Μαρκοβιανά δίκτυα ουρών - Άσκηση 3

Θεωρούμε ένα δίκτυο τριών ουρών O_1, O_2, O_3. Η ουρά O_i για κάθε $i = 1, 2, 3$ έχει Poisson(λ_i) εξωτερική διαδικασία αφίξεων και i υπηρέτες με εκθετικούς (μ_i) χρόνους εξυπηρέτησης. Κάθε πελάτης που ολοκληρώνει την εξυπηρέτηση του στην ουρά O_i αναχωρεί από το δίκτυο με πιθανότητα $\frac{i}{i+1}$, ενώ διαφορετικά πηγαίνει στην O_{i+1}, όπου $O_{i+1} = O_1$ για $i = 3$. Έστω $\lambda_i = i$ για κάθε $i = 1, 2, 3$.

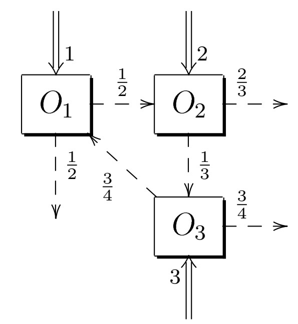
α. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την στασιμότητα(ευστάθεια) του παραπάνω Μαρκοβιανού δικτύου.

β. Βρείτε την αντίστοιχη στάσιμη κατανομή.

γ. Να υπολογιστούν η κατανομή του αριθμού των επισκέψεων ενός πελάτη στον σταθμό O_2, δεδομένου ότι ο πελάτης εισέρχεται στο δίκτυο από τον σταθμό O_2, καθώς και το μέσο πλήθος επισκέψεων σε αυτόν.

Λύση:

Σχηματικά



Παρατηρούμε πως πρόκειται για ένα ανοιχτό δίκτυο Jackson αποτελούμενο από $N = 3$ ουρές όπου η O_i είναι $M/M/i$ ουρά, $i = 1, 2, 3$. Έτσι

$$\mu_1(n_1) = \mu_1, \ n_1 = 1, 2, \ldots,$$

$$\mu_2(n_2) = \begin{cases} \mu_2, & n_2 = 1 \\ 2\mu_2 & n_2 = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

και

$$\mu_3(n_3) = \begin{cases} \mu_3, & n_3 = 1 \\ 2\mu_3, & n_3 = 2 \\ 3\mu_3 & n_3 = 3, 4, \ldots. \end{cases}$$

Οι συνολικοί ρυθμοί αφίξεων $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ για τις ουρές O_1, O_2, O_3 αντίστοιχα προσδιορίζονται λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων κίνησης, το οποίο λαμβάνοντας υπόψη ότι $\lambda_i = i$, $i = 1, 2, 3$ παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 1 + \frac{1}{4}\Lambda_3 \\ \Lambda_2 &= 2 + \frac{1}{2}\Lambda_1 \\ \Lambda_3 &= 3 + \frac{1}{3}\Lambda_2. \end{aligned}$$

Από τη λύση του παραπάνω συστήματος προκύπτει ότι $\Lambda_1 = 2$, $\Lambda_2 = 3$ και $\Lambda_3 = 4$.

α. Από γνωστό θεώρημα ένα ανοιχτό δίκτυο Jackson έχει στάσιμη κατανομή ανν η $B_i^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_i^n}{\mu_i(1)\mu_i(2)\ldots\mu_i(n)}$ συγκλίνει για κάθε i, $i = 1, 2, 3$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} B_1^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_1^n}{\mu_1(1)\mu_1(2)\ldots\mu_1(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_1^n}{\mu_1^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\mu_1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{\mu_1}} \text{ ανν } \mu_1 > 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_2^n}{\mu_2(1)\mu_2(2)\ldots\mu_2(n)} \\ &= 1 + \frac{3}{\mu_2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n-1}\mu_2^n} \\ &= 1 + \frac{3}{\mu_2} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{2\mu_2}\right)^n \\ &= 1 + \frac{3}{\mu_2} + 2\left(\frac{3}{2\mu_2}\right)^2 \frac{1}{1 - \frac{3}{2\mu_2}} \text{ ανν } \mu_2 > \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
B_3^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_3^n}{\mu_3(1)\mu_3(2)\dots\mu_3(n)} \\
&= 1 + \frac{4}{\mu_3} + \frac{16}{2\mu_3^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4^n}{2\ 3^{n-2}\mu_3^n} \\
&= 1 + \frac{4}{\mu_3} + \frac{4}{2\mu_3} + \frac{9}{2}\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{4}{3\mu_3}\right)^n \\
&= 1 + \frac{4}{\mu_3} + \frac{4}{2\mu_3} + \frac{9}{2}\left(\frac{4}{3\mu_3}\right)^3 \frac{1}{1-\frac{4}{3\mu_3}} \text{ ανν } \mu_3 > \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

β. Η στάσιμη κατανομή για την ουρά i, $i = 1, 2, 3$, δίνεται από την σχέση $p_i(n_i) = B_i \frac{\Lambda_i^{n_i}}{\mu_i(1)\mu_i(2)\dots\mu_i(n_i)}$. Έτσι

$$p_1(n_1) = B_1 \frac{2^{n_1}}{\mu_1^{n_1}},$$

$$p_2(n_2) = \begin{cases} B_2 & n_2 = 0 \\ B_2 \frac{3^{n_2}}{2^{n_2-1}\mu_2^{n_2}} & n_2 = 1, 2, \dots \end{cases}$$

και

$$p_3(n_3) = \begin{cases} B_3 \frac{4^{n_3}}{\mu_3^{n_3}} & n_3 = 0, 1, \\ B_3 \frac{4^{n_3}}{2\ 3^{n_3-2}\ \mu_3^{n_3}} & n_3 = 2, 3, \dots \end{cases}$$

και άρα η στάσιμη κατανομή του δικτύου είναι ίση με

$$p(\underline{n}) = p(n_1, n_2, n_3) = p_1(n_1)p_2(n_2)p_3(n_3)$$

γ. Έστω N=πλήθος επισκέψεων ενός πελάτη στο σταθμό O_2 δεδομένου ότι εισέρχεται στο δίκτυο από το σταθμό O_2. Αναζητούμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής N καθώς και τη μέση τιμή της.

$$\begin{aligned}
P(N=1) &= \text{Πιθ. να αναχωρήσει αμέσως} + \text{Πιθ. να πάει στην } O_3 \text{ και από εκεί} \\
&\quad\ \ \text{από το δίκτυο} \qquad\qquad\qquad\quad \text{να μην ξαναγυρίσει στην } O_2 \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \text{Πιθ. από την } O_3 \text{ να μην ξαναγυρίσει στην } O_2 \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \alpha
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
\alpha &= \underset{\text{από το δίκτυο}}{\text{Πιθ. να αναχωρήσει αμέσως}} + \underset{\text{να μην ξαναγυρίσει στην } O_2}{\text{Πιθ. να πάει στην } O_1 \text{ και από εκεί}} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \text{Πιθ. από την } O_1 \text{ να μην ξαναγυρίσει στην } O_2 \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \beta
\end{aligned}$$

όπου $\beta =$ Πιθ. αναχώρησης από το δίκτυο από την $O_1 = \frac{1}{2}$.

Έτσι $\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$ και άρα $P(N = 1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{24}$.
Με ανάλογο σκεπτικό

$$P(N = 2) = P(O_2 \to O_3 \to O_1 \to O_2) \cdot P(N = 1) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4} P(N = 1) = \frac{1}{24}\left(1 - \frac{1}{24}\right).$$

Ομοίως $P(N = 3) = \left(1 - \frac{1}{24}\right)\left(\frac{1}{24}\right)^2$. Γενικά

$$P(N = k) = \left(1 - \frac{1}{24}\right)\left(\frac{1}{24}\right)^{k-1},\ k = 1, 2, \ldots$$

δηλαδή $N \sim Geom(\frac{1}{24})$ και άρα $E[N] = \frac{1 - \frac{1}{24}}{\frac{1}{24}} = 23$ που δίνει το μέσο αριθμό επισκέψεων στο σταθμό O_2 δεδομένου ότι ο πελάτης εισέρχεται στο δίκτυο από το σταθμό αυτό.