ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ, ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Θέμα 1. (4 βαθμοί) Θεωρούμε μια απλή Μαρκοβιανή ουρά με χώρο καταστάσεων $\{0, 1, 2, \ldots\}$ και ρυθμούς αφίξεων και αναχωρήσεων

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{αν } n = 0, 1, 2, \ldots, K, \\ 2\lambda & \text{αν } n = K+1, K+2, \ldots \end{cases} \quad \text{και} \quad \mu_n = \mu,\ n = 1, 2, \ldots$$

αντίστοιχα, όπου $\lambda, \mu > 0$ και K δεδομένος θετικός ακέραιος θεωρούνται γνωστές παράμετροι του συστήματος. Θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

(α) (1.5 βαθμός) Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών $\{Q(t)\}$, όταν είναι ευσταθές.

(β) (1 βαθμός) Να βρεθεί ο μέσος ρυθμός αφίξεων στο σύστημα λ^*.

(γ) (1 βαθμός) Να βρεθεί η πιθανότητα ένας πελάτης να βρει κατά την άφιξη του στο σύστημα το πολύ K άτομα.

(δ) (0.5 βαθμός) Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος, δηλαδή η μέση χρονική διάρκεια από τη στιγμή που ένας πελάτης βρίσκει το σύστημα κενό μέχρι την επόμενη φορά που κάποιος πελάτης θα βρεί το σύστημα κενό.

Θέμα 2. (4 βαθμοί) Θεωρούμε τη $M/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, στην οποία συμβαίνουν ομαδικές αφίξεις μόνο όταν το σύστημα είναι κενό. Συγκεκριμένα, οι αφίξεις έχουν μέγεθος 1 όταν το σύστημα δεν είναι κενό αλλά έχουν μέγεθος i με πιθανότητα $(\frac{1}{2})^i$ για $i = 1, 2, \ldots$ όταν το σύστημα είναι κενό. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία που περιγράφει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα.

(α) (2 βαθμοί) Να βρείτε πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο) και στην περίπτωση που είναι να προσδιορίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$.

(β) (1.5 βαθμός) Βρείτε έναν τύπο για τον υπολογισμό των στάσιμων πιθανοτήτων p_n.

(γ) (0.5 βαθμός) Να βρεθεί ο μέσος ρυθμός αφίξεων στο σύστημα.

Θέμα 3. (3 βαθμοί) Θεωρούμε 2 ουρές O_1 και O_2 με 1 υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα η κάθε μία, συνδεδεμένες σε δίκτυο. Η ουρά O_1 έχει Poisson διαδικασία εξωτερικών αφίξεων με ρυθμό λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με ρυθμό μ. Κάθε αναχώρηση από την O_1 κατευθύνεται στην O_2 με πιθανότητα 1/2 ή αναχωρεί από το δίκτυο με πιθανότητα 1/2. Η O_2 έχει εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με ρυθμό 2μ και δεν έχει εξωτερικές αφίξεις. Κάθε αναχώρηση απο την O_2 επαναλαβάνει την εξυπηρέτησή της σε αυτή με πιθανότητα 1/4, κατευθύνεται στην O_1 με πιθανότητα 1/3 ή αναχωρεί από το δίκτυο με πιθανότητα 5/12.

(α) (1 βαθμός) Να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας του δικτύου. Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο και ο μέσος χρόνος παραμονής του στην ουρά 1 κατά τη διάρκεια μιας διέλευσης του από το δίκτυο.

(β) (1 βαθμός) Να βρείτε την πιθανότητα μια τυχαία χρονική στιγμή να υπάρχουν περισσότεροι πελάτες στην ουρά O_1 από την O_2.

(γ) (1 βαθμός) Να μοντελοποιήσετε ως Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου την $E_2/M/1/3$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ (περιγράψτε τις καταστάσεις, παραθέστε πίνακα καταστάσεων, επόμενων καταστάσεων και αντίστοιχων χρόνων και σχεδιάστε το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασης).

ΝΑ ΓΡΑΦΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΕ 2 $\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!