Κβαντική Οπτική και Lasers.

Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

Ενότητα 3η Ημικλασική αντιμετώπιση της αλληλεπιδράσεως ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας - ύλης (δισταθμικού ατόμου). Άτομο κβαντικά - ηλεκτρομαγνητικό πεδίο κλασικά

Άσκηση 3.1.

1. Αποδείξτε ότι η αντιστροφή ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς Ο σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ), δηλαδή η πράξη $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ αντιστοιχεί στις αντικαταστάσεις: $r' = r$, $\theta' = \pi - \theta$, και $\varphi' = \varphi + \pi$.
2. Αποδείξτε την παρακάτω έκφραση για το διάνυσμα θέσεως: $\mathbf{r} = \frac{r}{2} \sin\theta \left[(\hat{x} - i\hat{y})\, e^{i\varphi} + (\hat{x} + i\hat{y})\, e^{-i\varphi}\right] + r\cos\theta\, \hat{z}$.

Άσκηση 3.2.

Θεωρήστε τις ιδιοσυναρτήσεις του ατόμου του Υδρογόνου

$$\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi) = R_{nl}(r)\Theta_{lm}(\theta)\Phi_m(\varphi) = \Phi_k(\boldsymbol{r})$$

όπου $k = \{n, l, m\}$ ο συλλογικός κβαντικός αριθμός. Δηλαδή n = 1, 2, 3, … είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός, l = 0, 1, 2, … , n–1 είναι ο τροχιακός κβαντικός αριθμός, και m = –l, –l+1, … , l–1, l είναι ο μαγνητικός κβαντικός αριθμός. Συγκεκριμένα δίνονται οι

$$\Psi_{100}(r,\theta,\varphi) = (\pi\alpha_o^3)^{-1/2}\, e^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$\Psi_{200}(r,\theta,\varphi) = (32\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\Psi_{210}(r,\theta,\varphi) = (32\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\, \frac{r}{a_0} \cos\theta\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\Psi_{21\pm1}(r,\theta,\varphi) = (64\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\, \frac{r}{a_0} \sin\theta\, e^{\pm i\varphi}\, e^{-\frac{r}{2a_0}}$$

$$\Psi_{300}(r,\theta,\varphi) = (19683\pi\alpha_o^3)^{-\frac{1}{2}}\left(27 - 18\frac{r}{a_0} + 2\frac{r^2}{a_0^2}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

Οι αντίστοιχες ιδιοενέργειες είναι $E_k = \hbar\Omega_k = -\frac{R_E}{n^2} = E_n$, δηλαδή υπάρχει εκφυλισμός ως προς l,m.
R_E = 13.6 eV είναι η ενέργεια Rydberg και a_0 είναι η ακτίνα Bohr.

1. Να χαρακτηριστούν όλες οι παραπάνω δεδομένες κυματοσυναρτήσεις (π.χ. η πρώτη είναι η 1s) και να ελεγχθεί αν είναι άρτιες ή περιττές.
2. Να αποφανθείτε αν μηδενίζονται ή όχι τα ολοκληρώματα $\boldsymbol{r}_{k_1k_2} \coloneqq \int_{\pi\alpha\nu\tau o\acute{\upsilon}} dV\, \Phi_{k_1}^*(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\Phi_{k_2}(\boldsymbol{r})$. Τα ολοκληρώματα αυτά είναι ανάλογα με τα στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής $\boldsymbol{p} = (-e)\boldsymbol{r}$, δηλαδή $\boldsymbol{p}_{k_1k_2} \coloneqq \int_{\pi\alpha\nu\tau o\acute{\upsilon}} dV\, \Phi_{k_1}^*(\boldsymbol{r})(-e)\boldsymbol{r}\Phi_{k_2}(\boldsymbol{r})$.
   Εάν το στοιχείο πίνακα της διπολικής ροπής μηδενίζεται, δεν υπάρχει τέτοια οπτική μετάβαση.
3. Προβλέψτε λοιπόν ποιες από τις μεταβάσεις μεταξύ των ιδιοκαταστάσεων που δίνονται επιτρέπονται και ελέγξτε αν ισχύουν οι «κανόνες επιλογής» $\Delta l = \pm1$, $\Delta m = 0, \pm1$.
4. Ελέγξτε αν οι δεδομένες $\Phi_k(\boldsymbol{r})$ είναι ορθογώνιες.
5. Υπολογίστε τα στοιχεία πίνακα της διπολικής ροπής $\boldsymbol{p}_{100\,210}$ και $\boldsymbol{p}_{100\,21\pm1}$.
6. Είναι τα μέτρα των $\boldsymbol{p}_{100\,210}$ και $\boldsymbol{p}_{100\,21\pm1}$ ίσα;

Θεωρείστε δεδομένα

Α) $\int_0^\infty e^{-\gamma r}\, r^n\, dr = \gamma^{-(n+1)}\, n!$ όπου n = 1, 2, 3, . . . και $\gamma > 0$.

Β) σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ), η αντιστροφή ως προς την αρχή του συστήματος αναφοράς δηλαδή η πράξη $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ αντιστοιχεί στις αλλαγές $r' = r$, $\theta' = \pi - \theta$, και $\varphi' = \varphi + \pi$.

Γ) Ισχύει η παρακάτω έκφραση για το διάνυσμα θέσεως: $\mathbf{r} = \frac{r}{2} \sin\theta \left[(\hat{x} - i\hat{y})\, e^{i\varphi} + (\hat{x} + i\hat{y})\, e^{-i\varphi}\right] + r\cos\theta\, \hat{z}$.

Άσκηση 3.3.
Θεωρήστε τις εξισώσεις που προκύπτουν από τις εξισώσεις Rabi μετά την Rotating Wave Approximation, RWA.

$$\dot{C}_1(t) = C_2(t)\frac{i\,E_0\,\mathcal{P}}{2\hbar}\; e^{-\,i\,(\Omega-\,\omega)\,t}$$
$$\dot{C}_2(t) = C_1(t)\frac{i\,E_0\,\mathcal{P}}{2\hbar}\; e^{+\,i\,(\Omega-\,\omega)\,t}$$

Θέλουμε να τις λύσουμε με αρχικές συνθήκες $C_1(0) = 1, C_2(0) = 0$.

(α') Κάντε το μετασχηματισμό

$$C_1(t) = \mathcal{C}_1(t)\, e^{-\frac{i\,(\Omega-\omega)\,t}{2}}$$
$$C_2(t) = \mathcal{C}_2(t)\, e^{\frac{i\,(\Omega-\omega)\,t}{2}}$$

και αποδείξτε ότι προκύπτει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathcal{C}_1}(t)\\ \dot{\mathcal{C}_2}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2}\\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{C}_1(t)\\ \mathcal{C}_2(t)\end{bmatrix}$$

Ορίσαμε ως *αποσυντονισμό* (*detuning*) το $\Delta = \omega - \Omega$ και ως *συχνότητα Rabi* το $\Omega_R = \frac{E_0\mathcal{P}}{\hbar}$.

(β') Ορίστε το διάνυσμα

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix}\mathcal{C}_1(t)\\ \mathcal{C}_2(t)\end{bmatrix}$$

και τον πίνακα

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix}-\frac{i\Delta}{2} & \frac{i\Omega_R}{2}\\ \frac{i\Omega_R}{2} & \frac{i\Delta}{2}\end{bmatrix} = -i\begin{bmatrix}\frac{\Delta}{2} & -\frac{\Omega_R}{2}\\ -\frac{\Omega_R}{2} & -\frac{\Delta}{2}\end{bmatrix} = -i\mathrm{A}$$

οπότε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων γίνεται

$$\dot{\vec{x}}(t) = \tilde{\mathcal{A}}\,\vec{x}(t)$$

Δοκιμάστε λύσεις της μορφής

$$\vec{x}(t) = \vec{v}\, e^{\tilde{\lambda}\,t}$$

και αποδείξτε ότι εν τέλει έχουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\mathrm{A}\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v}$$

όπου $\tilde{\lambda} = -i\,\lambda$.

(γ') Λύστε το πρόβλημα για $\Delta = 0$.

(δ') Λύστε το πρόβλημα για $\Delta \neq 0$.

(ε') Συγκρίνετε το πλάτος και την περίοδο των ταλαντώσεων που προκύπτουν στις περιπτώσεις $\Delta = 0$ και $\Delta \neq 0$.