

Ουρές Αναμονής - 3^η δέσμη ασκήσεων

1. Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης μ , όπου ο χρόνος υπομονής κάθε πελάτη που περιμένει έχει την εκθετική κατανομή με παράμετρο ν και μόλις αυτός συμπληρωθεί ο πελάτης αναχωρεί. Αιτιολογήστε γιατί η στοχαστική διαδικασία είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και βρείτε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης της. Για την περίπτωση που $\nu = \mu$, βρείτε την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα (σε συνεχή χρόνο).
2. Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ , με αποθαρρυνόμενους πελάτες, όπου κάθε πελάτης που βρίσκει n πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξη του αναχωρεί με πιθανότητα $q_0 = \frac{1}{4}$ και $q_n = \frac{3}{4}$ για $n > 0$. Να βρεθούν:
 - a. η συνθήκη στασιμότητας(ευστάθειας) για το σύστημα,
 - b. οι κατανομές (p_n) , (r_n) και (d_n) του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο, σε στιγμές αφίξεων και σε στιγμές αναχωρήσεων, όταν υπάρχουν και
 - c. το ποσοστό των χαμένων πελατών.
3. Θεωρούμε μια απλή Μαρκοβιανή ουρά με ρυθμούς αφίξεων και αναχωρήσεων $\lambda_n = \alpha^n \lambda$, $(n \geq 0)$ και $\mu_n = n \alpha^n \mu$, $(n \geq 1)$ αντίστοιχα, όπου $\alpha \in (0, 1)$, $\lambda, \mu > 0$ γνωστές παράμετροι.
 - a. Πότε η ουρά είναι στάσιμη (ευσταθής); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_j) του αριθμού των πελατών $Q(t)$ στο σύστημα. Τι είδους κατανομή είναι;
 - b. Να βρεθούν οι κατανομές (r_j) και (d_j) των εμφυτευμένων διαδικασιών $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα. Τι κατανομές είναι;
 - c. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα, καθώς και οι μέσοι χρόνοι συνεχούς λειτουργίας, αργίας και κύκλου απασχόλησης $E[Y]$, $E[I]$ και $E[Z]$ αντίστοιχα.
4. Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/K/K$ ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ , όπου ορισμένοι πελάτες αποχωρούν από το σύστημα αμέσως μόλις αφιχθούν χωρίς να εξυπηρετηθούν (αποθαρρυνόμενοι πελάτες). Συγκεκριμένα, κάθε πελάτης που βρίσκει n άλλα άτομα στο σύστημα κατά την άφιξή του αναχωρεί με πιθανότητα $\frac{n}{K}$, $n = 0, 1, \dots, K$.
 - a. Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών $Q(t)$ στο σύστημα. Τι είδους κατανομή είναι;
 - b. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των άμεσα αποχωρούντων πελατών (χαμένων πελατών).
 - c. Να βρεθούν οι οριακές κατανομές (r_n) και (d_n) των εμφυτευμένων διαδικασιών $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα, που αναφέρονται στους πραγματικούς πελάτες (σε αυτούς δηλαδή που εισέρχονται τελικά στο σύστημα).
 - d. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα, λαμβάνοντας υπόψιν όλους τους πελάτες. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S']$ ενός πελάτη στο σύστημα, λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τους πελάτες που εξυπηρετούνται.
 - e. Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος.