ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ – ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2006

Θέμα 1^o: Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, όπου κάθε πελάτης που βρίσκεται στο σύστημα έχει χρόνο υπομονής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο μ και μόλις αυτός συμπληρωθεί ο πελάτης αναχωρεί (αυτό ισχύει τόσο για τους πελάτες που βρίσκονται στο χώρο αναμονής (ουρά) όσο και για τον πελάτη που εξυπηρετείται).

(α) Αιτιολογήστε σύντομα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της εκθετικής κατανομής, ότι η στοχαστική διαδικασία $\{Q(t)\}$ του αριθμού των πελατών στο σύστημα είναι διαδικασία γέννησης θανάτου με ρυθμούς γέννησης $\lambda_n = \lambda, n = 0,1,2,...$ και ρυθμούς θανάτου $\mu_n = (n+1)\mu, n = 1,2,3,...$.

(β) Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Στην περίπτωση αυτή να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) της $\{Q(t)\}$. Επιπλέον, να βρεθούν οι οριακές κατανομές (r_n) και (d_n) των εμφυτευμένων διαδικασιών $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα.

(γ) Να βρεθεί το ποσοστό των πελατών που εξυπηρετούνται (και δεν φεύγουν από το σύστημα επειδή έχασαν την υπομονή τους).

(δ) Να βρεθούν ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα και ο μέσος χρόνος συνεχούς λειτουργίας του συστήματος $E[Y]$.

Θέμα 2^o: Θεωρούμε την M/M/1 ουρά με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις (M^c/M/1). Ο ρυθμός αφίξεων ομάδων είναι λ, ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ και κάθε αφικνούμενη ομάδα αποτελείται πάντα από K πελάτες. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών .

(α) Να αιτιολογήσετε ότι η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να κάνετε το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασής της.

(β) Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$ συναρτήσει των λ, μ και p_0.

(γ) Να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος και να υπολογιστεί η p_0.

(δ) Να βρεθεί συναρτήσει των πιθανοτήτων (p_n), η πιθανότητα ένας πελάτης αμέσως μετά την άφιξή του στο σύστημα να καταλάβει την n-οστή θέση (να έχει εμπρός του $n-1$ πελάτες).

Θέμα 3^o: (Ι) Να μοντελοποιηθούν ως Μαρκοβιανές αλυσίδες συνεχούς χρόνου οι $E_2/M/1/1$ και $M/E_2/1/2$ ουρές με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. (Περιγράψτε τις καταστάσεις και κάνετε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης).

(ΙΙ) Θεωρούμε ένα κλειστό δίκτυο 3 συστημάτων εξυπηρέτησης, όπου κάθε σύστημα έχει έναν υπηρέτη που μπορεί να εξυπηρετεί έναν πελάτη και δεν έχει χώρο αναμονής. Στο δίκτυο αυτό κυκλοφορούν 2 πελάτες με τον ακόλουθο τρόπο: Μόλις ένας πελάτης συμπληρώσει την εξυπηρέτησή του στο σύστημα i ο πελάτης αφήνει το σύστημα αυτό και πηγαίνει για νέα εξυπηρέτηση σε εκείνο από τα άλλα δυο συστήματα που είναι εκείνη τη στιγμή κενό (κάθε στιγμή δυο συστήματα είναι κατειλημμένα και ένα σύστημα είναι κενό). Αν οι χρόνοι εξυπηρέτησης στο σύστημα i είναι εκθετικοί με παράμετρο μ_i, $i = 1,2,3$ να βρεθεί το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα i είναι κενό.

(ΙΙΙ) Έστω D μια τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το χρόνο μεταξύ δυο διαδοχικών αναχωρήσεων στη στάσιμη $M/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Βρείτε, δεσμεύοντας στο αν η πρώτη αναχώρηση άφησε το σύστημα κενό ή όχι, τη συνάρτηση κατανομής της D. Τι είδους κατανομή είναι;

Να γραφούν και τα 3 θέματα. **Διάρκεια : 2 ώρες και 30 λεπτά.** **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**