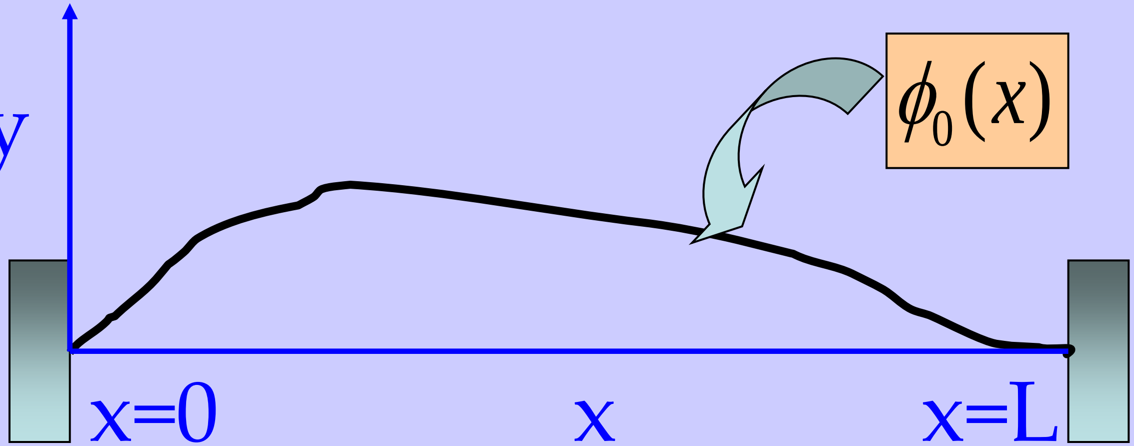
ΜΕΛΕΤΗ ΧΟΡΔΗΣ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗΣ ΣΤΑ ΑΚΡΑ ΤΗΣ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΕΥΤΑΞΙΑΣ

Ψαρεύοντας έρχεται η θάλασσα.
Οδυσσέας Ελύτης

Ο ΣΤΟΧΟΣ ΕΙΝΑΙ
Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗΣ
$y(x,t)$
ΠΟΥ ΑΠΟΚΑΘΙΣΤΑΤΑΙ ΣΕ ΧΟΡΔΗ
ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗ
ΚΑΙ ΣΤΑ ΔΥΟ ΑΚΡΑ ΤΗΣ
ΜΕΤΑ ΤΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΗΣ.



ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

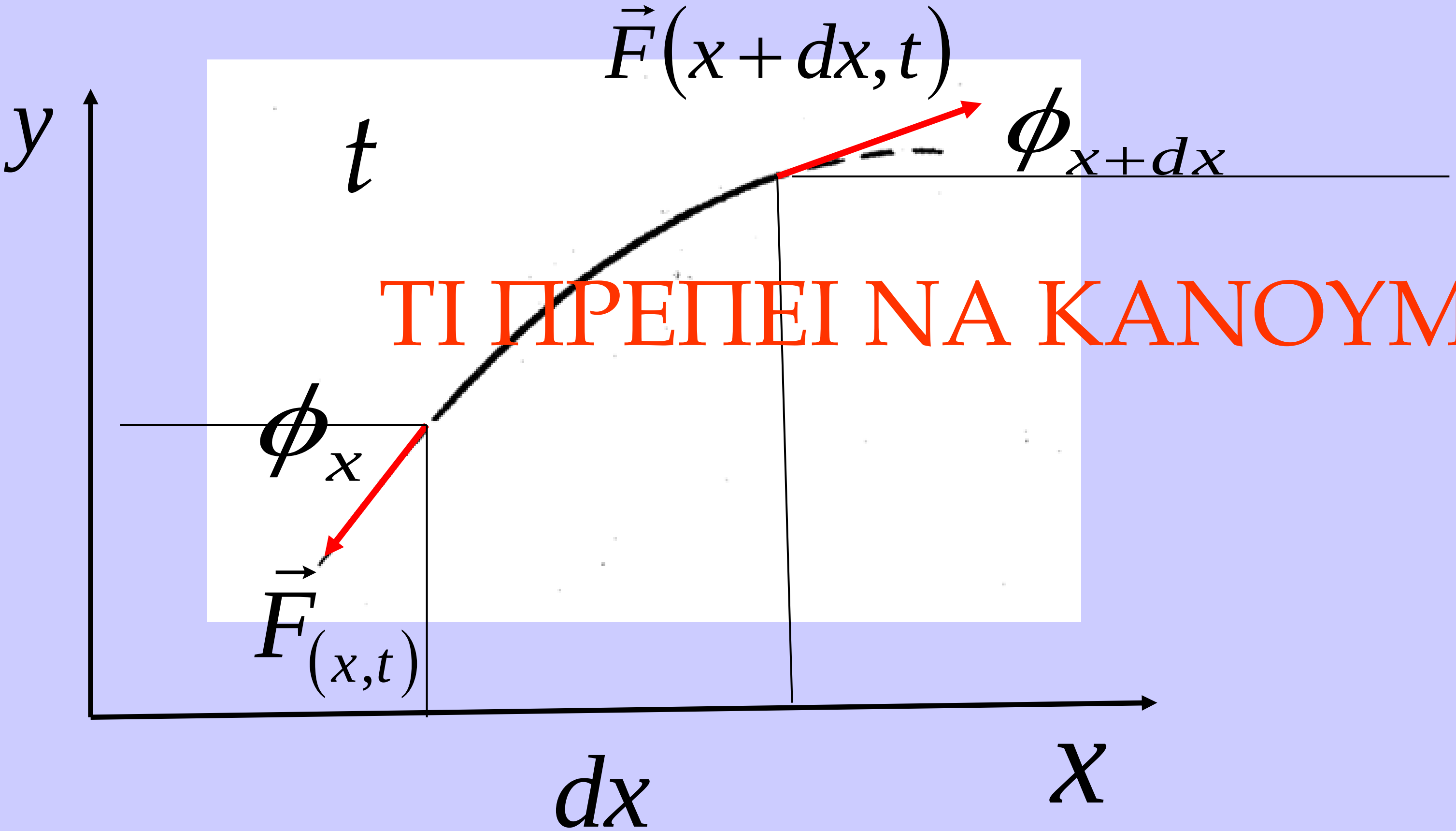
$$y(x=0,t)=0$$

$$y(x=L,t)=0$$

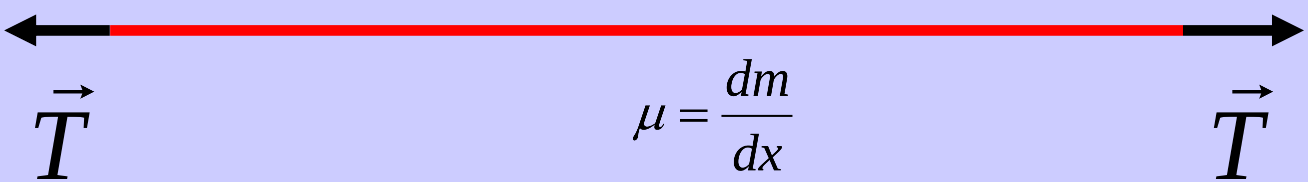
ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$y(x,t=0)=\phi_0(x)$$

$$u_y(x,t=0)=\frac{\partial y(x,t=0)}{\partial t}$$



ΤΙ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΚΑΝΟΥΜΕ;



$$\sum \vec{F}_y(x, x+dx, t) = dm \frac{\partial^2 \vec{y}(x,t)}{\partial t^2}$$

ΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΣ ΤΜΗΜΑ ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΗ Δ.Ε:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{T}{\mu}} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 t}$$

Η ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΙΣ

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ Η $y(x,t)$

Η ΛΥΣΗ y(x,t) ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ
ΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (1)
ΚΑΙ ΤΙΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ (2) (3) (4) (5).

$$\frac{\partial^2 (x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{\mathrm{T}}{\mu}} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 t} \quad (1)$$

$$y(x=0,t)=0 \quad (2)$$

$$y(x=L,t)=0 \quad (3)$$

$$y(x,t=0)=\phi_0(x) \quad (4)$$

$$u_y(x,t=0)=\frac{\partial y(x,t=0)}{\partial t} \quad (5)$$

ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ:

$$y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$$

ΤΙ ΑΠΕΙΚΟΝΙΖΕΙ ΜΙΑ ΤΕΤΟΙΑ ΛΥΣΗ;

ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΕΙΤΑΙ
ΜΙΑ ΤΕΤΟΙΑ ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ;

ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΕΙΤΑΙ Η ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΤΗΣ f(x);

ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΕΙΤΑΙ Η ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΤΗΣ ω

ΓΙΑΤΙ ΔΕΝ ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΛΥΣΗ:

$$y(x,t) = f(x)\sin(\omega t)$$

ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ:

$$y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$$

ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΕΙΤΑΙ Η ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΤΗΣ f(x);

ΓΙΑΤΙ ΔΕΝ ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΛΥΣΗ:

$$y(x,t) = f(x)\sin(\omega t)$$

$$y(x,t=0) = \phi_0(x)$$

ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ:

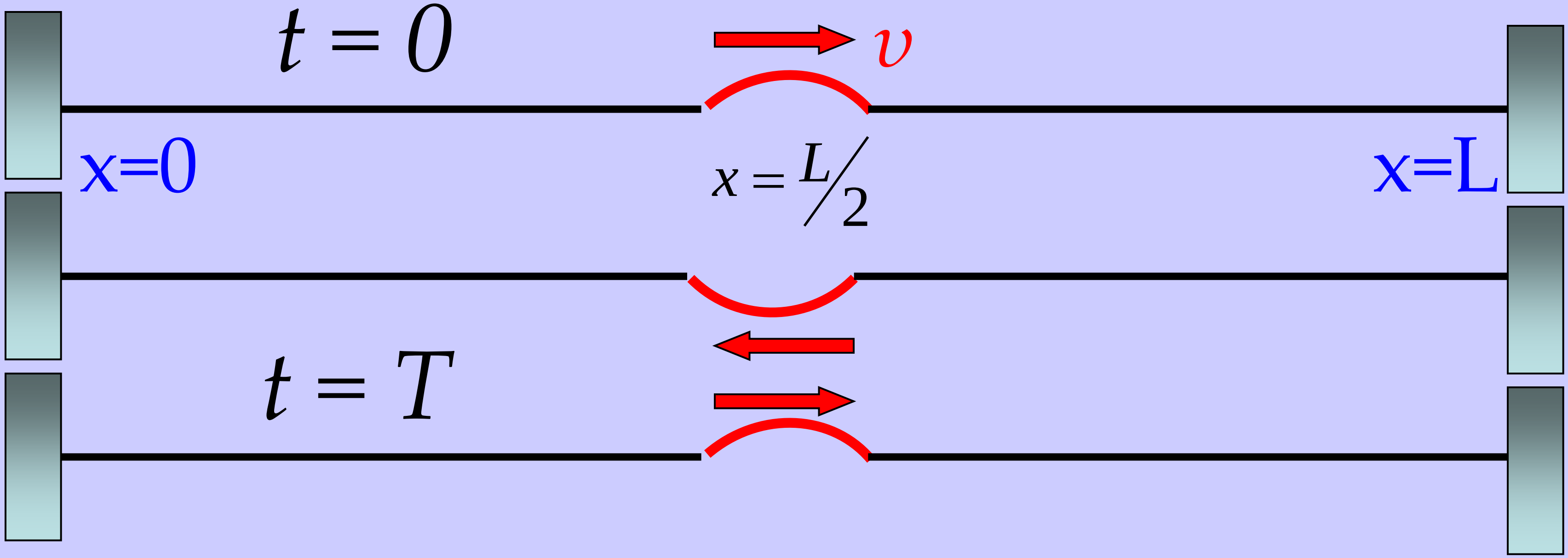
$$y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$$

ΠΩΣ

ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΕΙΤΑΙ Η ΠΑΡΟΥΣΙΑ ΤΗΣ

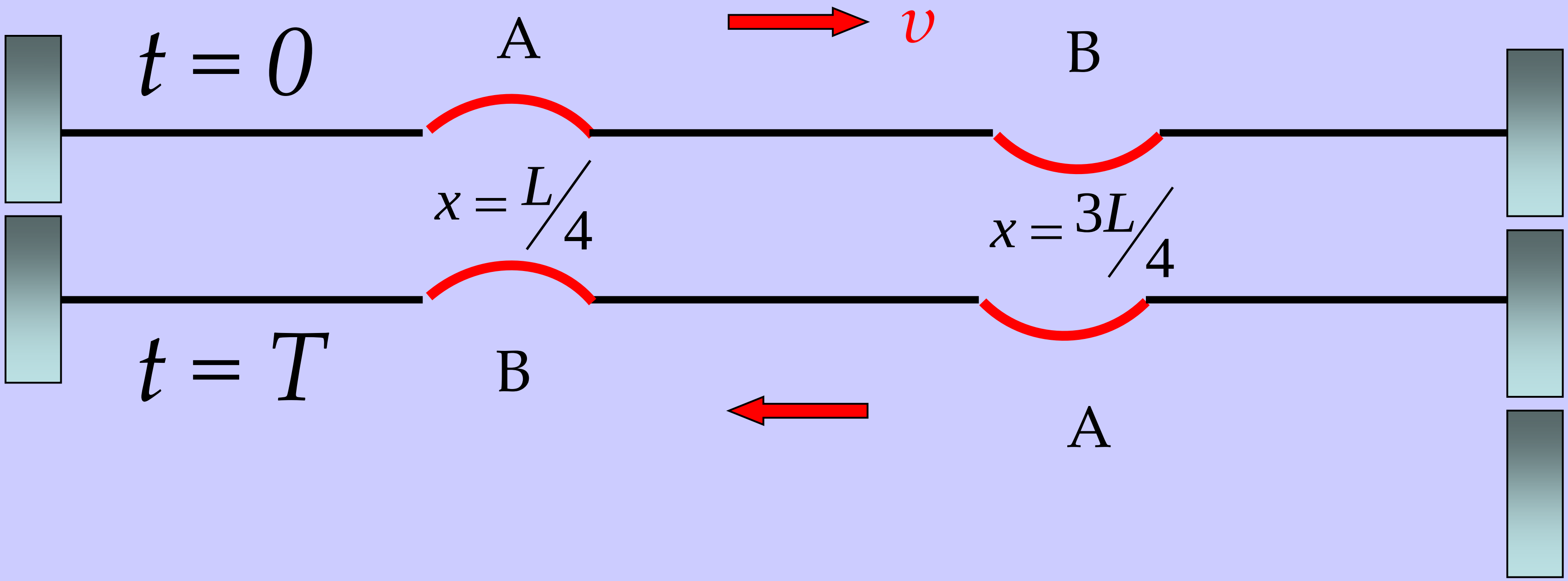
ω

(ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑΣ);



Η ΧΟΡΔΗ ΑΝΑΚΤΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟ:

$$T = \frac{\upsilon}{2L}$$



Η ΧΟΡΔΗ ΑΝΑΚΤΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΤΟ ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟ:

$$\boxed{T = \frac{\upsilon}{L}}$$

Η ΛΥΣΗ y(x,t) ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (1) ΚΑΙ ΤΙΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ (2) (3) (4) (5).

$$\frac{\partial^2 (x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{\mathrm{T}}{\mu}} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 t} \quad (1)$$

$$y(x=0,t)=0 \quad (2)$$

$$y(x=L,t)=0 \quad (3)$$

$$y(x,t=0)=\phi_0(x) \quad (4)$$

$$u_y(x,t=0)=\frac{\partial y(x,t=0)}{\partial t} \quad (5)$$

$$\boxed{y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)}$$

ΤΕΛΙΚΑ

ΑΥΤΟ ΠΟΥ ΑΝΑΖΗΤΟΥΜΕ ΕΙΝΑΙ:

$f(x)$ ω

ΑΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ!

ΟΠΟΥ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ
ΣΥΝΑΝΤΑΜΕ ΤΗΝ ΠΟΣΟΤΗΤΑ

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}}}$$

ΑΥΤΟ ΘΑ ΓΙΝΕΤΑΙ
ΓΙΑ ΛΟΓΟΥΣ ΣΥΝΤΟΜΙΑΣ ΓΡΑΦΗΣ.
ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ
ΦΑΣΙΚΗ ΤΑΧΥΤΗΤΑ
ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΥ ΜΕΛΑΤΑΜΕ.

ΠΡΩΤΟ ΒΗΜΑ

$$y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 (x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{\mathrm{T}}{\mu}} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial^2 t}$$

$$\frac{d^2 f(x)}{d^2 x} + \frac{\omega^2}{\upsilon^2} f(x) = 0$$

$$f(x) = A\sin\left(\frac{\omega}{\upsilon}x\right) + B\cos\left(\frac{\omega}{\upsilon}x\right)$$

$$y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$$

$$f(x) = A\sin(\frac{\omega}{\upsilon}x) + B\cos(\frac{\omega}{\upsilon}x)$$

$$y(x,t) = \{A\sin(\frac{\omega}{\upsilon}x) + B\cos(\frac{\omega}{\upsilon}x)\}\cos(\omega t)$$

ΑΠΟ ΤΗΝ
ΑΡΜΟΝΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΟΝ ΧΡΟΝΟ
ΣΤΗΝ
ΑΡΜΟΝΙΚΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

$$y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$$

$$f(x) = A\sin\left(\frac{\omega}{\upsilon}x\right) + B\cos\left(\frac{\omega}{\upsilon}x\right)$$

$$y(x,t) = \left\{A\sin\left(\frac{\omega}{\upsilon}x\right) + B\cos\left(\frac{\omega}{\upsilon}x\right)\right\}\cos(\omega t)$$

ΠΟΙΑ ΕΙΝΑΙ ΤΑ Α, Β, ω;

ΘΑ ΚΑΘΟΡΙΣΤΟΥΝ ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ – ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ!

ΔΕΥΤΕΡΟ ΒΗΜΑ

ΠΡΩΤΗ ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ:

$$y(x=0,t)=0$$

$$y(x,t) = \{A\sin(\frac{\omega}{\upsilon}x) + B\cos(\frac{\omega}{\upsilon}x)\}\cos(\omega t)$$

$$y(x=0,t) = 0$$

$$y(x=0,t) = \{A\sin(\frac{\omega}{\upsilon}0) + B\cos(\frac{\omega}{\upsilon}0)\}\cos(\omega t) = B\cos\omega t = 0$$

$$\boxed{\mathrm{B} = 0}$$

$$y(x,t) = \{A\sin(\frac{\omega}{\upsilon}x)\}\cos(\omega t)$$

ΤΡΙΤΟ ΒΗΜΑ

ΔΕΥΤΕΡΗ ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ

$$y(x = L, t) = 0$$

$$y(x,t) = \{A\sin(\frac{\omega}{\upsilon}x)\}\cos(\omega t)$$

$$y(x = L, t) = 0$$

$$y(x = L, t) = \{A\sin(\frac{\omega}{\upsilon}L)\}\cos(\omega t) = 0$$

$A=0$

$$\sin(\frac{\omega}{\upsilon}L) = 0$$

$$\sin(\frac{\omega}{\upsilon}L) = 0$$

$$\frac{\omega_n}{\upsilon}L = n\pi$$

$$\nu_n = n\frac{\upsilon}{2L}$$

$$y_n(x,t) = \{A_n \sin(\frac{\omega_n}{\upsilon} x)\}\cos(\omega_n t)$$

$$\frac{\omega_n}{\upsilon} L = n\pi$$

$$y_n(x,t) = \{A_n \sin(\frac{n\pi}{L} x)\}\cos(\omega_n t)$$

$$y_n(x,t) = \left\{A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\frac{2L}{n}}\right) x\right\}\cos(2\pi\nu_n t)$$

$$y_n(x,t) = \left\{A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\frac{2L}{n}}\right) x\right\} \cos(2\pi\nu_n t)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

ΜΗΚΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ
ΤΟΥ
ΣΤΑΣΙΜΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

$$y_n(x,t) = \left\{A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}\right)x\right\}\cos(2\pi\nu_n t)$$

$$\nu_n = n\frac{\upsilon}{2L}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

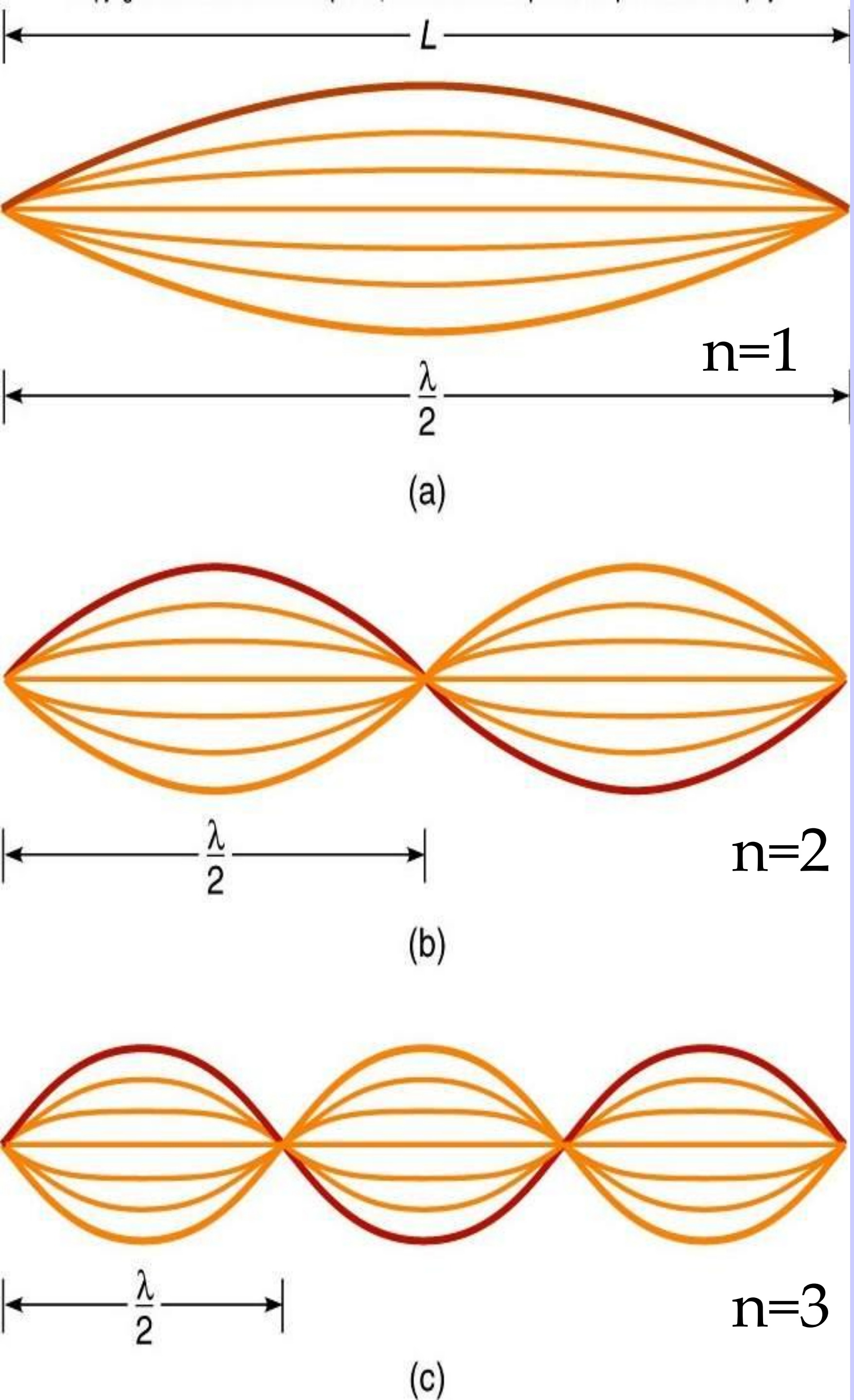
ΑΓΝΩΣΤΑ ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΝ ΜΟΝΟΝ

ΤΑ ΠΛΑΤΗ An

ΟΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

ΚΑΘΟΡΙΖΟΥΝ ΤΑ

ΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΟΣ

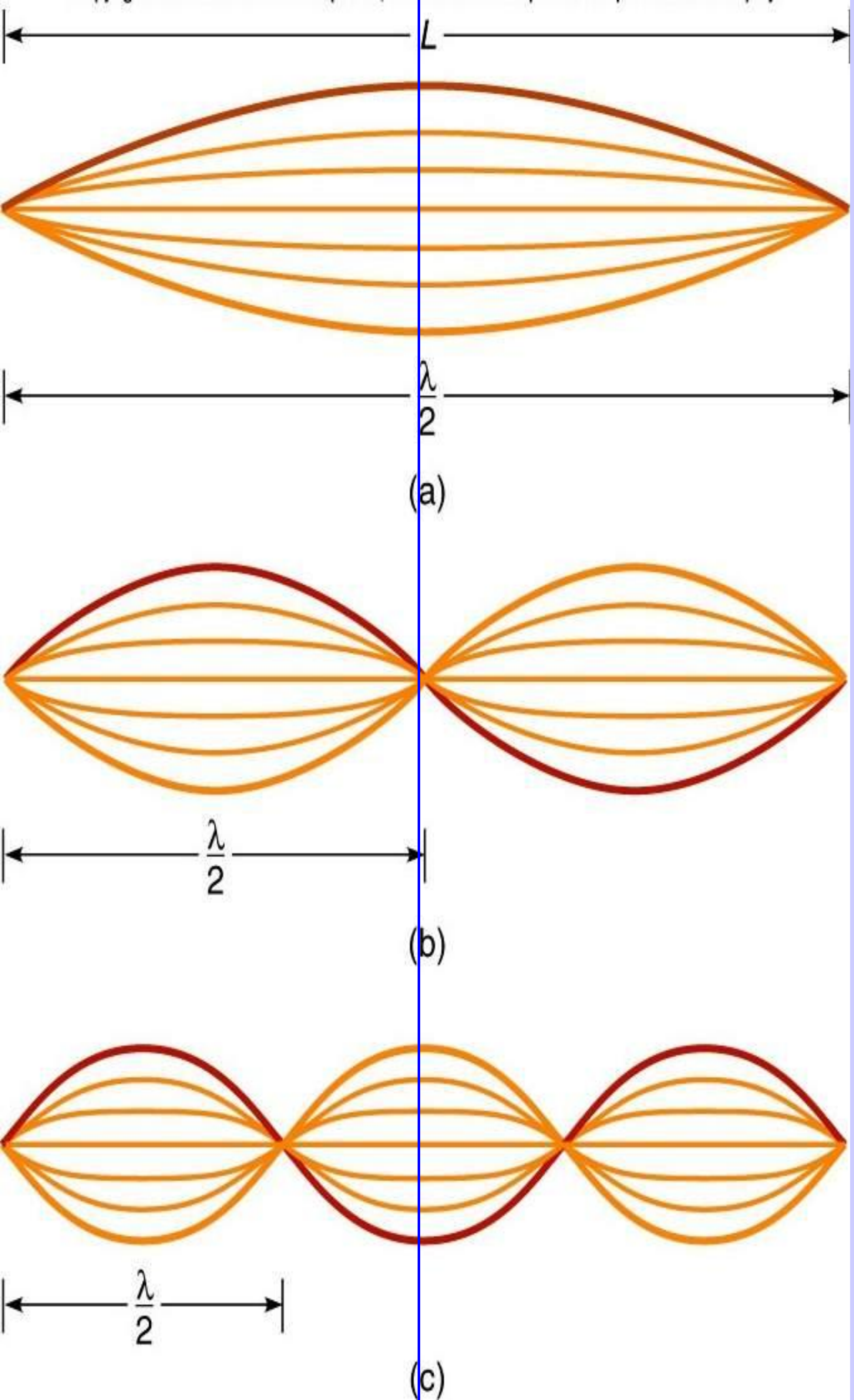


$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}$$

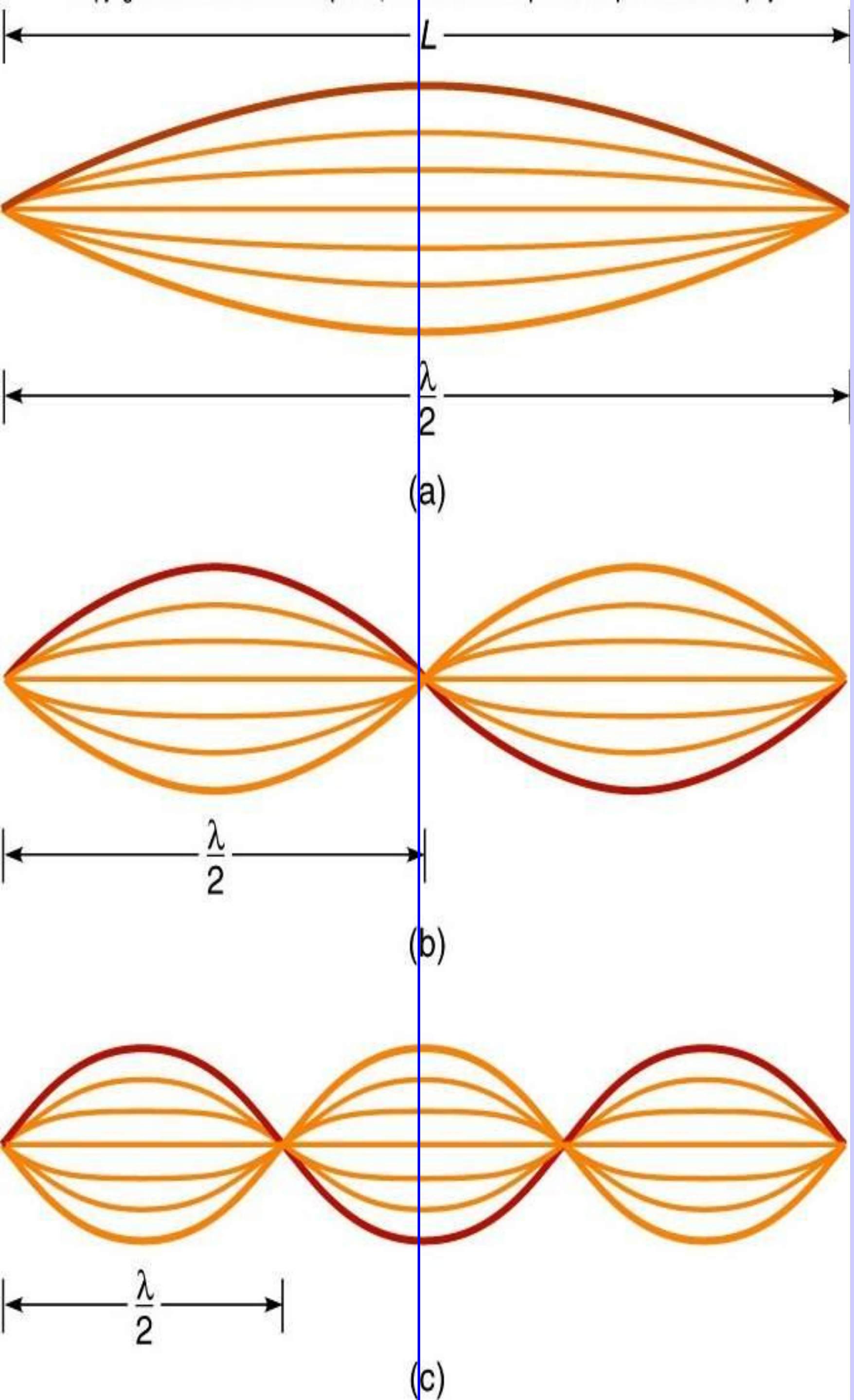
ΓΙΑ ΝΑ ΕΧΟΥΜΕ ΚΟΜΒΟΥΣ
ΣΤΑ ΑΚΡΑ
ΠΡΕΠΕΙ ΣΕ ΜΗΚΟΣ L
ΝΑ ΠΕΡΙΕΧΕΤΑΙ ΚΑΠΟΙΟΣ
ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

$$\frac{\lambda}{2}$$



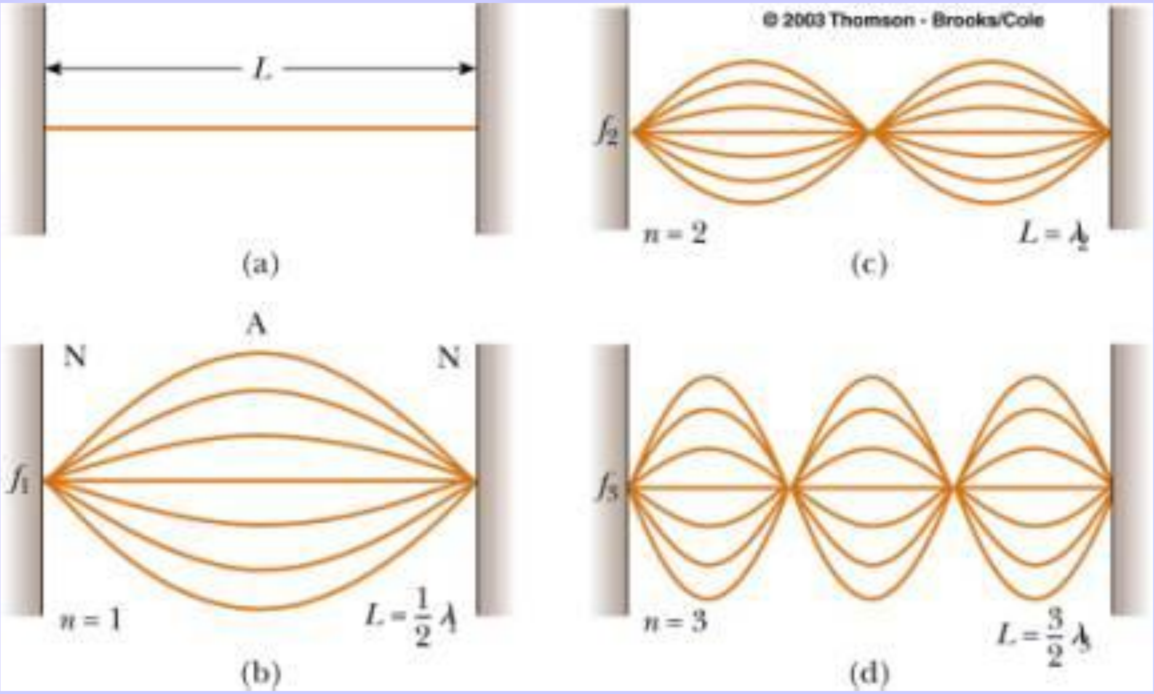
1. ΟΙ ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑΛΛΑΞ ΑΡΤΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΕΣΟΝ ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ

2. Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΚΟΜΒΩΝ ΑΥΞΑΝΕΙ ΚΑΤΑ ΜΟΝΑΔΑ ΚΑΘΩΣ ΠΡΟΧΩΡΟΥΜΕ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΜΕΛΙΔΗ ΣΤΑΘΜΗ ΣΤΙΣ ΑΝΩΤΕΡΕΣ



3. ΤΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 2
ΕΙΝΑΙ ΛΟΓΙΚΟ.
ΓΙΑ ΝΑ ΦΙΑΧΤΕΙ
ΕΝΑ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ
ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΧΩΡΕΣΟΥΝ
ΣΕ ΜΗΚΟΣ L
ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
ΗΜΙΚΥΜΑΤΩΝ

4. ΟΙ ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
ΕΙΝΑΙ ΑΡΤΙΕΣ / ΠΕΡΙΤΤΕΣ
ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕ ΤΟ ΕΑΝ
Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΚΟΜΒΩΝ
ΕΙΝΑΙ ΑΡΤΙΟΣ / ΠΕΡΙΤΤΟΣ

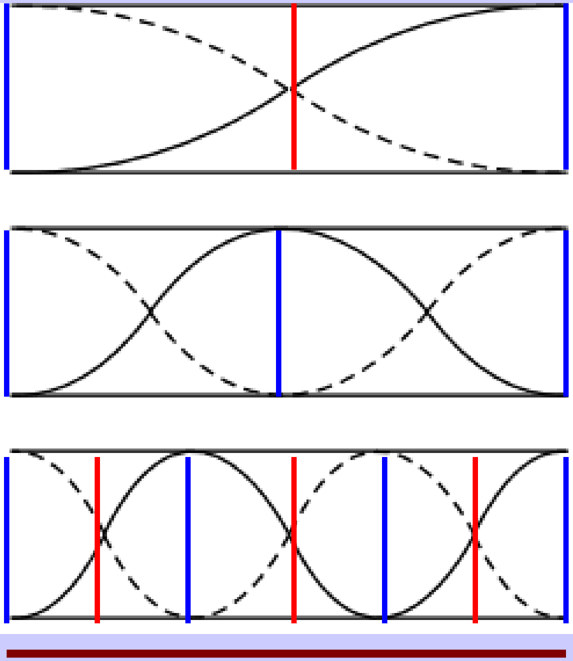


ΓΙΑ ΝΑ ΑΝΑΔΥΘΕΙ
ΕΝΑ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ
ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΧΩΡΕΣΟΥΝ
ΣΕ ΜΗΚΟΣ L
ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ
ΗΜΙΚΥΜΑΤΩΝ

ΜΕ ΤΟ ΠΟΥ ΔΟΘΗΚΑΝ
ΟΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ
ΚΑΘΟΡΙΣΤΗΚΑΝ ΤΑ
ΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ
ΠΟΥ ΜΠΟΡΕΙ
ΝΑ ΑΝΑΠΤΥΧΘΟΥΝ.

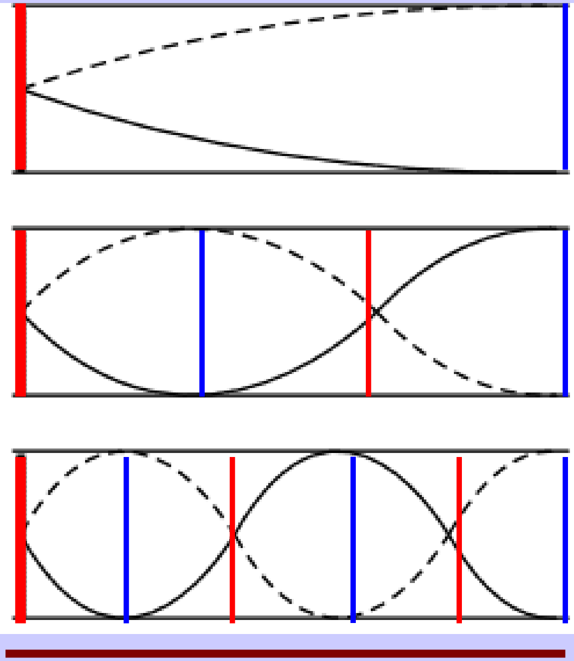
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

ΤΑ ΕΠΙΤΡΕΠΟΜΕΝΑ ΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΟΣ
ΔΕΝ ΕΞΑΡΤΩΝΤΑΙ
ΑΠΟ ΤΑ (μ, T) ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ
ΟΥΤΕ ΑΠΟ
ΤΙΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.



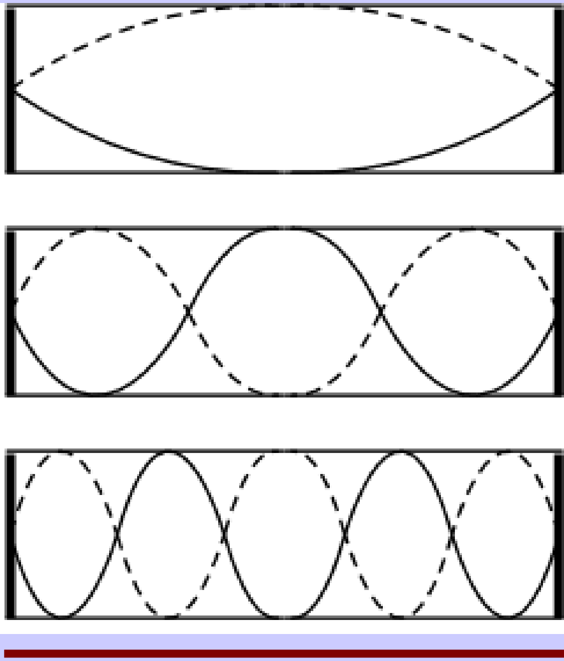
L

$$\lambda_n =;$$



L

$$\lambda_n =;$$



L

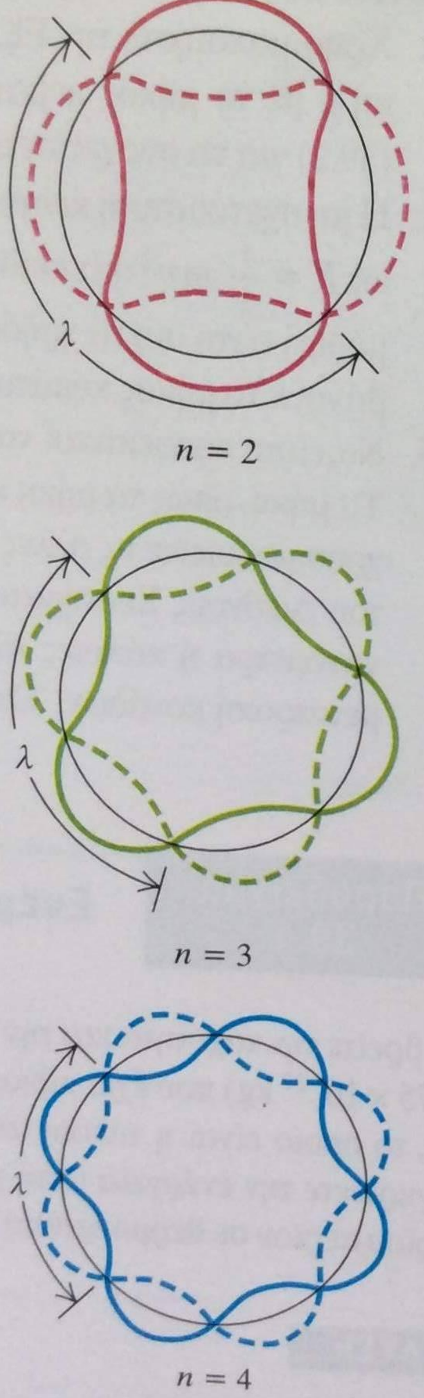
$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\nu_n = n\frac{\upsilon}{2L}$$

ΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ
ΔΙΑΜΟΡΦΩΝΟΝΤΑΙ
ΑΠΟ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (L)
ΚΑΙ
ΑΠΟ ΤΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ
ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ (μ)- ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ (Τ)

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}}$$

$$\nu = f\left(\frac{1}{\text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ} - \text{ΔΙΑΣΤΑΣΗ}}\right)$$



ΕΝΑ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ ΔΕΝ ΕΚΠΜΠΕΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ. ΚΑΙ ΤΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΑ ΣΕ ΤΡΟΧΙΕΣ ΤΟΥ BOHR ΔΕΝ ΕΚΠΕΜΠΟΥΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑ. ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΦΑΝΤΑΣΤΟΥΜΕ
ΟΤΙ ΕΝΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΟ ΣΧΕΤΙΖΕΤΑΙ ΜΕ ΕΝΑ ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΜΕΝΟ ΓΥΡΩ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ ΠΟΥ ΑΝΤΙΠΡΟΣΩΠΕΥΕΙ ΚΑΠΟΙΑ ΤΡΟΧΙΑ ΤΟΥ BOHR. ΓΙΑ ΝΑ ΤΑΙΡΙΑΞΕΙ Η ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΚΑΠΟΙΟΝ ΑΚΕΡΑΙΟ ΑΡΙΘΜΟ ΜΗΚΩΝ ΚΥΜΑΤΟΣ

$$2\pi r = n\lambda$$

$$n = 1,2,3...$$

ΤΕΤΑΡΤΟ ΒΗΜΑ

$$y_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)\cos(2\pi\nu_n t)$$

ΑΓΝΩΣΤΑ ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΝ ΜΟΝΟΝ
ΤΑ ΠΛΑΤΗ An

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} y_n(x,t)$$

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)\cos(2\pi\nu_n t)$$

ΑΓΝΩΣΤΑ ΠΑΡΑΜΕΝΟΥΝ ΜΟΝΟΝ
ΤΑ ΠΛΑΤΗ A_n

ΑΠΟ ΤΙ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ
Η ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΩΝ ΠΛΑΤΩΝ;

ΑΠΟ ΤΙΣ
ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

ΗΤΑΝ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ.
ΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΕΤΑΙ
ΜΕ ΤΗΝ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΑΡΧΙΚΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ.

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right)\cos(2\pi\nu_n t)$$

$$y(x,t=0)=\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right)\cdot 1=\phi_0(x)$$

$$\phi_0(x)=\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right)$$

ΤΙ ΜΑΣ ΛΕΕΙ Η:

$$\phi_0(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER

ΕΙΝΑΙ:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_m}x\right)dx = 0$$

$$n \neq m$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_m}x\right)dx = \frac{L}{2}$$

$$n = m$$

$$\phi_0(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)$$

$$\int_0^L \phi_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx =$$

$$= \int_0^L \left\{\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\right\} \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx$$

$$\int_0^L \phi_0(x) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx = A_m \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L \phi_0(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = A_m \frac{L}{2}$$

$$A_m = \frac{2}{L}\int_0^L \phi_0(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx$$

$$y_n(x,t) = \left\{A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}\right)x\right\}\cos(2\pi\nu_n t)$$

$$\nu_n = n\frac{\upsilon}{2L}$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t)$$

ΣΥΝΟΨΗ

Η ΔΙΑΤΑΡΑΧΗ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΕΙ
ΕΙΝΑΙ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ.

1. ΤΑ **ΜΗΚΗ ΚΥΜΑΤΟΣ** ΔΙΑΜΟΡΦΩΝΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΙΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.

2. **ΟΙ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ** ΑΠΟ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΤΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ (ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ-ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ) ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ.

3. **ΤΑ ΠΛΑΤΗ** ΔΙΑΜΟΡΦΩΝΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟΝ ΤΡΟΠΟ ΔΙΕΓΕΡΣΗΣ.

ΠΩΣ
ΚΑΤΑΝΕΜΕΤΑΙ Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ
ΣΤΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ;

ΙΣΟΚΑΤΑΝΕΜΕΤΑΙ;
ΤΙ ΛΕΕΙ Η ΔΙΑΙΣΘΗΣΗ
ΠΟΥ ΔΙΑΜΟΡΦΩΝΟΥΝ
ΟΙ ΕΜΠΕΙΡΙΕΣ;

$$y_n(x,t) = A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$$

Δ
ϒ
Ν
Α
Μ
Ι
Κ
Η

$$\rho_\delta(x,t) = \frac{1}{2} T \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2$$

$$\rho_{\delta,n}(x,t) = \frac{1}{2} \mathrm{T} A_n^{\ 2} (k_n)^2 \cos^2(k_n x) \cos^2(\omega_n t)$$

$$(\Delta \mathrm{E})_n(x,t) = \int_0^L \rho_{\delta,n}(x,t)\,dx$$

$$(\Delta \mathrm{E})_n(x,t) = \frac{L}{4} T A_n^{\ 2} k_n^{\ 2} \cos^2(\omega_n t)$$

$$y_n(x,t) = A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$$

K
I
N
H
T
I
K
H

$$\rho_k(x,t) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2$$

$$(\mathrm{KE})_n(t) = \frac{1}{4} L\mu A_n{}^2 \omega_n{}^2 \sin^2(\omega_n t)$$

ΟΛΙΚΗ

$$(\Delta \mathrm{E})_n(t) = \frac{1}{4} L\mu A_n{}^2 \omega_n{}^2 \cos^2(\omega_n t)$$

$$(\mathrm{KE})_n(t) = \frac{1}{4} L\mu A_n{}^2 \omega_n{}^2 \sin^2(\omega_n t)$$

$$(M\mathrm{E})_n = \frac{1}{4} (L\mu) A_n{}^2 \omega_n{}^2$$

$$(ME)_n = \frac{1}{4}(L\mu)A_n{}^2\omega_n{}^2$$

$$(ME)_{ΟΛΙΚΗ} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{4}(L\mu)A_n{}^2\omega_n{}^2$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!
ΟΙ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ ΑΝΑΦΕΡΟΝΤΑΙ
ΣΕ ΟΛΟ ΤΟ ΜΗΚΟΣ
ΤΗΣ ΠΑΚΤΩΜΕΝΗΣ ΧΟΡΔΗΣ

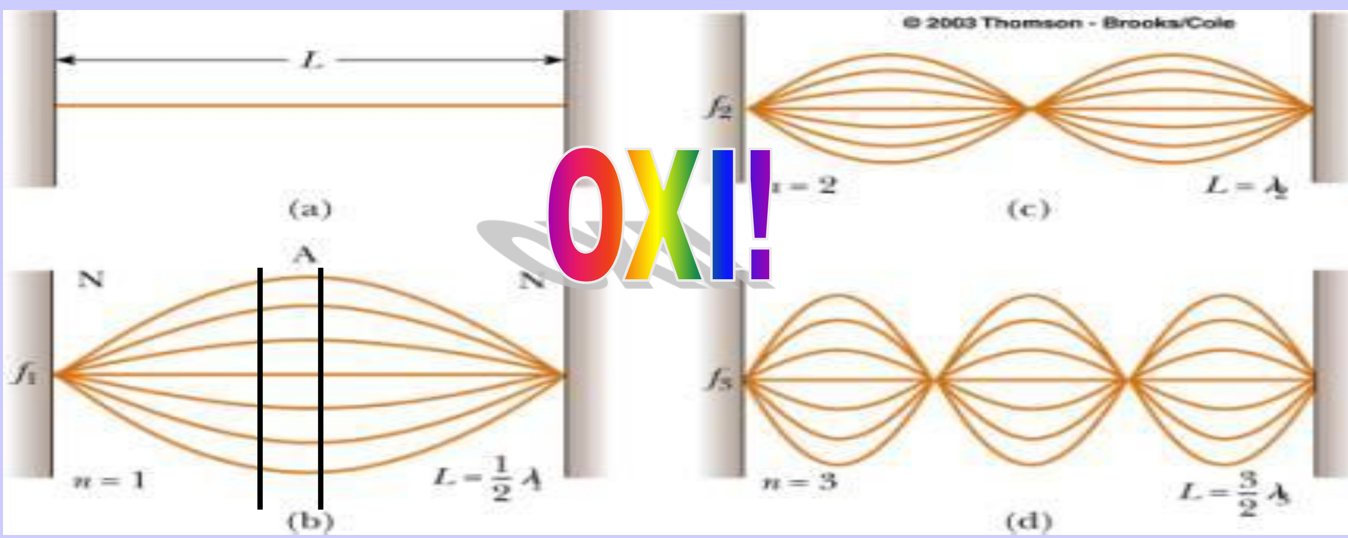
ΙΣΧΥΟΥΝ
ΓΙΑ ΧΩΡΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ;

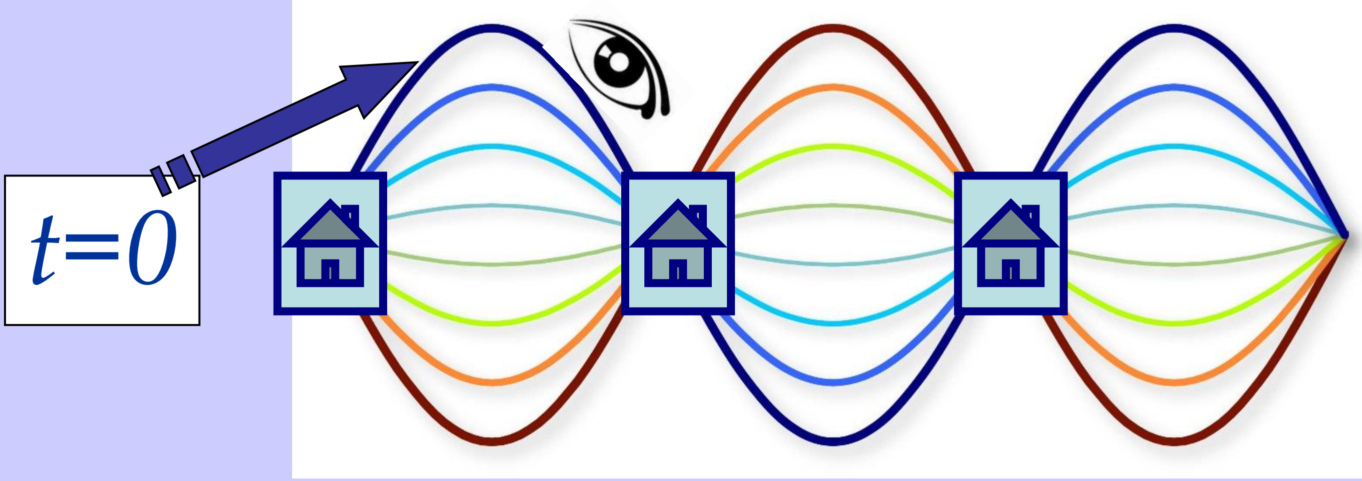
$$(\Delta E)_n(t) = \frac{1}{4} L\mu A_n{}^2 \omega_n{}^2 \cos^2(\omega_n t)$$

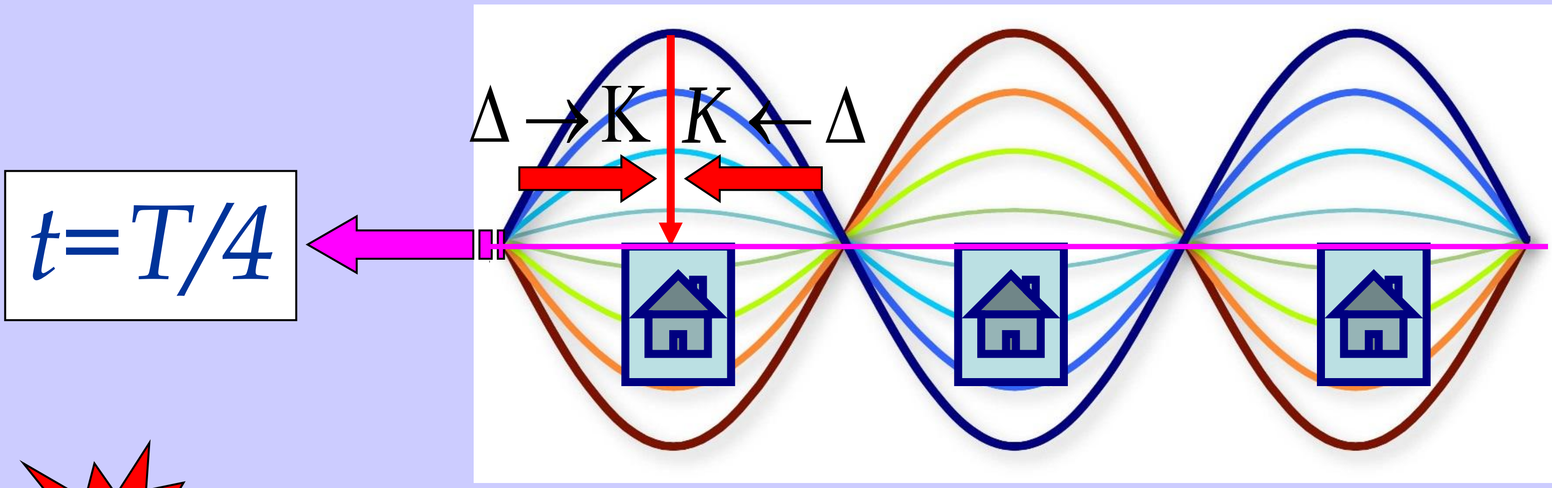
ΟΛΙΚΗ

ΙΣΧΥΟΥΝ
ΓΙΑ ΧΩΡΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ;

$$(KE)_n(t) = \frac{1}{4} L\mu A_n{}^2 \omega_n{}^2 \sin^2(\omega_n t)$$

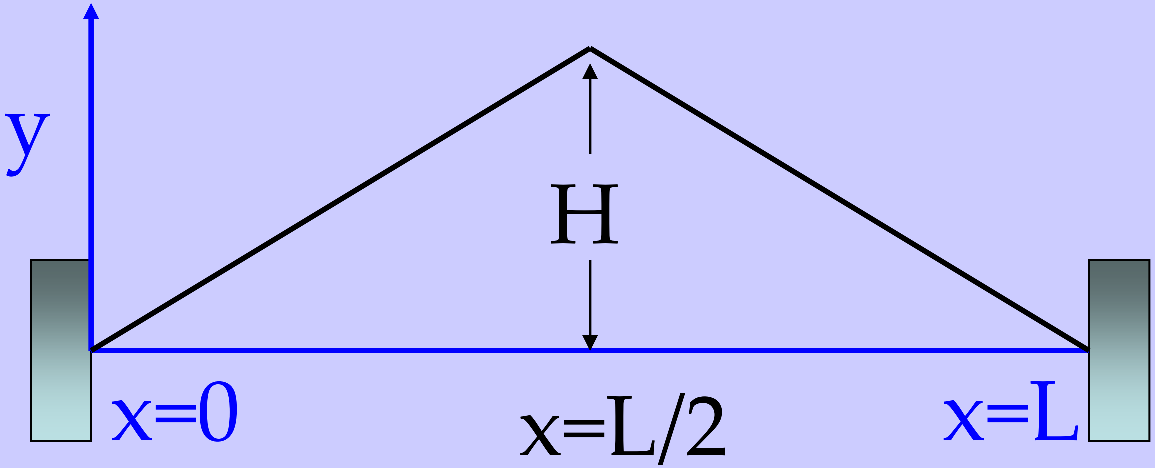






ΥΠΑΡΧΕΙ ΣΥΝΕΧΗΣ ΡΟΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΑΠΟ ΚΟΙΛΙΕΣ ΠΡΟΣ ΔΕΣΜΟΥΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ.

ΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



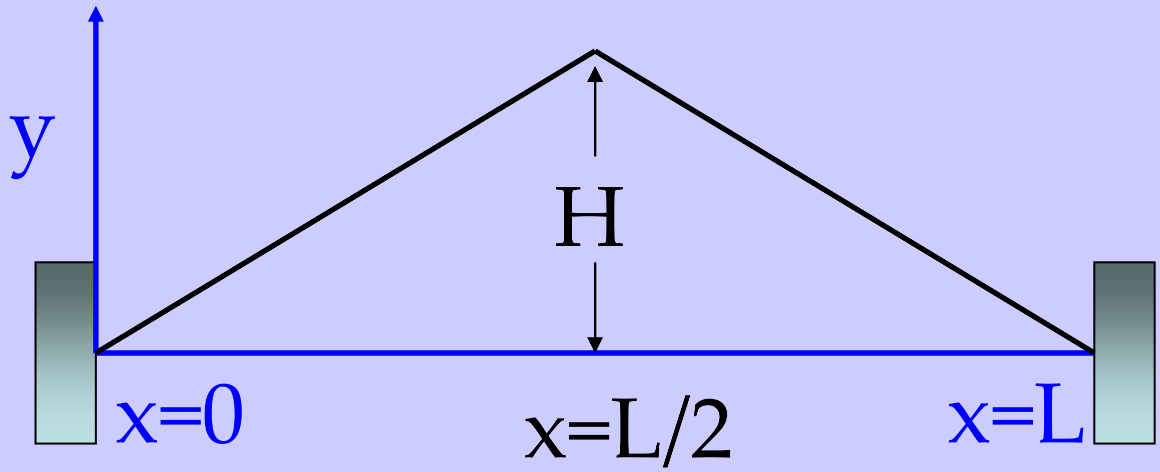
$$\phi_0(x) = \frac{2H}{L}x$$

$$0 \le x \le \frac{L}{2}$$

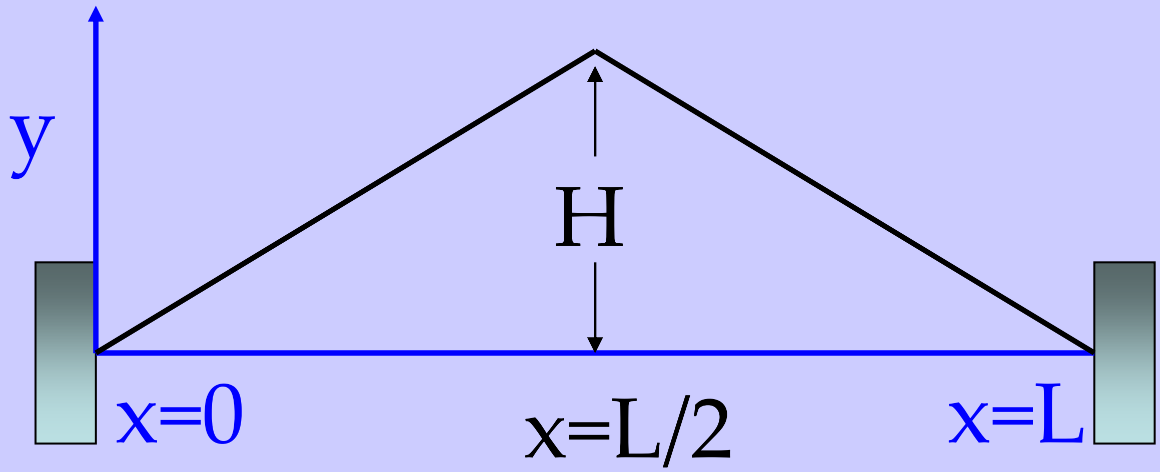
$$\phi_0(x) = 2H\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$\frac{L}{2} \le x \le L$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \phi_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$



$$A_n = \frac{8H}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$$



$$A_n = \frac{8H}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{1}{2} n\pi\right)$$

ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΤΟΥ L;

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$A_n = \frac{8H}{\pi^2 n^2}\sin(\frac{1}{2}n\pi)$$

$$A_1 = +\frac{8H}{\pi^2}$$

$$A_3 = -\frac{8H}{9\pi^2}$$

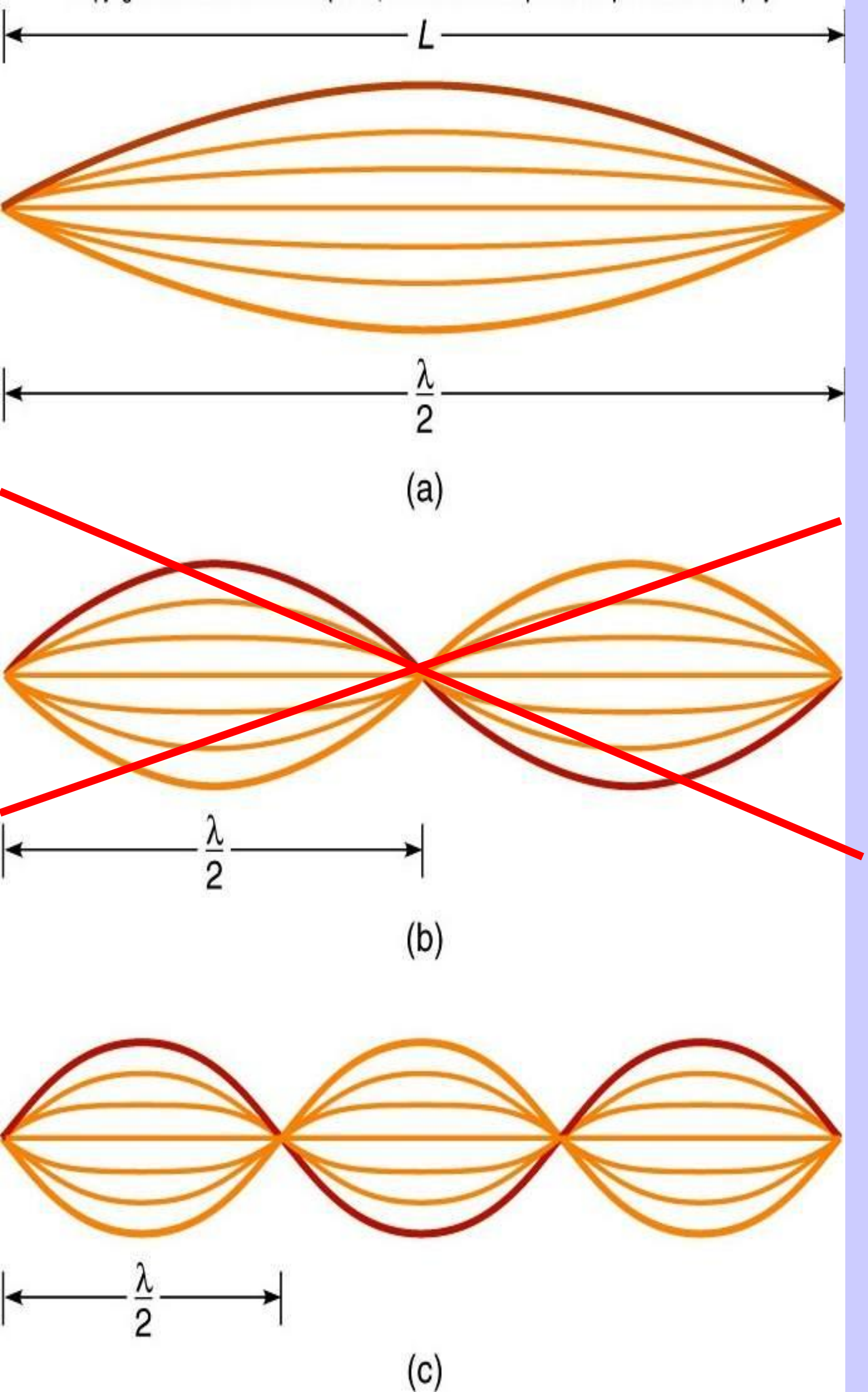
$$A_5 = +\frac{8H}{25\pi^2}$$

$$A_2 = 0$$

$$A_4 = 0$$

$$A_6 = 0$$

ΔΕΝ ΑΝΑΠΤΥΣΟΝΤΑΙ ΟΛΑ ΤΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ



ΓΙΑ ΤΗ ΔΕΔΟΜΕΝΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΑΝΑΠΤΥΣΟΝΤΑΙ ΜΟΝΟ ΤΑ ΠΕΡΙΤΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ.

ΣΥΝΟΨΗ

1. ΟΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ
ΑΠΟ ΜΟΝΕΣ ΤΟΥΣ
ΠΡΟΒΛΕΠΟΥΝ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ
ΤΩΝ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ
ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ **ΔΥΝΑΤΟ** ΝΑ ΑΝΑΠΤΥΧΘΟΥΝ.

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\nu_n = n\frac{\upsilon}{2L}$$

2. ΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ
ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ
ΕΜΠΛΕΚΟΝΤΑΙ
ΣΤΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΩΝ
ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΝ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ
ΤΩΝ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ.

3. **ΟΙ ΕΞΕΙΔΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ**

ΚΑΘΟΡΙΖΟΥΝ

ΠΟΙΟ

ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ

ΣΤΑΣΙΜΩΝ

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ

ΘΑ ΔΙΕΓΕΡΘΕΙ

ΑΠΟ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ

ΠΟΥ ΕΠΙΤΡΕΠΟΥΝ ΝΑ ΑΝΑΔΥΘΟΥΝ

ΟΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.

ΤΙ ΜΑΣ ΛΕΕΙ Η:

$$\phi_0(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)$$

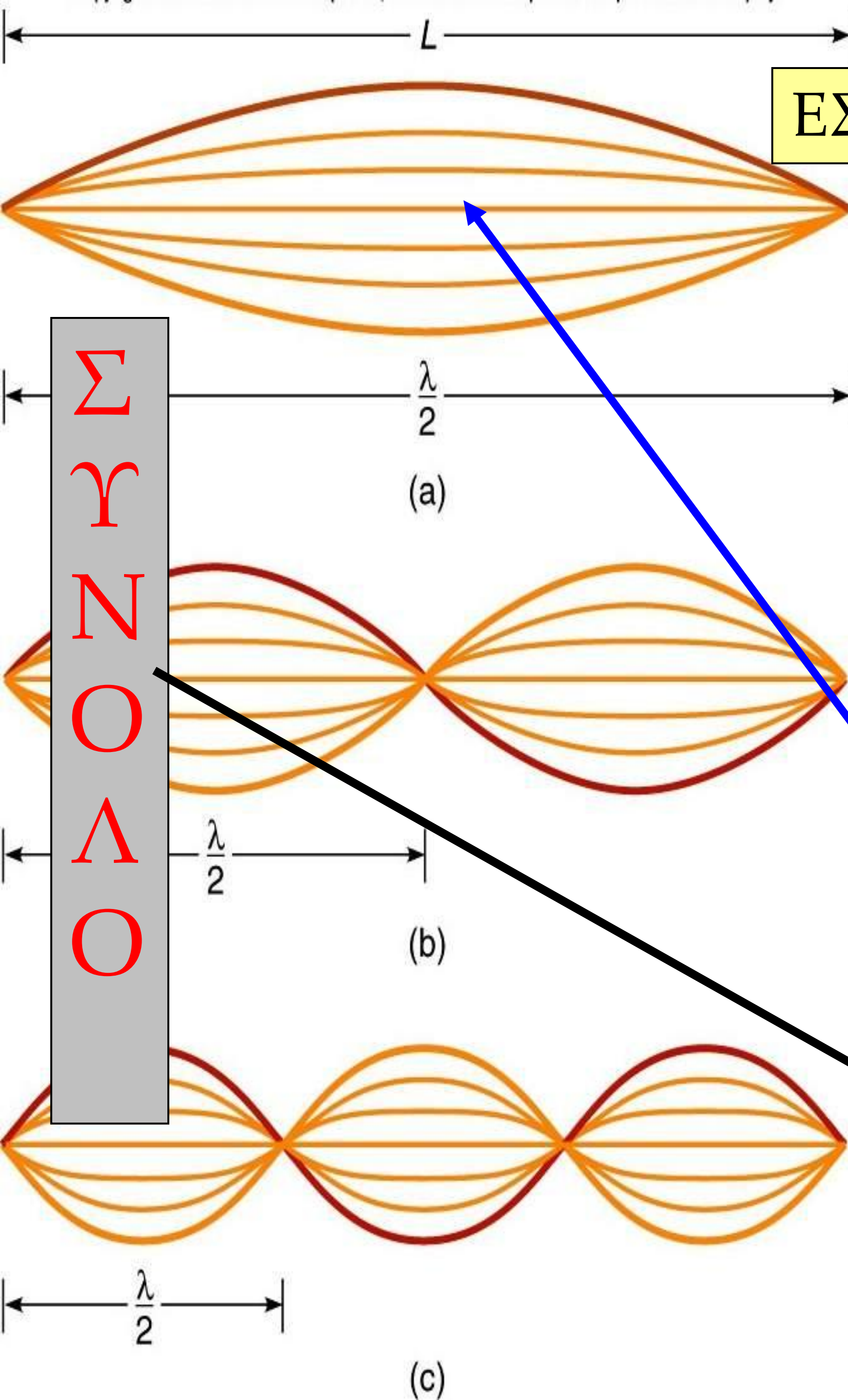
ΑΝΑΔΥΟΜΕΝΟ
ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ ΑΠΟ
ΑΡΧΙΚΕΣ
ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$\lambda_n = \frac{2L}{n_{\text{ΕΠΙΤΡΕΠΤΑ}}}$$

ΕΠΙΤΡΕΠΤΟ
ΣΥΝΟΛΟ ΑΠΟ
ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ
ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

n = 1,2,3,…



ΣΥΝΟΛΟ

ΕΣΤΩ:

$$\phi_0(x) = A_1 \sin(\frac{\pi x}{L})$$

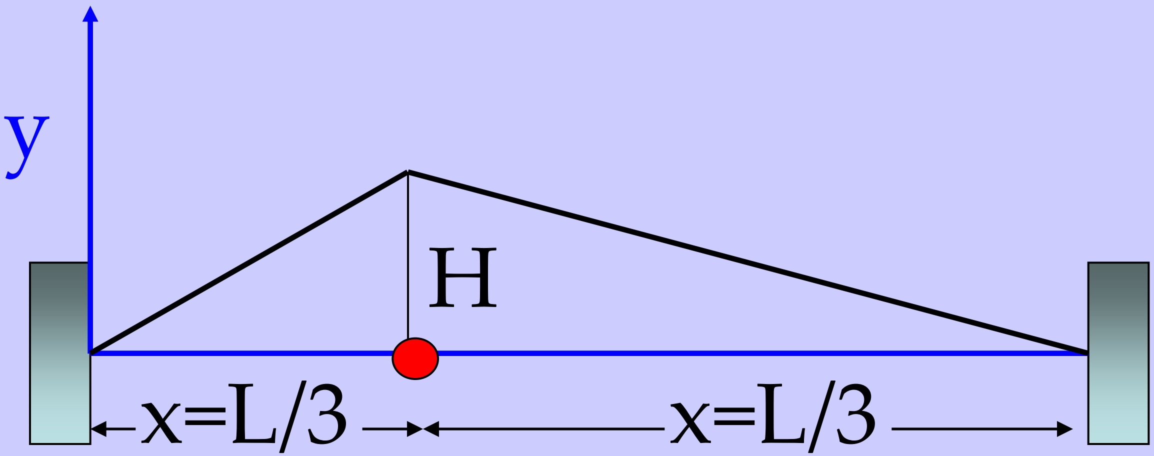
$$\phi_0(x) = A_1 \sin(\frac{2\pi x}{2L}) =$$

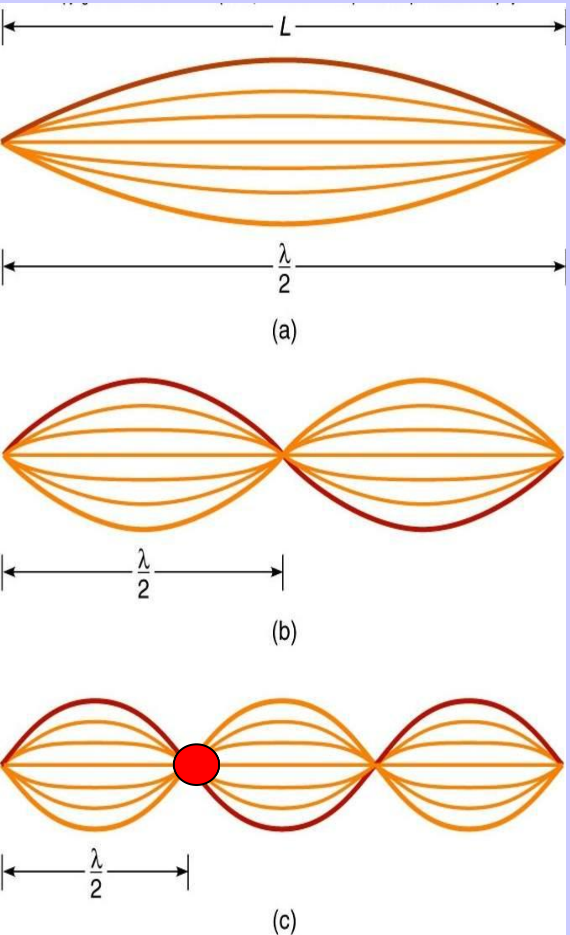
$$= A_1 \sin(\frac{2\pi x}{\lambda_1})$$

$$\phi_0(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right)$$

$$\mathrm{n} = 1$$

ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ





ΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ
ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΑΠΟ ΤΑ
ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ
ΠΟΥ ΔΕΝ ΘΑ
ΑΝΑΠΤΥΧΘΕΙ;

Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΔΕΝ ΙΣΟΚΑΤΑΝΕΜΕΤΑΙ

$$(ME)_n = \frac{1}{4}(L\mu)A_n^{\ 2}\omega_n^{\ 2}$$

$$A_{n=\pi\varepsilon\rho.} = \frac{8H}{\pi^2 n^2}$$

$$(ME)_n = \frac{16H^2}{\pi^4}(L\mu)\frac{\omega_n^{\ 2}}{n^4}$$

$$(ME)_n = \frac{16}{\pi^2}\frac{H^2 T}{L}\frac{1}{n^2}$$

$$(ME)_n = E_n = \frac{16}{\pi^2}\frac{H^2 T}{L}\frac{1}{n^2}$$

$$E_1$$

$$E_3 = \frac{1}{9}E_1$$

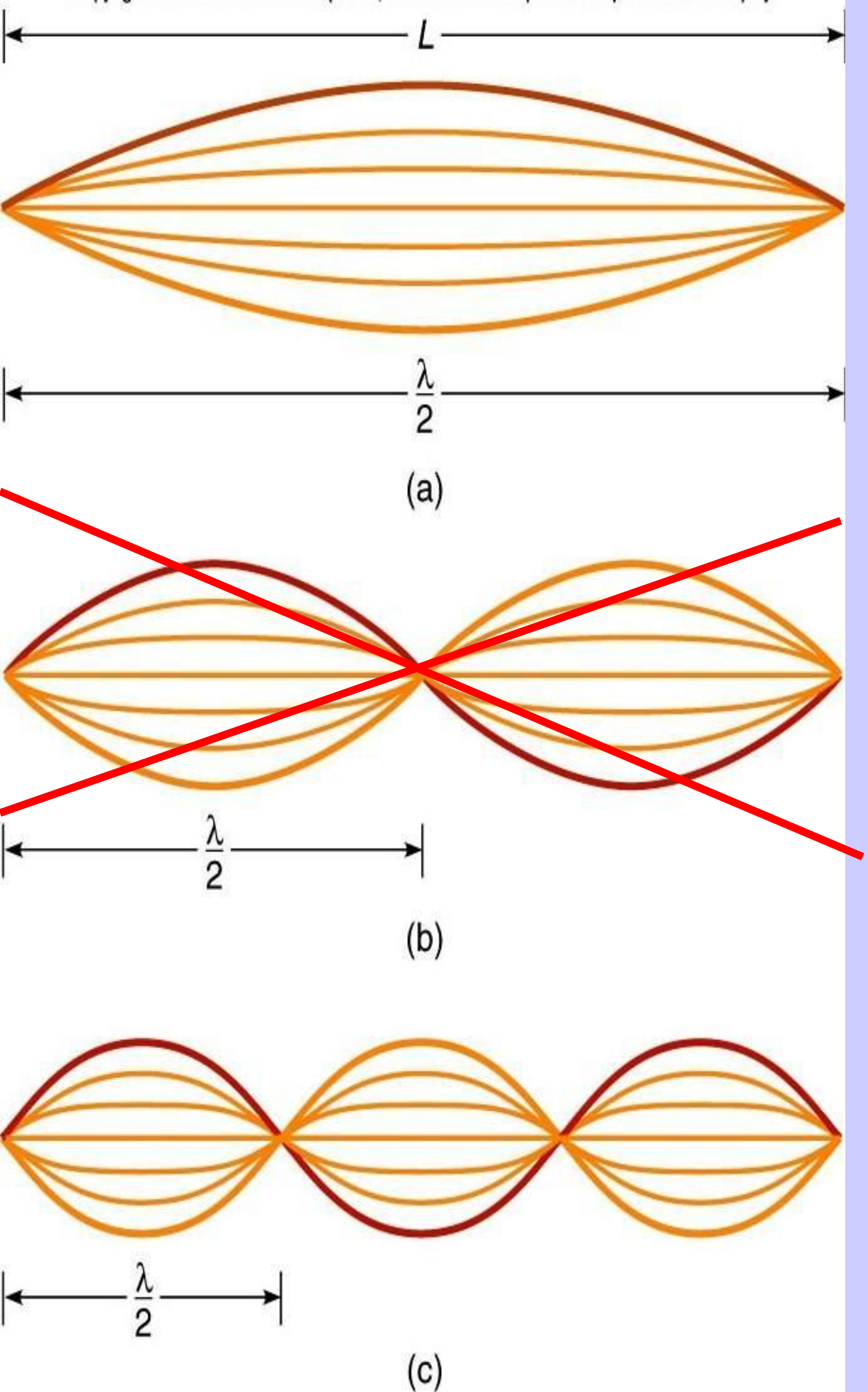
$$E_5 = \frac{1}{25}E_1$$

Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΟΥ ΔΙΝΕΤΑΙ
ΓΙΑ ΤΗ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗΣ
ΔΕΝ ΙΣΟΚΑΤΑΝΕΜΕΤΑΙ
ΣΤΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ
ΠΟΥ ΑΝΑΠΤΥΣΟΝΤΑΙ
ΟΙ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ
ΤΩΝ ΣΤΑΣΙΜΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΝΑΙ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ.
ΔΡΑΣΤΙΚΗ ΜΕΙΩΣΗ
ΜΕ ΤΗΝ ΑΥΞΗΣΗ ΤΟΥ
n

$$(\mathrm{ME})_n = \frac{16}{\pi^2}\,\frac{H^2 T}{L}\,\frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=\pi\varepsilon\rho\iota\tau.} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$(\mathrm{ME})_{\mathrm{O\Lambda IKH}} = \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\frac{L}{2}}\right)^2 L = \frac{2T(H)^2}{L}$$



ΓΙΑΤΙ ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ
Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ
ΜΕ ΤΗΝ ΑΥΞΗΣΗ ΤΟΥ
n;

$$A_1 = +\frac{8H}{\pi^2}$$

$$A_3 = -\frac{8H}{9\pi^2}$$

$$A_5 = +\frac{8H}{25\pi^2}$$

$$E_1$$

$$E_3 = \frac{1}{9}E_1$$

$$E_5 = \frac{1}{25}E_1$$

Η ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΣΥΣΤΟΛΗ
ΠΟΛΥ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ
ΤΗΣ ΔΙΑΜΗΚΟΥΣ

ΠΟΙΑ ΘΑ ΗΤΑΝ Η ΣΥΝΕΠΕΙΑ
ΑΝ ΟΛΟ ΤΟ
ΣΥΝΕΧΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΟ ΦΑΣΜΑ
ΗΤΑΝ ΔΙΑΘΕΣΙΜΟ
Ή
ΕΙΧΑΜΕ
ΙΣΟΚΑΤΑΝΟΜΗ
ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ;

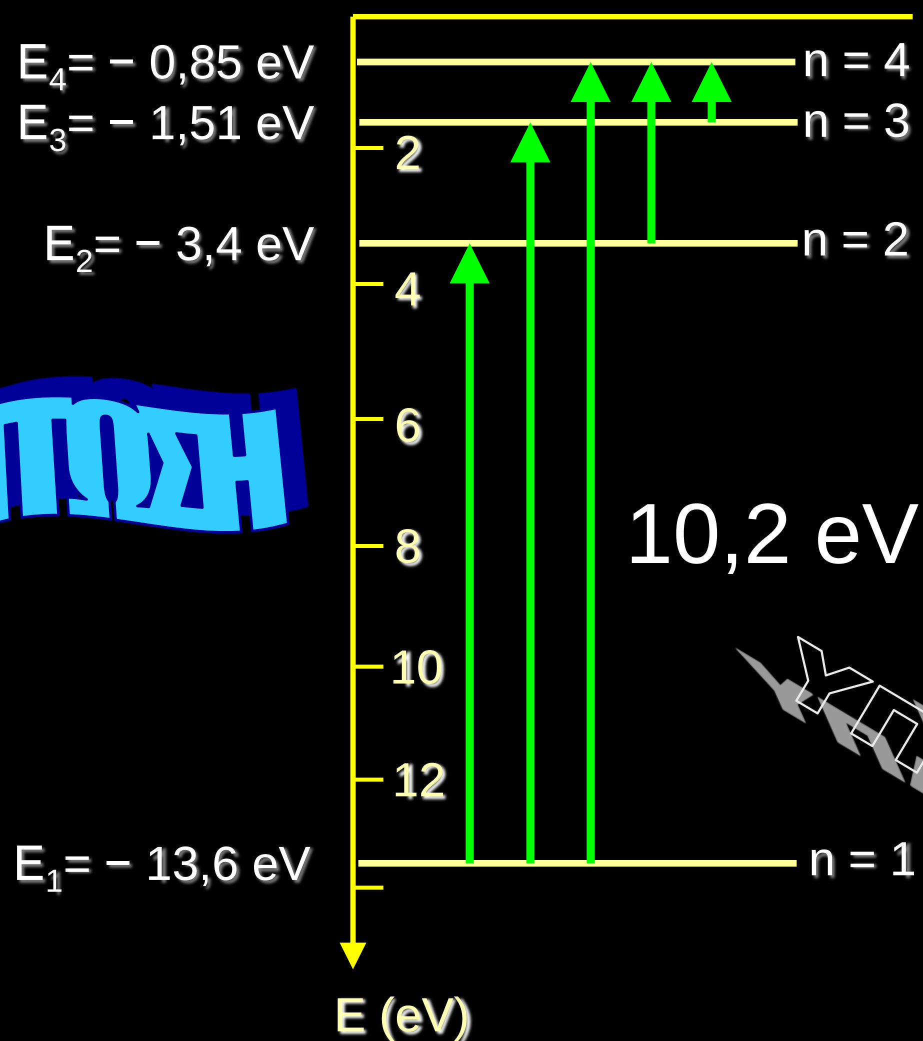
Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΘΕ ΕΝΟΣ
ΑΠΟ ΤΑ ΑΠΕΙΡΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ
ΘΑ ΕΤΕΙΝΕ ΣΤΟ ΜΗΔΕΝ.

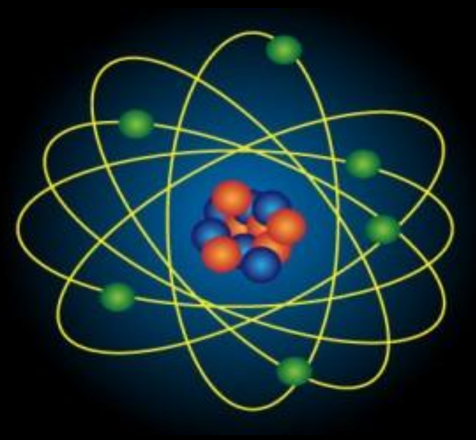
ΔΕΝ ΘΑ ΥΠΗΡΧΕ ΜΟΥΣΙΚΗ!

ΠΟΙΑ ΘΑ ΗΤΑΝ Η ΣΥΝΕΠΕΙΑ
ΑΝ ΟΛΟ ΤΟ
ΣΥΝΕΧΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΟ ΦΑΣΜΑ
ΗΤΑΝ ΔΙΑΘΕΣΙΜΟ
Ή
ΕΙΧΑΜΕ
ΙΣΟΚΑΤΑΝΟΜΗ
ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ;

E~~ART~~H

Διάγραμμα ενεργειακών σταθμών





ΚΒΑΝΤΩΣΗ

ΓΙΑΤΙ ΥΠΑΡΧΟΥΜΕ;

Η ΚΒΑΝΤΩΣΗ
ΤΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ ΣΤΑ ΑΤΟΜΑ
ΟΔΗΓΕΙ
ΣΤΗΝ ΑΤΟΜΙΚΗ ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑ.

ΤΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΓΕΓΟΝΟΣ
ΟΤΙ ΖΟΥΜΕ
ΜΑΣ ΟΔΗΓΟΥΣΕ ΣΤΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΩΣΗΣ
ΤΩΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑΩΝ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΟΛΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟΣΟ ΑΠΛΑ
ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΟΥΣ. . .

Η ΦΥΣΗ ΔΕΝ ΚΑΝΕΙ ΤΙΠΟΤΕ ΤΟ ΑΣΚΟΠΟ
ΤΙΠΟΤΑ ΤΟ ΠΕΡΙΤΤΟ
Αριστοτέλης

ΟΛΑ ΓΙΝΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΛΟΓΟ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΗ
Λεύκιππος

Η ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ ΤΗΣ ΦΥΣΕΩΣ!

ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΡΚΕΤΟ
ΝΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΥΜΕ
ΜΕ ΣΑΦΗΝΕΙΑ
ΜΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΡΟΠΟ
ΤΟ ΤΙ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ.

ΠΡΕΠΕΙ
ΝΑ ΚΑΤΑΝΟΟΥΜΕ
ΓΙΑΤΙ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ
ΟΠΩΣ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ.
ΠΟΙΕΣ ΘΑ ΗΤΑΝ ΣΕ ΑΛΛΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ
ΟΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ.

ΓΙΑΤΙ Η ΧΟΡΔΗ ΚΑΝΕΙ ΤΗΝ ΕΠΙΛΟΓΗ ΝΑ ΜΟΙΡΑΣΕΙ ΑΝΙΣΑ ΤΗΝ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΠΟΥ ΤΗΣ ΔΩΣΑΜΕΣΤΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ;

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Οι Εικόνες, τα Σχήματα, τα Διαγράμματα και οι Φωτογραφίες που χρησιμοποιούνται στο παρόν έργο αποτελούν αντικείμενο πνευματικής ιδιοκτησίας (copyright)