



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# Φυσική III

## Ενότητα 6: Εναλλασσόμενα Ρεύματα

Γεώργιος Βούλγαρης  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Τμήμα Φυσικής

# Εναλλασσόμενη τάση

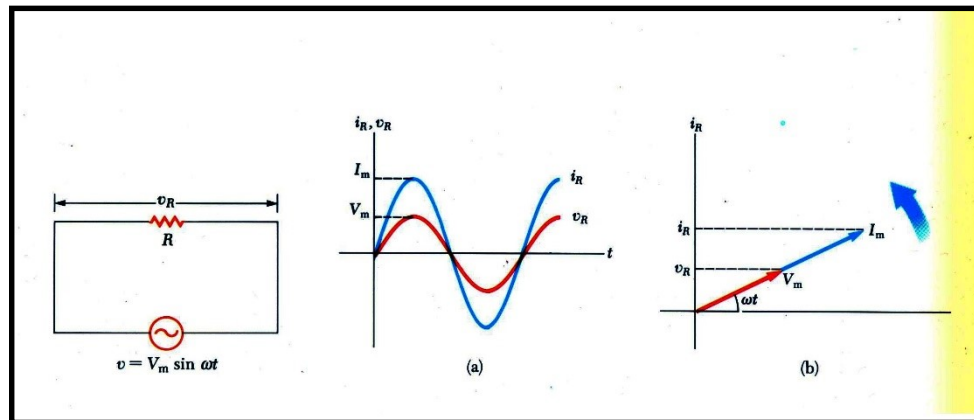
$$V=V_0\sin\omega t$$

$\omega=2\pi f$  όπου  $f$  η συχνότητα  
 $V_0$  το πλάτος

- Πλεονεκτήματα
  - **Μεταφορά ισχύος.** Μετασχηματίζεται σε πολύ υψηλή τάση και έτσι περιορίζονται οι απώλειες στους αγωγούς. Η συχνότητα του δικτύου είναι 50 Hz.
  - **Εκπομπή Η.Μ. κυμάτων.** Όταν η συχνότητα είναι μεγάλη έχουμε εκπομπή ενέργειας με την μορφή ραδιοκυμάτων. Είναι η βάση για όλες τις σύγχρονες μορφές επικοινωνίας



# Εναλλασσόμενη τάση Κύκλωμα με αντίσταση



Εφαρμόζουμε μία εναλλασσόμενη τάση σε μία αντίσταση.

Το ρεύμα που παράγεται έχει την ίδια φάση με την τάση.

Διάγραμμα περιστρεφόμενων διανυσμάτων τάσης και ρεύματος στην αντίσταση.

# Ενεργός τιμή

Στιγμιαία Ισχύς  $P=I^2R$

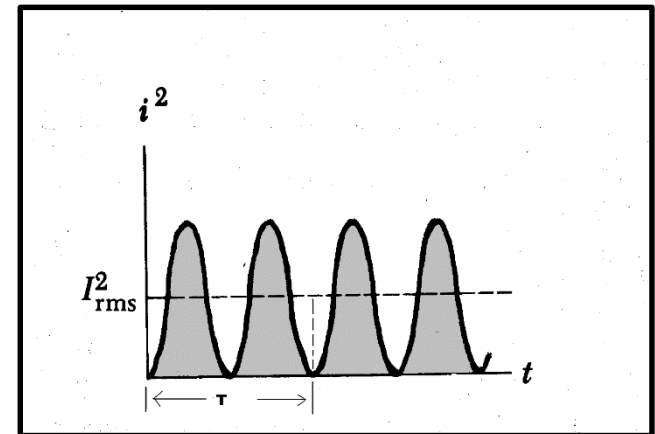
$$W = R \int_0^T I^2 dt = R \int_0^T I_0^2 \cos^2 \omega t dt =$$
$$I_0^2 R \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos(2\omega t)) dt = \frac{1}{2} I_0^2 R T$$

$$I_{\text{εν}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0,707 I_0$$

$$V_{\text{εν}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = 0,707 V_0$$

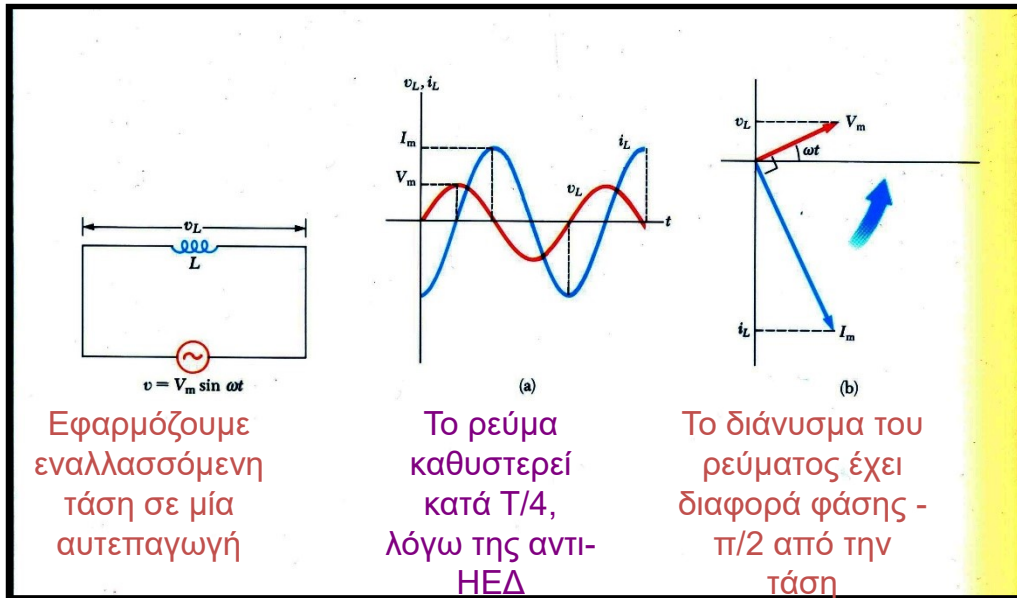
Μέση Ισχύς

$$P = I_{\text{εν}}^2 R$$



Το εμβαδόν της  
σκιασμένης περιοχής  
είναι ίσο με το  $I_{\text{εν}}^2 \Delta t$

# Εναλλασσόμενη τάση Κύκλωμα με αυτεπαγωγή



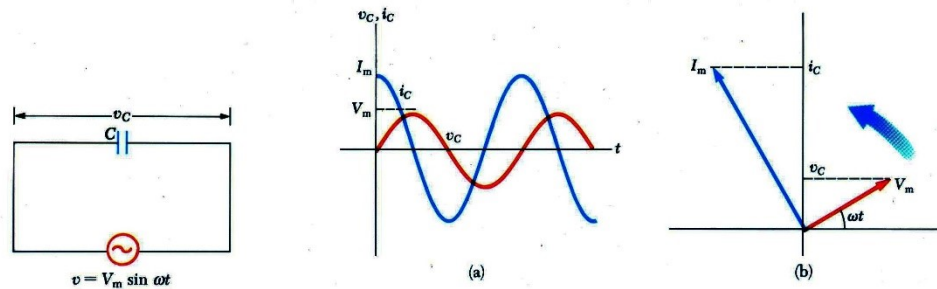
$$V - L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$L \frac{dI}{dt} = V_0 \sin \omega t \Rightarrow I_L = \frac{V_0}{L} \int \sin \omega t dt = -\frac{V_0}{L} \cos \omega t$$

$$I_L = \frac{V_0}{L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

# Εναλλασσόμενη τάση

## Κύκλωμα με χωρητικότητα



Εφαρμόζουμε  
εναλλασσόμενη  
τάση σε μία  
χωρητικότητα

Όταν το ρεύμα γίνεται  
μέγιστο η τάση γίνεται  
μηδέν

Το διάνυσμα του ρεύματος  
προηγείται με διαφορά  
φάσης  $\pi/2$

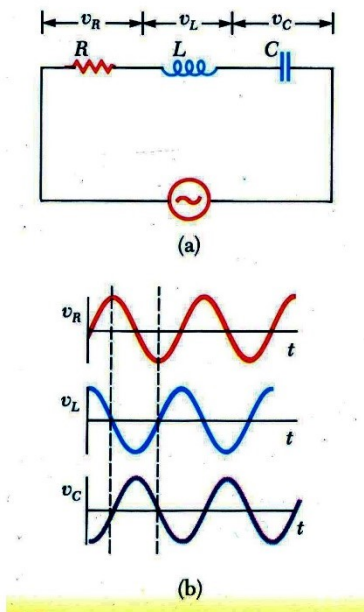
$$V_C = V_0 \sin \omega t$$

$$\frac{Q}{C} = V_0 \sin \omega t \Rightarrow Q = CV_0 \sin \omega t$$

$$I_C = \frac{dQ}{dt} = \omega CV_0 \cos \omega t$$

$$I_C = \omega CV_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

# Εναλλασσόμενη τάση Κύκλωμα με R-L-C

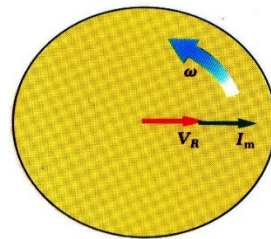


Οι διαφορές φάσης είναι σε σχέση με την τάση στην αντίσταση

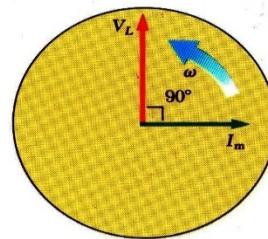
Η τάση στο πηνίο προηγείται της τάσης στην αντίσταση κατά  $\pi/2$

Η τάση στον πυκνωτή ακολουθεί τη τάση στην αντίσταση κατά  $\pi/2$

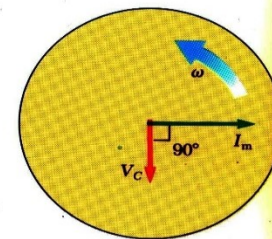
# Περιστρεφόμενα διανύσματα στο κύκλωμα R-L-C



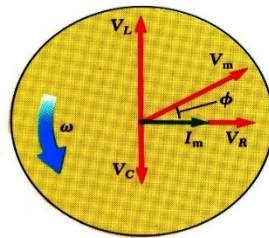
(a)



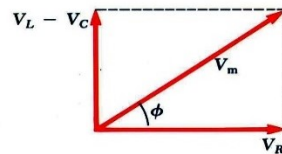
(b)



(c)

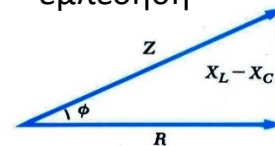


(a)



(b)

Z σύνθετη  
αντίσταση ή  
εμπέδηση



8



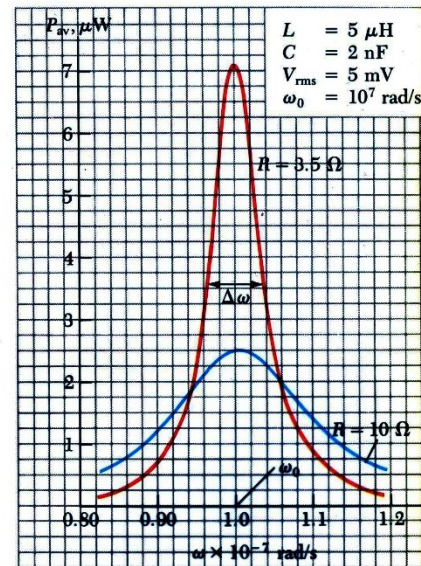
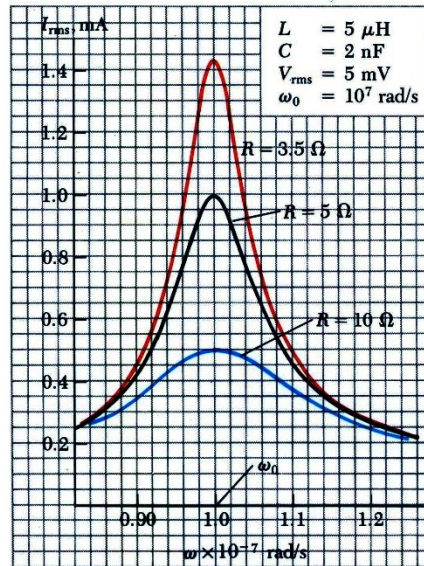
Στοιχείο

Σύνθετη αντίσταση  
Φάση

Circuit Elements	Impedance, Z	Phase angle, $\phi$
	R	0°
	$X_C$	-90°
	$X_L$	+90°
	$\sqrt{R^2 + X_C^2}$	Negative, between -90° and 0°
	$\sqrt{R^2 + X_L^2}$	Positive, between 0° and 90°
	$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	Negative if $X_C > X_L$ Positive if $X_C < X_L$

Ρεύμα σαν συνάρτηση της συχνότητας

Ισχύς σαν συνάρτηση της συχνότητας



# Συντονισμός για κύκλωμα R-L-C σε σειρά

$$I_{\varepsilon\nu} = V_{\varepsilon\nu} / Z$$

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

$$X_L = X_C \Rightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\bar{P} = I_{\varepsilon\nu}^2 R = \frac{V_{\varepsilon\nu}^2 R}{Z^2} = \frac{V_{\varepsilon\nu}^2 R}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

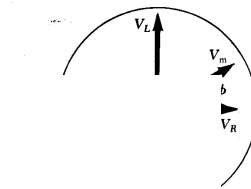
$$(X_L - X_C)^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = \frac{L^2}{\omega^2} (\omega^2 - \omega_0^2)^2$$

$$\bar{P} = \frac{V_{\varepsilon\nu}^2 R \omega^2}{R^2 \omega^2 + L^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2}$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \bar{P} = \frac{V_{\varepsilon\nu}^2}{R}$$



# Μέση ισχύς σε σύνθετη αντίσταση



$$P = iv$$

$$v = V_0 \sin \omega t \quad i = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

$$P = I_0 V_0 \sin(\omega t) \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\sin(\omega t - \varphi) = \sin(\omega t) \cos \varphi - \cos(\omega t) \sin \varphi$$

$$P = I_0 V_0 (\sin^2(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin \varphi)$$

$$\overline{(\sin^2(\omega t))} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{\sin(\omega t) \cos(\omega t)} = \frac{1}{2} \sin(2\omega t)$$

$$\overline{\sin(2\omega t)} = 0$$

$$P_{av} = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \varphi$$

$$P_{av} = I_{ev} V_{ev} \cos \varphi$$

# Βασικοί τύποι

## Τάση στα άκρα στοιχείου

	Γενικά	Αν $i=i_0 \sin \omega t$
R	$v_R=iR$	$v_R= i_0 R \sin \omega t$
L	$v_L=L di/dt$	$v_L=\omega L i_0 \cos \omega t$
C	$v_C=(1/C)\int i dt$	$v_C= (1/\omega C)i_0(-\cos \omega t)$

## Ρεύμα που διαρρέει ένα στοιχείο

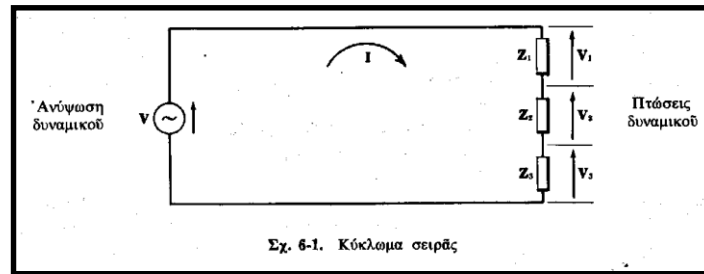
	Γενικά	Αν $v=v_0 \sin \omega t$
R	$i_R=v/R$	$i_R= v_0/R \sin \omega t$
L	$i_L=(1/L)\int v dt$	$i_L=(v_0/\omega L)(-\cos \omega t)$
C	$i_C=C dv/dt$	$i_C= \omega C v_0(\cos \omega t)$



# Κυκλώματα σε σειρά και παράλληλα

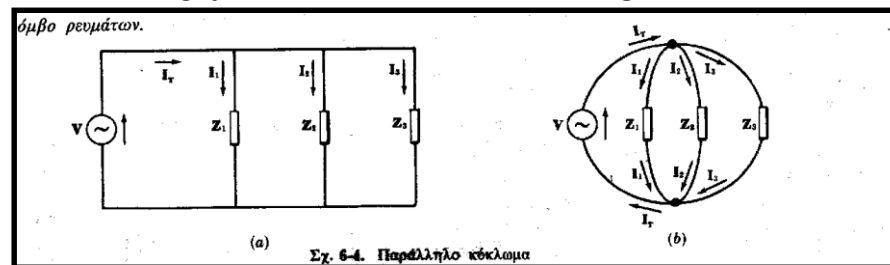
Σύνδεση σε σειρά,

$$Z_{ολ} = Z_1 + Z_2 + Z_3$$



Σύνδεση παράλληλα

$$1/Z_{ολ} = 1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3$$



# Μιγαδική σύνθετη αντίσταση

- Μιγαδική Αναπαράσταση.
- Η τάση γράφεται  $V = V_0 e^{j\omega t}$
- Ισχύει  $V = V_0 (\cos \omega t + j \sin \omega t)$   
Παράδειγμα: κύκλωμα με αντίσταση και πηνίο.

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = V_0 e^{j\omega t}, \quad i = ke^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow Rke^{j\omega t} + Lk j\omega e^{j\omega t} = V_0 e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow Rk + j\omega Lk = V_0 \Rightarrow k = \frac{V_0}{R + j\omega L}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R + j\omega L} e^{j\omega t} \Rightarrow Z = \frac{v(t)}{i(t)} = R + j\omega L,$$

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \tan^{-1} \theta = \frac{\omega L}{R}$$



# Μιγαδική σύνθετη αντίσταση

- Κύκλωμα με αντίσταση και πυκνωτή.

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V_0 e^{j\omega t}$$

$$i = k e^{j\omega t}$$

$$Rk e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} k e^{j\omega t} = V_0 e^{j\omega t} \Rightarrow kR + \frac{k}{j\omega C} = V_0$$

$$\Rightarrow k = \frac{V_0}{R - \frac{j}{\omega C}}, \quad i(t) = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{R - \frac{j}{\omega C}}$$

$$Z = R - \frac{j}{\omega C},$$

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{1}{\omega RC}$$



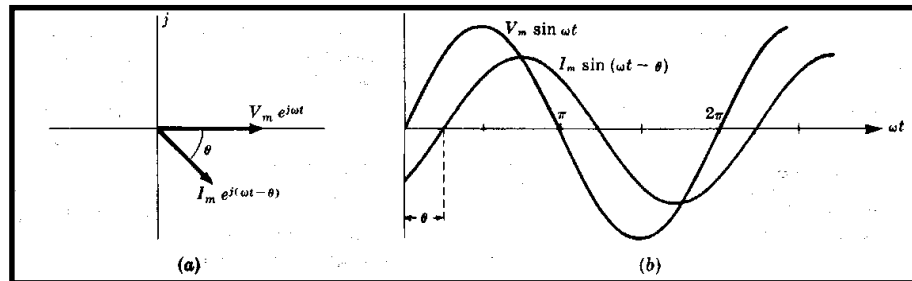
# Στρεφόμενα διανύσματα

- Λύση στο πεδίο χρόνου

$$V = V_0 e^{j(\omega t + a)}$$

$$Z = Z_0 e^{j\theta}$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V_0 e^{j(\omega t + a)}}{Z_0 e^{j\theta}} = I_0 e^{j(\omega t + a - \theta)}$$

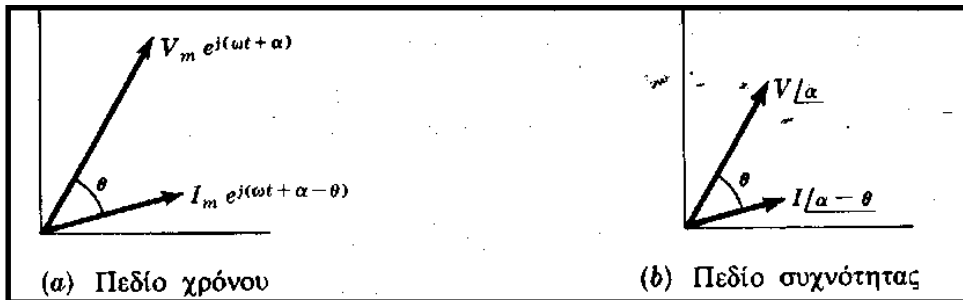




# Στρεφόμενα διανύσματα

- Λύση στο πεδίο συχνοτήτων

$$\frac{V_0 e^{ja}}{\sqrt{2} Z_0 e^{j\theta}} = \frac{I_0 e^{j(a-\theta)}}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow \frac{V_{\varepsilon\nu} \angle \alpha}{Z \angle \theta} = I_{\varepsilon\nu} \angle \alpha - \theta$$

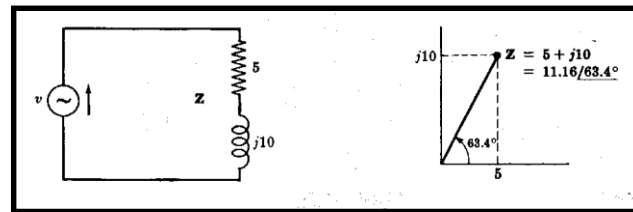


# Παραδείγματα

Αριθμητικό Παράδειγμα:

$$R=5\Omega, L=2\text{mH}, V=150\sin(1500t)$$

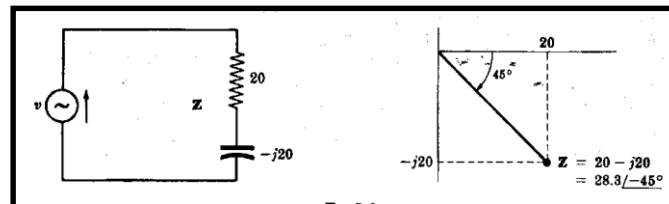
Υπολογίστε την σύνθετη αντίσταση σε εκθετική μορφή.



Αριθμητικό Παράδειγμα:

$$R=20\Omega, C=5\mu\text{F}, V=150\sin(10000t)$$

Υπολογίστε την σύνθετη αντίσταση σε εκθετική μορφή



Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.0.



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Γεώργιος Βούλγαρης, 2015. Γεώργιος Βούλγαρης. «Φυσική ΙΙΙ. Εναλλασσόμενα Ρεύματα». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/PHYS14/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

