,\quad p_y\,,\quad p_z \Longrightarrow \hat{p}_x\,,\quad \hat{p}_y\,,\quad \hat{p}_z$$

Μετασχηματισμοί βαθμίδας, Χαμιλτωνιανή του συστήματος

Τα δυναμικά δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα !

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad , \quad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

$$\mathit{M\epsilon\tau\alpha\sigma\chi\eta\mu\alpha\tau\iota\sigma\mu o\iota} \quad \mathit{\beta\alpha\theta\mu\iota\delta\alpha\varsigma} \ \ (\text{gauge})$$

- Η κλασική Χαμιλτωνιανή του συστήματος είναι

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\Phi$$

- Η κανονική ορμή $\vec{p}$ συνδέεται με την μηχανική ορμή $\vec{\pi} = m\vec{u}$ μέσω της

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$$

- Η Κβαντική Χαμιλτωνιανή προέρχεται από την H με την αντικατάσταση

$$x\,, \quad y\,, \quad z \Longrightarrow \hat{x}\,, \quad \hat{y}\,, \quad \hat{z} \qquad p_x\,, \quad p_y\,, \quad p_z \Longrightarrow \hat{p}_x\,, \quad \hat{p}_y\,, \quad \hat{p}_z$$

Η Κβαντική Χαμιλτωνιανή

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbb{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbb{A}}\right)^2 + e\hat{\Phi}$$

- $\hat{\mathbb{p}}$ οι συνιστώσες του τελεστή της ορμής

$$\hat{\mathbb{p}} = (\hat{p}_x, \quad \hat{p}_y, \quad \hat{p}_z)$$

- $\hat{\mathbb{A}}$ οι συνιστώσες του τελεστή του ανυσματικού πεδίου

$$\hat{\mathbb{A}} = (\hat{A}_x, \quad \hat{A}_y, \quad \hat{A}_z)$$

Προκύπτουν από τις συνιστωσες A_x, A_y, A_z όταν οι θέσεις x, y, z γίνουν τελεστές.

- $\hat{\Phi}$ ο τελεστής του βαθμωτού πεδίου

$$\hat{\Phi} = \Phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

Η Κβαντική Χαμιλτωνιανή

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbb{p}} - \frac{e}{c}\hat{\mathbb{A}}\right)^2 + e\hat{\Phi}$$

- $\hat{\mathbb{p}}$ οι συνιστώσες του τελεστή της ορμής

$$\hat{\mathbb{p}} = (\hat{p}_x\,, \quad \hat{p}_y\,, \quad \hat{p}_z)$$

- $\hat{\mathbb{A}}$ οι συνιστώσες του τελεστή του ανυσματικού πεδίου

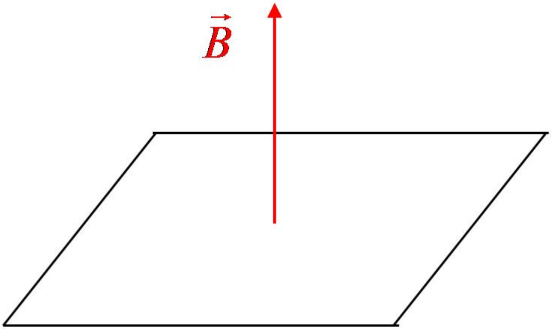
$$\hat{\mathbb{A}} = (\hat{A}_x\,, \quad \hat{A}_y\,, \quad \hat{A}_z)$$

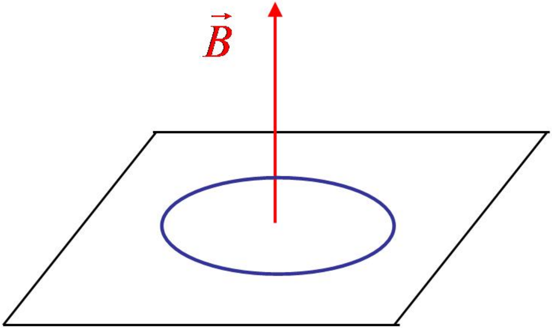
Προκύπτουν από τις συνιστωσες A_x, A_y, A_z όταν οι θέσεις x, y, z γίνουν τελεστές.

- $\hat{\Phi}$ ο τελεστής του βαθμωτού πεδίου

$$\hat{\Phi} = \Phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$$

Κίνηση σε επίπεδο - Ενας ασυνήθιστος ταλαντωτής !





$$\omega_B = \frac{e\,B}{m\,c}$$

cyclotron frequency

- Για σταθερό μαγνητικό πεδίο μια επιλογή του ανυσματικού δυναμικού είναι

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{x}) \implies \textit{οταν} \;\; \vec{B} = \hat{z} B \;\; , \;\; \vec{A} = \left(-\frac{yB}{2}, \frac{xB}{2}, 0\right)$$

- Σε αυτήν την βαθμίδα

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

- Με την παρουσία μονο του $\vec{B}$ το βαθμωτό δυναμικό μπορει να επιλεγεί μηδέν.

Η Χαμιλτωνιανή, στο επίπεδο x, y (κάθετο στο μαγνητικό πεδίο)

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x + \frac{eB}{2c}\hat{y}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_y - \frac{eB}{2c}\hat{x}\right)^2$$

- Για σταθερό μαγνητικό πεδίο μια επιλογή του ανυσματικού δυναμικού είναι

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B} \times \vec{x}) \implies \text{οταν} \quad \vec{B} = \hat{z}B \quad , \quad \vec{A} = \left(-\frac{yB}{2}, \frac{xB}{2}, 0\right)$$

- Σε αυτήν την βαθμίδα

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

- Με την παρουσία μονο του $\vec{B}$ το βαθμωτό δυναμικό μπορει να επιλεγεί μηδέν.

Η Χαμιλτωνιανή, στο επίπεδο x, y (κάθετο στο μαγνητικό πεδίο)

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x + \frac{eB}{2c}\hat{y}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_y - \frac{eB}{2c}\hat{x}\right)^2$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\pi}_x^{\,2} + \hat{\pi}_y^{2}\right)$$

- $\hat{\pi}_x = m\,u_x,\ \hat{\pi}_y = m\,u_y$ οι μηχανικές ορμές στις κατευθύνσεις x, y

$$\hat{\pi}_x = \hat{p}_x + \frac{eB}{2c}\,\hat{y} \quad , \quad \hat{\pi}_y = \hat{p}_y - \frac{eB}{2c}\,\hat{x}$$

- ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσεις

$$[\,\hat{\pi}_y\,,\,\hat{\pi}_x\,] = -\iota\left(\frac{eB\hbar}{c}\right)$$

Οι αυτοσυζυγείς τελεστές $\hat{P}$, $\hat{Q}$ που ορίζονται ως

$$\hat{\pi}_y = \sqrt{\frac{eB\hbar}{c}}\,\hat{P} \quad , \quad \hat{\pi}_x = \sqrt{\frac{eB\hbar}{c}}\,\hat{Q}$$

ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης $[\,\hat{P}, \hat{Q}\,] = -\iota$

Η Χαμιλτωνιανή είναι

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_B}{2}\,(\,\hat{P}^2 + \hat{Q}^2\,) \quad \text{οπου} \quad \omega_B = \frac{eB}{mc} \quad \textit{cyclotron frequency !}$$

Το ενεργειακό φάσμα είναι επομένως

$$E_n = \hbar\omega_B\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad (\,\text{"σταθμες Landau"}\,)$$

Οι αυτοσυζυγείς τελεστές $\hat{P}$, $\hat{Q}$ που ορίζονται ως

$$\hat{\pi}_y = \sqrt{\frac{eB\hbar}{c}}\,\hat{P} \quad , \quad \hat{\pi}_x = \sqrt{\frac{eB\hbar}{c}}\,\hat{Q}$$

ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης $[\hat{P}, \hat{Q}] = -\iota$

Η Χαμιλτωνιανή είναι

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_B}{2}\left(\hat{P}^2 + \hat{Q}^2\right) \quad \textit{οπου} \quad \omega_B = \frac{eB}{mc} \quad \textit{cyclotron frequency !}$$

Το ενεργειακό φάσμα είναι επομένως

$$E_n = \hbar\omega_B\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \quad (\text{"}\textit{σταθμες Landau}\text{"})$$

Οι αυτοσυζυγείς τελεστές $\hat{P}$, $\hat{Q}$ που ορίζονται ως

$$\hat{\pi}_y = \sqrt{\frac{eB\hbar}{c}}\,\hat{P} \quad , \quad \hat{\pi}_x = \sqrt{\frac{eB\hbar}{c}}\,\hat{Q}$$

ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης $[\,\hat{P}, \hat{Q}\,] = -\iota$

Η Χαμιλτωνιανή είναι

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_B}{2}\,(\,\hat{P}^2 + \hat{Q}^2\,) \quad \text{οπου} \quad \omega_B = \frac{eB}{mc} \quad \textit{cyclotron frequency !}$$

Το ενεργειακό φάσμα είναι επομένως

$$E_n = \hbar\omega_B\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad , \quad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad (\text{"σταθμες Landau"})$$

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.1

Η έκδοση 1.0 είναι διαθέσιμη εδώ.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών. Αθανάσιος Λαχανάς. «Κβαντική Μηχανική ΙΙ. Ενότητα 3: Κίνηση σε Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο». Έκδοση: 0.1. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/PHYS9/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.