ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2010

Θέμα 1. (3.5 βαθμ.) Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/3$ ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ, εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, 3 υπηρέτες και απεριόριστη χωρητικότητα με αποθαρρυνόμενους πελάτες. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι ένας πελάτης που βρίσκει $n \leq 2$ άτομα στο σύστημα (δηλαδή τουλάχιστον ένα ελεύθερο υπηρέτη) εισέρχεται σε αυτό με πιθανότητα 1, ενώ ένας πελάτης που βρίσκει $n \geq 3$ άτομα εισέρχεται σε αυτό με πιθανότητα $\frac{3}{n+1}$. Θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

(α) Αιτιολογήστε σύντομα γιατί η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών είναι διαδικασία γέννησης-θανάτου και σχεδιάστε το αντίστοιχο διάγραμμα ρυθμών μετάβασης. Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών $\{Q(t)\}$, όταν είναι ευσταθές.

(β) Να υπολογιστεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των πελατών που αποχωρούν χωρίς να εξυπηρετηθούν (μακροπρόθεσμο ποσοστό χαμένων πελατών).

(γ) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη, λαμβάνοντας υπόψιν όλους τους πελάτες (είτε εισέρχονται στο σύστημα είτε όχι). Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα ενός πελάτη, δεδομένου ότι βρίσκει κατά την άφιξή του n πελάτες και εισέρχεται σε αυτό.

Θέμα 2. (3.5 βαθμ.) Θεωρούμε τη $M/M/1$ ουρά με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις ($M^c/M/1$ ουρά). Ο ρυθμός αφίξεων των ομάδων είναι λ και ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ. Κάθε αφικνούμενη ομάδα αποτελείται από 2 ή 3 πελάτες με πιθανότητα $\frac{2}{3}$ και $\frac{1}{3}$ αντίστοιχα. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών στο σύστημα.

(α) Αιτιολογήστε σύντομα γιατί η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ που καταγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, σχεδιάστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της και γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή (p_n).

(β) Βρείτε τη συνθήκη ευστάθειας του συστήματος και προσδιορίστε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$.

(γ) Βρείτε το μέσο χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα. Βρείτε το μέσο χρόνο από τη στιγμή που μια ομάδα εισέρχεται στο σύστημα μέχρι τη στιγμή που ο τελευταίος πελάτης της αναχωρεί από αυτό.

Θέμα 3. (1.5 βαθμ.) Να μοντελοποιηθεί ως Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου η $M/E_2/1/3$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ (ισοδύναμα μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $\frac{1}{\mu}$). Περιγράψτε τις καταστάσεις και σχεδιάστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

Θέμα 4. (2.5 βαθμ.) Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης στο οποίο φθάνουν πελάτες δύο τύπων 1 και 2, σύμφωνα με δυο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Το σύστημα έχει 2 υπηρέτες και δεν υπάρχει χώρος αναμονής (δηλαδή στο σύστημα εισέρχονται μόνο οι πελάτες που κατά την άφιξή τους μπορούν να αρχίσουν άμεσα την εξυπηρέτησή τους ενώ οι υπόλοιποι φεύγουν). Κάθε πελάτης τύπου 1 δεσμεύει μόνο έναν από τους δυο υπηρέτες για να εξυπηρετηθεί ενώ κάθε πελάτης τύπου 2 δεσμεύει και τους δυο υπηρέτες για να εξυπηρετηθεί. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης των πελατών είναι εκθετικοί με ρυθμό μ και για τους δυο τύπους πελατών (δηλαδή όταν εξυπηρετείται ένας πελάτης τύπου 1 δεσμεύει έναν υπηρέτη για εκθετικό χρόνο με παράμετρο μ ενώ αν εξυπηρετείται ένας πελάτης τύπου 2 τότε δεσμεύονται και οι δυο υπηρέτες για εκθετικό χρόνο με παράμετρο μ και απελευθερώνονται ταυτόχρονα μόλις τελειώσει η εξυπηρέτηση του πελάτη).

(α) Να μοντελοποιηθεί ως Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου το σύστημα. Περιγράψτε τις καταστάσεις και σχεδιάστε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

(β) Βρείτε τα μακροπρόθεσμα ποσοστά των χαμένων πελατών τύπου 1 και 2 (δηλαδή βρείτε τις πιθανότητες άμεσης αποχώρησης για τους πελάτες τύπου 1 και 2).

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!