03.11.08 6° μάθημα

Μαρκοβιανές Ουρές

Μέθοδος Πιθανογεννητριών

① Ορισμοί - Υπενθυμίσεις

1. Μαρκοβιανή ουρά ⟺ Q(t) = # πελατών τη στιγμή t είναι Μαρκ

2. Βήματα Μελέτης : 1° Μαρκοβιανοποίηση (Πίνακας μεταβάσεων-χρόνων / Διάγραμμα)

2° Εξισώσεις Ισορροπίας

3° Προσδιορισμός στάσιμης κατανομής $(p_n)$

α. Τύποι γνωστοί για απλές Μαρκ. ουρές
β. Πιθανογεννήτριες

Πιθανογεννήτριες

Βρίσκω την $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ και από αυτή την $(p_n)$

ή κάποια στοιχεία της.

② Μια ιδιότητα της διαδικασίας Poisson

Έστω $\{A(t)\}$ διαδ. Poisson με ρυθμό $\lambda$
($A(t)$ = # γεγονότων ως τη στιγμή $t$)

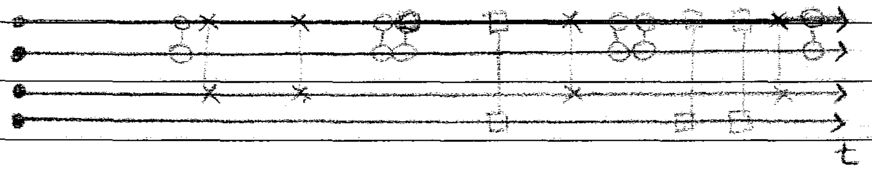
Κάθε γεγονός είναι τύπου $k$ με πιθ. $g_k$, $k=1,2,\dots$

Τότε οι διαδ. $\{A_k(t)\}$, $k=1,2,\dots$

$A_k(t)$ = # γεγονότων τύπου $k$ ως το $t$ είναι ανεξ.

και η $\{A_k(t)\}$ είναι Poisson ρυθμού $\lambda g_k$

π.χ. αφίξεις σε τράπεζα → για κατάθεση ○ 0,3
→ για ανάληψη × 0,5
με ρυθμό $\lambda = 10$ πελ/λεπτό → για πληρωμή □ 0,2



③ M/M/1 ουρά με ομαδικές αφίξεις
$M^c$/M/1 ουρά
compound

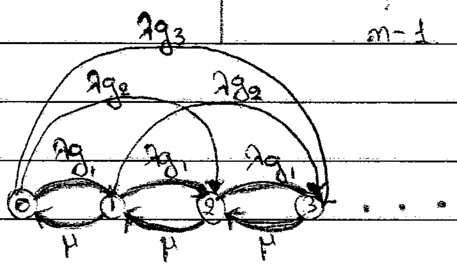
- Poisson ($\lambda$) διαδικασία αφίξεων ομάδων πελατών
- $g_k$ πιθ. μια αφικνούμενη ομάδα να έχει μέγεθος $k$, $k=1,2,\dots$
- Exp ($\mu$) χρόνοι εξυπηρέτησης ανά πελάτη
- 1 υπηρέτης
- $\infty$ χωρητικότητα
- FCFS πειθαρχία

$Q(t) = \#$ πελατών

$p_n = \lim_{t \to \infty} P_r\,[Q(t) = n]$

| Κατάσταση | Επόμ. κατάσταση | Χρόνος |
|---|---|---|
| $0$ | $k,\ k \geq 1$ | $Exp(\lambda g_k)$ |
| $n,\ n \geq 1$ | $n+k,\ k \geq 1$ | $Exp(\lambda g_k)$ |
| | $n-1$ | $Exp(\mu)$ |

$\Rightarrow$ $Q(t)$ Μαρκ



Εξισώσεις ισορροπίας

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda g_1 + \lambda g_2 + \lambda g_3 + \dots)\,p_0 &= \mu p_1 \\
(\lambda g_1 + \lambda g_2 + \lambda g_3 + \dots + \mu)\,p_1 &= \lambda g_1 p_0 + \mu p_2 \\
(\lambda g_1 + \lambda g_2 + \lambda g_3 + \dots + \mu)\,p_2 &= \lambda g_2 p_0 + \lambda g_1 p_1 + \mu p_3
\end{aligned}\right\} (\Leftrightarrow)$$

$\vdots$

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \quad (1)$$

$$(\lambda + \mu)\,p_n = \mu p_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda g_{n-k}\, p_k, \quad n \geq 1 \quad (2)$$

④ Επίλυση με Πιθανογεννήτριες $\quad (f_X * g_Y)(n) = \sum_{k=0}^{n} f_X(k)\, g_Y(n-k)$

$$\Updownarrow$$

Θέλω να βρω την πιθανογεννήτρια της άγνωστης κατανομής $\quad P_{X+Y}(z) = P_X(z)\, P_Y(z)$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \quad |z| \leq 1$$

γιατί τότε $\quad p_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots$

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = P'(1)$$

$$E[Q(Q-1)(Q-2)\cdots(Q-n+1)] = P^{(n)}(1)$$

↑
παραγοντική ροπή
n-τάξης του Q

$$Var[Q] = E[Q^2] - (E[Q])^2 = E[Q(Q-1)] + E[Q] - (E[Q])^2 =$$

$$= P''(1) + P'(1) - (P'(1))^2$$

⑤ Επίλυση στο σχμ. μοντέλο

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \quad |z| \leq 1$$

Να εκφραστεί συναρτήσει $\lambda, \mu,\ G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k, \quad |z| \leq 1$

$$① \cdot x z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} ② \, x z^n \Rightarrow$$

$$\lambda p_0 z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda+\mu) p_n z^n = \mu p_1 z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu p_{n+1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda g_{n-k} p_k z^n \Rightarrow$$

$n \geq 1$
$n \geq k+1$

$$\lambda p_0 + (\lambda+\mu)(P(z)-p_0) = \underbrace{\mu \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^n}_{\frac{\mu}{z}\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^{n+1}} + \underbrace{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k \sum_{n=k+1}^{\infty} g_{n-k} z^n}_{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \sum_{n=k+1}^{\infty} g_{n-k} z^{n-k}}$$

$$\underbrace{\frac{\mu}{z}\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^{n+1}}_{\frac{\mu}{z}(P(z)-p_0)} + \underbrace{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \sum_{n=k+1}^{\infty} g_{n-k} z^{n-k}}_{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j}$$

$$\frac{\mu}{z}(P(z)-p_0) + \underbrace{\lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j}_{\lambda G(z) P(z)}$$

$$\Rightarrow \lambda p_0 + (\lambda+\mu)(P(z)-p_0) = \frac{\mu}{z}(P(z)-p_0) + \lambda G(z) P(z)$$

$$\Rightarrow \lambda p_0 z + (\lambda+\mu) z P(z) - (\lambda+\mu) p_0 z = \mu P(z) - \mu p_0 + \lambda z G(z) P(z)$$

$$\Rightarrow [(\lambda+\mu) z - \mu - \lambda z G(z)] P(z) = \mu p_0 (z-1)$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{\mu p_0 (z-1)}{(\lambda+\mu) z - \mu - \lambda z G(z)}$$

Λείπει η $p_0$ που θα υπολογιστεί από την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow P(1) = 1.$$

Χρησιμοποιώ L'Hospital.

$$1 = \lim_{z \to 1} P(z) = \frac{\mu p_0}{(\lambda+\mu) - \lambda \cdot 1 \cdot G'(1) - \lambda G(1)} \qquad \Rightarrow p_0 = \frac{\mu - \lambda m}{\mu} = 1 - \frac{\lambda m}{\mu}$$

$G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k g_k = m =$ μέσο μέγεθος αφικνούμενης ομάδας

$G(1) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k = 1$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda m}{\mu}\right)(z-1)}{(\lambda+\mu)z-\mu-\lambda z\, G(z)}$$

ρυθμός αφίξεων ομάδων ↓ (λ) — μέσο μέγεθος ομάδων ↙ (m)

Συνθήκη Ευσταθείας $\quad p_0 > 0 \iff 1-\frac{\lambda m}{\mu} > 0 \iff \lambda m < \mu$

$\lambda m$: ρυθμός αφίξεων πελατών — $\mu$: ρυθμός εξυπηρέτησης

⑥ Ειδική Περίπτωση Ι: Μεμονωμένες Αφίξεις

$$g_k = \begin{cases} 1, & k=1 \\ 0, & k=2,3,\dots \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k = z$$

$\Downarrow$

$$m = 1$$

$\Downarrow$

$$P(z) = \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)(z-1)}{(\lambda+\mu)z-\mu-\lambda z^2} = \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)(z-1)}{\mu(z-1)-\lambda(z^2-z)} = \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)(z-1)}{(\mu-\lambda z)(z-1)} =$$

$$= \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}z} = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}z} =$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n z^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n z^n$$

$$\Rightarrow p_n = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n=0,1,\dots$$

Γεννήτριες

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k, \quad |t|<1$$

$$(1+t)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} t^k$$

$$(1-t)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+k-1}{k} t^k, \quad |t|<1$$

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$$

⑦ Ειδική Περίπτωση II : Γεωμετρικό μέγεθος ομάδων

$$g_k = (1-a)\,a^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$\Downarrow$

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-a)\,a^{k-1} z^k = (1-a)\,z \sum_{k=1}^{\infty} (az)^{\overbrace{(k-1)}^{j}} = (1-a)\,z \sum_{j=0}^{\infty} (az)^j =$$

$$= \frac{(1-a)z}{1-az}$$

$$m = G'(1) = \frac{(1-a)(1-az) - (1-a)z(-a)}{(1-az)^2}\Bigg|_{z=1} = \frac{(1-a)^2 + (1-a)a}{(1-a)^2} = \frac{1}{1-a}$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)(z-1)}{(\lambda+\mu)z - \mu - \lambda z\,\frac{(1-a)z}{1-az}} = \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)(z-1)(1-az)}{((\lambda+\mu)z-\mu)(1-az) - \lambda z(1-a)z} =$$

$$= \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)(z-1)(1-az)}{(\lambda+\mu)z - a(\lambda+\mu)z^2 - \mu + \mu a z - \lambda z^2 + \lambda a z^2} = \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)(z-1)(1-az)}{-(a\mu+\lambda)z^2 + (\lambda+\mu+\mu a)z - \mu} =$$

$$= \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)(z-1)(1-az)}{-(a\mu+\lambda)z(z-1) + \mu(z-1)} = \frac{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)(1-az)}{\mu-(a\mu+\lambda)z} =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)(1-az)}{1-\left(a+\frac{\lambda}{\mu}\right)z} \underset{\uparrow}{=} \left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)(1-az)\sum_{k=0}^{\infty}\left(a+\frac{\lambda}{\mu}\right)^k z^k =$$

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(a+\frac{\lambda}{\mu}\right)^k z^k - \left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)a\sum_{k=0}^{\infty}\left(a+\frac{\lambda}{\mu}\right)^k z^{\overbrace{(k+1)}^{n}} =$$

$$= \left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(a+\frac{\lambda}{\mu}\right)^n z^n - \left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)a\sum_{n=1}^{\infty}\left(a+\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} z^n$$

$$\Rightarrow p_0 = \left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right) \quad \text{και} \quad p_n = \left(1-\frac{\lambda}{\mu(1-a)}\right)\left(a+\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}\left(a+\frac{\lambda}{\mu}-a\right), \; n \geq 1$$

⑧ Ειδική Περίπτωση III: Μέγιστο Μέγεθος Ομάδας = 2

$$g_k = \begin{cases} a, & k=1 \\ 1-a, & k=2 \\ 0, & k=3,4. \end{cases}$$

$\Downarrow$

$G(z) = az + (1-a)z^2$

$m = a\cdot 1 + (1-a)2 = 2-a$

$\Downarrow$

$$P(z) = \frac{\mu\left(1 - \frac{\lambda(2-a)}{\mu}\right)(z-1)}{(\lambda+\mu)z - \mu - \lambda a z^2 - \lambda(1-a)z^3} = \dots = \frac{c_1}{z_1 - z} + \frac{c_2}{z_2 - z} =$$

$$= \frac{c_1}{z_1} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{z_1}} + \frac{c_2}{z_2}\,\frac{1}{1-\frac{z}{z_2}}$$

$$\Rightarrow p_m = \frac{c_1}{z_1}\left(\frac{1}{z_1}\right)^m + \frac{c_2}{z_2}\left(\frac{1}{z_2}\right)^m, \quad m \geq 0$$

$$\Rightarrow p_m = \frac{c_1}{z_1^{\,m+1}} + \frac{c_2}{z_2^{\,m+1}}, \quad m = 0, 1, \dots$$

23.11.09 $7^o$ μάθημα

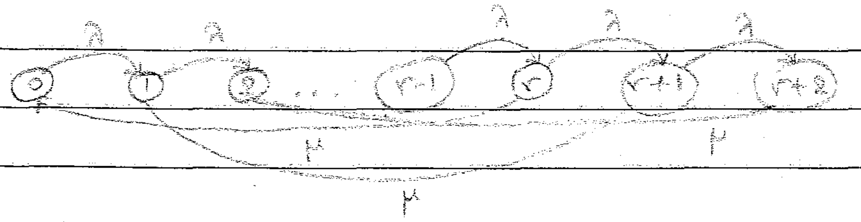
① Η $M/M^c/1$ ουρά ή Η $M/M/1$ ουρά με ομαδικές εξυπηρετήσεις

* Poisson ($\lambda$) διαδ. αφίξεων
* Exp($\mu$) χρόνοι εξυπηρέτησης
* Σε 1 χρόνο εξυπηρέτησης εξυπηρετείται μια ομάδα $r$ πελατών
  Αν υπάρχουν λιγότεροι από $r$, ο υπηρέτης περιμένει
* 1 υπηρέτης
* $\infty$ χωρητικότητα

$Q(t) = \#$ πελατών τη στιγμή $t$

| Κατάσταση | Επόμενη κατάσταση | Χρόνος |
|---|---|---|
| $n$, $0 \le n \le r-1$ | $n+1$ | Exp($\lambda$) |
| $n$, $n \ge r$ | $n+1$ | Exp($\lambda$) |
| | $n-r$ | Exp($\mu$) |

Όλα Exp $\Downarrow$ $\{Q(t)\}$ Μαρκ.




$$p_n = \lim_{t\to\infty} \Pr[Q(t) = n]$$

Εξισώσεις Ισορροπίας

επί πολλαπλασιάζω

$\lambda p_0 = \mu p_r$ $\quad \times z^0$

$\lambda p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+r}, \quad 1 \le n \le r-1$ $\quad \times z^n$

$(\lambda+\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+r}, \quad n \ge r$ $\quad \times z^n$

και τις αθροίζω

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda p_n z^n}_{\lambda P(z)} + \underbrace{\sum_{n=r}^{\infty} \mu p_n z^n}_{\mu\left(P(z) - \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n\right)} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda p_{n-1} z^n}_{\lambda z P(z)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \mu p_{n+r} z^n} \iff$$

Με ενδιαφέρει να βρω την πιθανογεννήτρια

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \;;$$

$$\frac{\mu}{z^r} \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+r} z^{\overset{k}{n+r}} = \frac{\mu}{z^r}\left(\sum_{k=r}^{\infty} p_k z^k\right) = \frac{\mu}{z^r}\left(P(z) - \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n\right)$$

Άρα έχω:

$$\iff (\lambda+\mu) P(z) - \mu \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n = \lambda z P(z) + \frac{\mu}{z^r} P(z) - \frac{\mu}{z^r} \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$$

$$\iff \left[(\lambda+\mu) - \lambda z - \frac{\mu}{z^r}\right] P(z) = \left(\mu - \frac{\mu}{z^r}\right) \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$$

$$\iff \left[(\lambda+\mu) z^r - \lambda z^{r+1} - \mu\right] P(z) = \mu\,(z^r - 1) \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$$

$$\iff P(z) = \frac{\mu\,(z^r-1) \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n}{(\lambda+\mu) z^r - \lambda z^{r+1} - \mu} \underset{\rho = \frac{\lambda}{\mu}}{\uparrow}= \frac{(z^r-1) \sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n}{(\rho+1) z^r - \rho z^{r+1} - 1}$$

② Προσδιορισμός Πιθανογεννητριών σε ρητή μορφή με άγνωστες παραμέτρους

$$P(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$ ← πολυώνυμα

$D(z)$: γνωστό

$N(z)$: έχει άγνωστες παραμέτρους

Πώς θα προσδιορίσω τις παραμέτρους?

$1^{\eta}$ ιδέα : Εξίσωση κανονικοποίησης : $P(1) = 1 \Rightarrow \ldots$

$2^{\eta}$ ιδέα : $P(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_m z^m$ συγκλίνει πάντα στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\{z : |z| \leq 1\}$

Άρα κάθε ρίζα του $D(z)$ στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο είναι και ρίζα του αριθμητή $N(z)$. Αυτό δίνει επιπλέον εξισώσεις.

③ Παράδειγμα

Έστω η πιθανογεννήτρια $P(z) = \frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2}{6z^3 - 17z^2 + 11z - 2} = \frac{N(z)}{D(z)}$

Να προσδιοριστούν τα $c_1, c_2, c_3$

Λύση:

$1^{\eta}$ $P(1) = 1 \Rightarrow c_0 + c_1 + c_2 = 6 - 17 + 11 - 2 = -2$ ①

$2^{\eta}$ $D(z) = 6\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)(z - 2)$ ← το 2 είναι εκτός μοναδιαίου δίσκου $\Rightarrow$ άρα τα $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ πρέπει να είναι ρίζες και του $N(z)$

$$\Rightarrow c_0 + c_1 \tfrac{1}{2} + c_2 \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad ②$$

$$c_0 + c_1 \tfrac{1}{3} + c_2 \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = 0 \quad ③$$

Άρα έχω 3 εξισώσεις, λύνω το σύστημα και βρίσκω

$c_0 = -1$

$c_1 = 5$

$c_2 = -6$

## ④ Πιθανογεννήτριες Ρητές στη Θεωρία Ουρών

Οι πιθανογεννήτριες για εμφανίζονται συνήθως στη Θεωρία Ουρών είναι

$$P(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{c\,(z^N - a(z))}$$

$a(z)$: πολυώνυμο με μη αρνητικούς συντελεστές

Χρησιμοποιούμε το Θ. Rouché (Μιγ. Ανάλυση) και συγκεκριμένα το πόρισμα

## ⑤ Η εξίσωση $z^N - a(z) = 0$

Έστω $\{a_n : n = 0, 1, \dots\}$ με $a_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n < \infty$ και $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Έστω $N$ θετικός ακέραιος $A(z) = z^N - a(z)$.

Τότε το # ριζών της $A(z) = 0$ στο $\{z : |z| \leq 1\}$ δίνεται ως εξής

| Συνθήκη | | # ριζών στο $\{\lvert z\rvert < 1\}$ | # ριζών στο $\{\lvert z\rvert = 1\}$ | # ριζών στο $\{\lvert z\rvert \leq 1\}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a(1) < 1$ | | $N$ | $0$ | $N$ | Ευστάθεια |
| $a(1) = 1$ | $A'(1) > 0$ | $N-K$ | $K$ απλές ρίζες, $K$-οστές ρίζες της 1 | $N$ | Ευστάθεια |
| | $A'(1) = 0$ | $N-K$ | $K$ διπλές ρίζες, $K$-οστές ρίζες της 1 | $N+K$ | Αστάθεια |
| | $A'(1) < 0$ | $N$ | $K$ απλές ρίζες, $K$-οστές ρίζες της 1 | $N+K$ | Αστάθεια |

όπου $K =$ Μ.Κ.Δ. $\{i - N : a_i \neq 0\}$

Παράδειγμα: # ριζών στο $\{z : |z| \leq 1\}$ του

$a_n \geq 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ $\quad z^3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{6} z^3 =$

$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n < \infty$ $\quad = z^N - a(z)$

$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n < \infty$

$N = 3$

$$a(z) = \underset{a_0}{\frac{1}{2}} + \underset{a_1}{0 \cdot z} + \underset{a_2}{\frac{1}{3} z^2} + \underset{a_3}{\frac{1}{6} z^3} + \underset{a_4}{0 \cdot z^4} + \underset{a_5}{0 \cdot z^5} + \dots$$

Άρα $a(1) = 1$

$$A'(z) = 3z^2 - \frac{2}{3} z - \frac{3}{6} z^2$$

$$\Rightarrow A'(1) = 3 - \frac{2}{3} - \frac{3}{6} > 0$$

Άρα είμαστε στην 2η περίπτωση:

$\kappa = \text{ΜΚΔ} \{0-3, 2-3, 3-3\} = 1.$

Το $A(z)$ έχει 2 ρίζες στο $\{|z| < 1\}$

έχει 1 ρίζα τη $z = 1$ στο $\{|z| = 1\}$

⑥ $M/M^c/1$ ουρά (συνέχεια)

Έχουμε δει ότι $P(z) = \dfrac{N(z)}{(p+1)\left(z^r - \frac{p}{p+1} z^{r+1} - \frac{1}{p+1}\right)}$

Μελετούμε $A(z) = \underset{z^N}{z^r} - \underbrace{\frac{p}{p+1} z^{r+1} - \frac{1}{p+1}}_{a(z)}$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{p+1}, & n=0 \\ \frac{p}{p+1}, & n=r+1 \\ 0, & n \neq 0, r+1 \end{cases}$$

Είμαστε στα πλαίσια του πορίσματος Rouché

$$\alpha(1) = \frac{1}{p+1} + \frac{p}{p+1} = 1$$

$$A'(z) = r z^{r-1} - \frac{p(r+1)}{p+1} z^{r}$$

$$\Rightarrow A'(1) = r - \frac{p(r+1)}{p+1}$$

$$A'(1) > 0 \Leftrightarrow r - \frac{p(r+1)}{p+1} > 0 \Leftrightarrow r(p+1) - p(r+1) > 0 \Leftrightarrow r > p$$

$$A'(1) = \begin{cases} >0, & \text{αν } p<r \\ =0, & \text{αν } p=r \\ <0, & \text{αν } p>r \end{cases}$$

$k = \text{ΜΚΔ}\{0-r,\ r+1-r\} = 1.$

Περίπτωση I: $p<r$ ⇝ Περ. 2 του πορίσματος Rouché

○ παρονομ. έχει $r-1$ ρίζες στο $\{|z|<1\}$

έχει $1$ ρίζα στο $\{|z|=1\}$

έχει $1$ ρίζα στο $\{|z|>1\}$

Έστω $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}$ οι ρίζες στο $\{|z|<1\}$

$1$ η ρίζα στο $\{|z|=1\}$

$z_0$ η ρίζα στο $\{|z|>1\}$

Άρα οι $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}$ είναι ρίζες του $\sum_{n=0}^{r-1} p_n r^n = c(z-z_1)\dots(z-z_{r-1})$

Αλλά τότε $P(z) = \dfrac{c(z^r-1)(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{r-1})}{(z-z_0)(z-1)(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{r-1})} =$

$$= c_1 \frac{z^r-1}{(z-z_0)(z-1)} \quad (c_1 \text{ σταθερό})$$

$$P(1) = 1 \Rightarrow c_1 \cdot \frac{r}{1-z_0} = 1 \Rightarrow c = \frac{1-z_0}{r}$$

Άρα $P(z) = \dfrac{(1-z_0)(z^r-1)}{r(z-z_0)(z-1)}$

$$P(z) = \frac{(z^r-1)\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n}{(p+1)\left(z^r - \frac{p}{p+1} z^{r+1} - \frac{1}{p+1}\right)}$$

Περίπτωση II: $p = r$ : $A'(1) = 0$

Ο παρονομαστής έχει $r-1$ ρίζες $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}$ στο $\{|z|<1\}$
έχει 1 διπλή ρίζα το 1 στο $\{|z|=1\}$

Άρα ο παρονομαστής γράφεται
$c(z-1)^2(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{r-1})$

το $\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$ έχει ρίζες τα $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}$ και το 1

Ενώ έχει βαθμό $r-1$ άρα είναι $\equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(z) \equiv 0$ αστάθεια

Περίπτωση III : $p > r$ : $A'(1) < 0$

Ο παρανομαστής έχει $r$ ρίζες $z_1, z_2, \dots z_r$ στο $\{|z|<1\}$
1 ρίζα, το 1 στο $\{|z|=1\}$

Όμοια με Περ. II το $\sum_{n=0}^{r-1} p_n z^n$ έχει $r$ ρίζες

$z_1, z_2, \dots, z_r$ ενώ βαθμός $r-1$. Άρα είναι $\equiv 0$ $\Rightarrow$

$P(z) \equiv 0$ ασυνάρτητα

Τελικά : Ευστάθεια $\Leftrightarrow$ $p < r$

Τότε
$$P(z) = \frac{(1-z_0)(z^r-1)}{r(z-z_0)(z-1)}$$

(7) Η M/M/1 ουρά με καταστροφές

$\lambda$ $\mu$

* M/M/1
* Poisson ($v$) διαδ. καταστροφών

Καταστροφή $\Rightarrow$ όλοι οι πελάτες απομακρ.

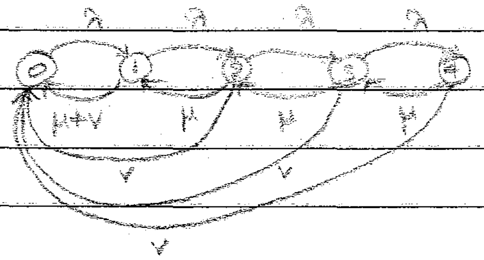
$Q(t)$ = # πελατών

| Κατάσταση | Επομ. Κατάσταση | Χρόνος |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $Exp(\lambda)$ |
| 1 | 2 | $Exp(\lambda)$ |
| | 0 | $Exp(\mu+v)$ |

(συνέχεια)

| Κατάσταση | Επομ. Κατάσταση | Χρόνος |
|---|---|---|
| $n \geq 2$ | $n+1$ | $Exp(\lambda)$ |
| | $n-1$ | $Exp(\mu)$ |
| | $0$ | $Exp(\nu)$ |

Όλα Exp άρα Μαρκ



## Εξισώσεις Ισορροπίας

Πολλαπλασιάζω

$$\lambda p_0 = (\mu+\nu) p_1 + \nu \sum_{j=2}^{\infty} p_j = \mu p_1 + \nu(1-p_0) \qquad \times z^0$$

$$(\lambda+\mu+\nu) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1}, \quad n \geq 1 \qquad \times z^n$$

και προσθέτω για όλα τα $n$

$$\lambda p_0 + (\lambda+\mu+\nu) \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n = \mu p_1 + \nu - \nu p_0 + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} p_{n+1} z^n$$

$$\Rightarrow \lambda p_0 + (\lambda+\mu+\nu)(P(z) - p_0) = \nu - \nu p_0 + \lambda z P(z) + \underbrace{\frac{\mu}{z} \sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^{n+1}}_{\frac{\mu}{z}(P(z)-p_0)}$$

$$\Rightarrow \left[(\lambda+\mu+\nu) - \lambda z - \frac{\mu}{z}\right] P(z) = \cancel{(\lambda+\mu+\nu)} p_0 - \cancel{\lambda p_0} + \nu - \cancel{\nu p_0} - \frac{\mu}{z} p_0$$

$$\Rightarrow \left[(\lambda+\mu+\nu) - \lambda z - \frac{\mu}{z}\right] P(z) = \nu + \mu p_0 \left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

$$\Rightarrow \left[(\lambda+\mu+\nu) z - \lambda z^2 - \mu\right] P(z) = \nu z + \mu p_0 (z-1)$$

$$\Rightarrow P(z) = \frac{\nu z + \mu p_0 (z-1)}{(\lambda+\mu+\nu) z - \lambda z^2 - \mu}$$

Έχω χρησιμοποιήσει την εξίσωση κανονικοποίησης στις εξισώσεις ισορροπίας οπότε πάω στον κ. Rouché

Χρησιμοποιώ Rouché

$$P(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$$D(z) = (\lambda+\mu+\nu)\left(z - \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\nu} z^2 - \frac{\mu}{\lambda+\mu+\nu}\right)$$

$$z^N - a(z) = z^{1} - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu+\nu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\nu} z^2\right)$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{\mu}{\lambda+\mu+\nu}, & n=0 \\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\nu}, & n=2 \\ 0, & n\neq 0,2 \end{cases}$$

$$a(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 1^n = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu+\nu} < 1$$

Άρα ο παρονομαστής έχει $\overset{z_1}{1}$ ρίζα στο $\{|z|<1\}$
0 ρίζες στο $\{|z|=1\}$
$z_2 \leftarrow 1$ ρίζα στο $\{|z|>1\}$

Επομένως η $z_1$ είναι ρίζα του αριθμητή

$$\nu z + \mu p_0 (z-1) = c(z-z_1)$$
$$(\lambda+\mu+\nu)z - \lambda z^2 - \mu = c'(z-z_1)(z-z_2)$$

$$P(z) = \frac{\cancel{(z-z_1)}}{\cancel{(z-z_1)}(z-z_2)} c$$

$$P(1) = 1 \Rightarrow \frac{c}{1-z_2} = 1 \Rightarrow c = 1-z_2$$

$P(z) = \frac{1-z_2}{z-z_2}$ όπου $z_2$ η ρίζα του παρονομαστή με $|z_2|>1$

30.11.09 8° μάθημα

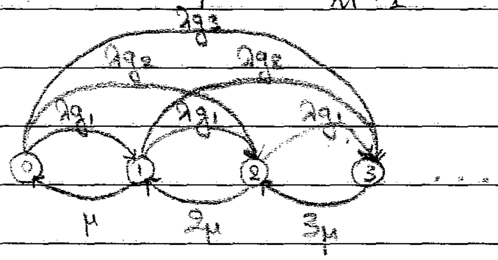
## Μαρκοβιανές Ουρές
## Μέθοδος Πιθανογεννητριών

① Η $M^c/M/\infty$ ουρά

* Poisson ($\lambda$) διαδικασία αφίξ. ομάδων
* $g_k$ : πιθ. μεγ. ομάδας να είναι $k$, $k=1,2,\dots$
* Exp ($\mu$) χρ. εξυπ.
* $\infty$ υπηρ.
* $\infty$ χωρ.

| Κατάσταση | Επόμ. Κατάσταση | Χρόνος |
|---|---|---|
| $0$ | $k$, $k\geq 1$ | $Exp(\lambda g_k)$ |
| $n\geq 1$ | $n+k$, $k\geq 1$ | $Exp(\lambda g_k)$ |
| | $n-1$ | $Exp(n\mu)$ |

Όλα Exp
⇓
$Q(t)$ = # πελ. είναι Μαρκ.




## Εξισώσεις Ισορροπίας

πολ/ζω
$\times z^0$
$\times z^n$

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$(\lambda+n\mu)p_n = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda g_{n-j} p_j + (n+1)\mu p_{n+1}, \quad n\geq 1$$

αθροίζω

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} n p_n z^n = \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} \lambda g_{n-j} p_j z^n \overset{*}{\Rightarrow}$$

Θέλω να βρεθεί $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$

$G(z) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j \leftarrow$ Γνωστό

$$P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n z^{n-1} \Rightarrow z P'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{n+1} z^n = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k z^{k-1} = P'(z)$$

$$\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} g_{n-j} p_j z^n = \lambda \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j \sum_{n=j+1}^{\infty} g_{\underbrace{n-j}_{k}} z^{\overbrace{n-j}^{k}}$$

$$= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k}_{=G(z)} = \lambda G(z) P(z)$$

Άρα

$$\overset{*}{\Rightarrow} \lambda P(z) + \mu z P'(z) = \mu P'(z) + \lambda G(z) P(z)$$

$$\Rightarrow \mu (z-1) P'(z) = \lambda (G(z)-1) P(z) \Rightarrow \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{\lambda (G(z)-1)}{\mu (z-1)}$$

$$\Rightarrow (\log P(z))' = \frac{\lambda (G(z)-1)}{\mu (z-1)} \Rightarrow \log P(z) \Big|_z^1 = \int_z^1 \frac{\lambda (G(u)-1)}{\mu (u-1)} du$$

$$\Rightarrow \cancel{\log P(1)}^{0} - \log P(z) = \int_z^1 \frac{\lambda (G(u)-1)}{\mu (u-1)} du \Rightarrow P(z) = e^{-\frac{\lambda}{\mu} \int_z^1 \frac{G(u)-1}{u-1} du}$$

Ειδική Περίπτωση Μεμονωμένες Αφίξεις

$$g_k = \begin{cases} 1, & k=1 \\ 0, & k \neq 1. \end{cases}$$

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k = z \Rightarrow P(z) = e^{-\frac{\lambda}{\mu} \int_z^1 \frac{u-1}{u-1} du} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-z)} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} e^{\frac{\lambda}{\mu} z} =$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} z^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} z^n$$

$$\Rightarrow p_n = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}, \quad n=0,1,2\ldots$$ άρα $Q(t) \sim \text{Poisson}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$

② Η M/M/1/1 ουρά με επαναπροσπάθειες (retrials)

* Poisson ($\lambda$) διαδ. αφίξ.
* Exp ($\mu$) χρον. εξυπ.
* 1 υπηρέτης
* χωρητικότητα 1
* Exp($\nu$) χρόνοι επαναπρ. για κάθε πελάτη που δεν κατάφερε να εξυπηρετηθεί

$Q(t)$ = # πελ. σε εξυπηρέτηση

| Κατάσταση | Επόμ. Κατάσταση | Χρόνος |
|---|---|---|
| 0 | 1 | Exp ($\lambda$ + # πελ. σε τροχιά επαναπρος. $\cdot\ \nu$) |

! όχι Μαρκ !

$(Q(t), R(t))$ χ.κ. $S = \{0,1\} \times \{0,1,2,\ldots\}$

$Q(t)$: queue, # πελ στο σύστημα

$R(t)$: retrial, # πελ σε τροχιά επαναπρ.

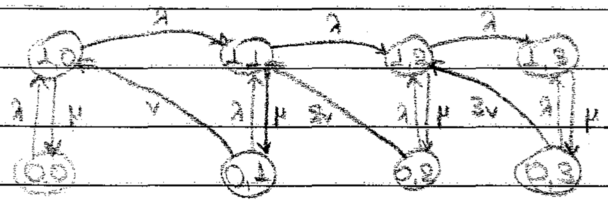
| Κατάσταση | Επομ. Κατάσταση | Χρόνος |
|---|---|---|
| (0,0) | (1,0) | Exp($\lambda$) |
| (1,0) | (1,1) | Exp($\lambda$) |
| | (0,0) | Exp($\mu$) |
| (0,n) $n \geq 1$ | (1,n) | Exp ($\lambda$) |
| | (1,n-1) | Exp (n$\nu$) |

Όλα Exp

Άρα

(συνέχεια)

| Κατάσταση | Επόμ. Κατάσταση | Χρόνος | |
|---|---|---|---|
| $(1,n)$, $n\geq 1$ | $(1,n+1)$ | $Exp(\lambda)$ | $(Q(t), R(t))$ |
| | $(0,n)$ | $Exp(\mu)$ | Μαρκοβ |




$P(i,n)$

Εξισώσεις Ισορροπίας

$\lambda p_{0,0} = \mu p_{1,0}$ ①

$(\lambda + n\nu)\, p_{0,n} = \mu p_{1,n}$ , $n \geq 1$ ②

$(\lambda+\mu)\, p_{1,0} = \lambda p_{0,0} + \nu p_{0,1}$ ③

$(\lambda+\mu)\, p_{1,n} = \lambda p_{0,n} + \lambda p_{1,n-1} + (n+1)\nu p_{0,n+1}$ , $n \geq 1$ ④

Ορίζω πιθανογεννήτρια $P_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{i,n} z^n$

Στο συγκεκρ. παράδειγμα $P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{0,n} z^n$

$P_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{1,n} z^n$

① $\times z^0 + \sum_{n=1}^{\infty}$ ② $\times z^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda p_{0,0} + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda + n\nu)\, p_{0,n} z^n = \mu p_{1,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu p_{1,n} z^n$

$$\Rightarrow \lambda P_0(z) + \nu \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n p_{0,n} z^n}_{z P_0'(z)} = \mu P_1(z)$$

$$③ \times z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} ④ \times z^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu) \sum_{n=0}^{\infty} p_{1,n} z^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_{0,n} z^n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} p_{1,n-1} z^n + \nu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_{0,n+1} z^n$$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu) P_1(z) = \lambda P_0(z) + \lambda z P_1(z) + \nu P_0'(z)$$

Άρα έχω το σύστημα

$$\left.\begin{cases} \lambda P_0(z) + \nu z P_0'(z) = \mu P_1(z) \\ (\lambda+\mu) P_1(z) = \lambda P_0(z) + \lambda z P_1(z) + \nu P_0'(z) \end{cases}\right\} \overset{\rho = \frac{\lambda}{\mu}}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{cases} \rho P_0(z) + \frac{\nu}{\mu} z P_0'(z) = P_1(z) \\ (\rho+1) P_1(z) = \rho P_0(z) + \rho z P_1(z) + \frac{\nu}{\mu} P_0'(z) \end{cases}\right\} \Leftrightarrow$$

Αντικαθιστώ την 1η στη 2η και μετά από κάποιες πράξεις ...

$$\rho^2 \cancel{(1-z)} P_0(z) = \frac{\nu}{\mu} \cancel{(1-z)} (1-\rho z) P_0'(z)$$

$$\Rightarrow \frac{P_0'(z)}{P_0(z)} = \frac{\overset{=\lambda\rho}{\mu \rho^2}}{\nu(1-\rho z)}$$ πάλι παραλείπω κάποιες πράξεις...

$$\Rightarrow P_0(z) = P(0,0)\,(1-\rho z)^{-\frac{\lambda}{\nu}}$$ (κάντε τις πράξεις στο σπίτι!)

Αντικαθιστώ στην $P_1(z) = \rho P_0(z) + \frac{\nu}{\mu} z P_0'(z)$

$$\Rightarrow P_1(z) = \rho P_{0,0} (1-\rho z)^{-\left(\frac{\lambda}{\nu}+1\right)}$$

Εξίσωση κανονικοποίησης: $P_0(1) + P_1(1) = 1$.

$\Rightarrow P_{0,0}\left((1-p)^{-\frac{\lambda}{\nu}} + p(1-p)^{-\frac{\lambda}{\nu}-1}\right) = 1$.

$\Rightarrow P_{0,0}(1-p)^{-\frac{\lambda}{\nu}-1} = 1 \Rightarrow P_{0,0} = (1-p)^{\frac{\lambda}{\nu}+1}$

Άρα

$$P_0(z) = (1-p)^{\frac{\lambda}{\nu}+1}(1-pz)^{-\frac{\lambda}{\nu}}$$

$$P_1(z) = p(1-p)^{\frac{\lambda}{\nu}+1}(1-pz)^{-\frac{\lambda}{\nu}-1}$$

Π.Θ. απασχ. υπηρέτη $= \sum_{n=0}^{\infty} P_{1,n} = P_1(1) = p$.

Γνωρίζω ότι $(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{x}{n}t^n$, $x \in \mathbb{R}$, $|t|<1$

Αναλυτικοί τύποι για $P_{0,n}, P_{1,n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{0,n} z^n = P_0(z) = (1-p)^{\frac{\lambda}{\nu}+1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{\lambda}{\nu}}{n}(-p)^n z^n$$

$$\Rightarrow P_{0,n} = (1-p)^{\frac{\lambda}{\nu}+1}\binom{-\frac{\lambda}{\nu}}{n}(-p)^n =$$

$$= (1-p)^{\frac{\lambda}{\nu}+1}\frac{\left(-\frac{\lambda}{\nu}\right)\left(-\frac{\lambda}{\nu}-1\right)\left(-\frac{\lambda}{\nu}-2\right)\cdots\left(-\frac{\lambda}{\nu}-n+1\right)}{n!}(-p)^n =$$

$$= (1-p)^{\frac{\lambda}{\nu}+1}\frac{\frac{\lambda}{\nu}\cdot\left(\frac{\lambda}{\nu}+1\right)\left(\frac{\lambda}{\nu}+2\right)\cdots\left(\frac{\lambda}{\nu}+n-1\right)}{n!}p^n, \quad n = 0, 1, 2\ldots$$

Ομοίως για $P_{1,n}$

③ Η $M/M/1$ ουρά με χρόνους εκκίνησης

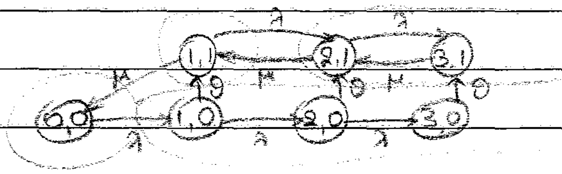
* $\overset{\lambda}{M}/\overset{\mu}{M}/\overset{1}{1}$

* όταν το σύστημα μείνει κενό, ο υπηρέτης απενεργοποιείται ακαριαία

* όταν υπάρξει τουλάχιστον ένας πελάτης, το σύστημα μπαίνει σε διαδ. εκκιν. $\sim Exp(\theta)$

$Q(t)$ = # πελ. όχι Μαρκ. $\{(Q(t), S(t))\}$ Μαρκ

$S(t)$ = κατάσταση υπηρέτη $\begin{pmatrix} 0 \to \text{απενεργ.} \\ 1 \to \text{ενεργ.} \end{pmatrix}$



Εξισώσεις ισορροπίας

$\lambda p_{0,0} = \mu p_{1,1}$ ①

$(\lambda+\theta)\, p_{n,0} = \lambda p_{n-1,0}$ , $n \geq 1$ ②

$(\lambda+\mu)\, p_{1,1} = \theta p_{1,0} + \mu p_{2,1}$ ③

$(\lambda+\mu)\, p_{n,1} = \theta p_{n,0} + \lambda p_{n-1,1} + \mu p_{n+1,1}$ , $n \geq 2$ ④

$P_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,0} z^n$

$P_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{n,1} z^n$

① $\times z^0$ + $\sum_{n=1}^{\infty}$ ② $\times z^n$

και

③ $\times z^1$ + $\sum_{n=2}^{\infty}$ ④ $\times z^n$

$① \times z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} ② \times z^n \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda+\theta) P_0(z) - \theta P_{0,0} = \overset{\lambda P_{0,0}}{\mu P_{1,1}} + \lambda z P_0(z)$

$③ \times z^1 + \sum_{n=2}^{\infty} ④ \times z^n \Rightarrow$ $\qquad \lambda P_{0,0}$ $=$

$\Rightarrow (\lambda+\mu) P_1(z) = \theta P_0(z) - \theta P_{0,0} + \lambda z P_1(z) + \frac{\mu}{z}\left(P_1(z) - P_{1,1}\right)$

Άρα

$$P_0(z) = \frac{\lambda+\theta}{\lambda+\theta-\lambda z} P_{0,0}$$

$$P_1(z) = \frac{\lambda(\lambda+\theta) z}{(\lambda+\theta-\lambda z)(\mu-\lambda z)} P_{0,0}$$

Εξίσωση Κανονικοποίησης $P_0(1) + P_1(1) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{\lambda+\theta}{\theta} + \frac{\lambda(\lambda+\theta)}{\theta(\mu-\lambda)}\right) P_{0,0} = 1 \Rightarrow \frac{(\lambda+\theta)(\mu-\lambda)+\lambda(\lambda+\theta)}{\theta(\mu-\lambda)} P_{0,0} = 1$

$\Rightarrow P_{0,0} = \frac{\theta(\mu-\lambda)}{(\lambda+\theta)\mu}$

Συνθήκη Ευστάθειας $\lambda < \mu$

$\lambda, \theta, \mu > 0$

Πιθ. ο υπηρ. να λειτουργεί $= \sum_{n=1}^{\infty} P_{n,1} = P_1(1) = \frac{\lambda(\lambda+\theta)}{\theta(\mu-\lambda)} \frac{\theta(\mu-\lambda)}{(\lambda+\theta)\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$

Μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα $= \sum_{n=0}^{\infty} n\left(P_{n,0} + P_{n,1}\right) = P_0'(1) + P_1'(1)$

Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα βγαίνει και με Θ. Little.

$E[Q] = \lambda \cdot E[S]$ ⇝ χρόνος παραμονής στο σύστημα

$E[S] = (1-p)\frac{1}{\theta} + (E[Q]+1)\frac{1}{\mu} \Rightarrow \ldots$

πιθ. βρίσκει σταθμό απενεργοποιημένο

$\Rightarrow E[Q] = \frac{p}{1-p} + \frac{\lambda}{\theta}$