Μαρκοβιανά δίκτυα ουρών - Άσκηση 2

Θεωρούμε ένα δίκτυο πέντε ουρών O_1, O_2, ..., O_5. Για κάθε $i = 1,2,3,4$ η ουρά O_i έχει Poisson($i\lambda$) εξωτερική διαδικασία αφίξεων και έναν υπηρέτη με εκθετικούς (μ_i) χρόνους εξυπηρέτησης. Κάθε πελάτης που ολοκληρώνει την εξυπηρέτηση του στην ουρά O_i πηγαίνει στην O_{i+1} με πιαθανότητα $\frac{1}{i}$ ή επαναλαμβάνει την εξυπηρέτηση του στην O_i με πιθανότητα $\frac{i-1}{i}$ για $\iota = 1,2,3,4$. Η ουρά O_5 έχει Poisson(5λ) διαδικασία αφίξεων και άπειρους υπηρέτες με εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης και κάθε πελάτης που ολοκληρώνει την εξυπηρέτηση του σ'αυτή αναχωρεί από το δίκτυο.

α. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την στασιμότητα(ευστάθεια) του παραπάνω Μαρκοβιανού δικτύου.

β. Βρείτε την αντίστοιχη στάσιμη κατανομή.

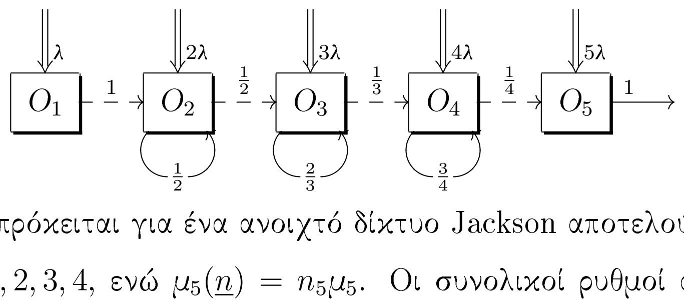
γ. Να υπολογιστεί ο μέσος αριθμός πελατών στο δίκτυο καθώς και στο υποσύνολο του δικτύου που απαρτίζεται από τις ουρές O_2 και O_3.

δ. Να υπολογιστεί ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο δίκτυο.

ε. Να βρεθεί η κατανομή του αριθμού των επισκέψεων ενός πελάτη στην ουρά O_i δεδομένου ότι εισήλθε στο δίκτυο από την ουρά O_i, για $i = 2,3,4$.

Λύση:

Σχηματικά



Παρατηρούμε πως πρόκειται για ένα ανοιχτό δίκτυο Jackson αποτελούμενο από $N = 5$ ουρές με $\mu_i(\underline{n}) = \mu_i$, $i = 1,2,3,4$, ενώ $\mu_5(\underline{n}) = n_5\mu_5$. Οι συνολικοί ρυθμοί αφίξεων $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_5$ για τις ουρές $O_1, \ldots, O_5$, αντίστοιχα προσδιορίζονται λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων κίνησης, που εδώ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \lambda \\
\Lambda_2 &= 2\lambda + \Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2 \\
\Lambda_3 &= 3\lambda + \frac{1}{2}\Lambda_2 + \frac{2}{3}\Lambda_3 \\
\Lambda_4 &= 4\lambda + \frac{1}{3}\Lambda_3 + \frac{3}{4}\Lambda_4 \\
\Lambda_5 &= 5\lambda + \frac{1}{4}\Lambda_4 \ .
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \lambda \\
\Lambda_2 &= 6\lambda \\
\Lambda_3 &= 18\lambda \\
\Lambda_4 &= 40\lambda \\
\Lambda_5 &= 15\lambda \ .
\end{aligned}$$

α. Από γνωστό θεώρημα ένα ανοιχτό δίκτυο Jackson έχει στάσιμη κατανομή ανν η $B_i^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_i^n}{\mu_i(1)\mu_i(2)\ldots\mu_i(n)}$ συγκλίνει για κάθε i, $i = 1, \ldots, 5$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
B_i^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_i^n}{\mu_i(1)\mu_i(2)\ldots\mu_i(n)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_i^n}{\mu_i^n} \\
&= \frac{1}{1-\frac{\Lambda_i}{\mu_i}} \text{ ανν } \Lambda_i < \mu_i, \ i = 1, 2, 3, 4 \ ,
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
B_5^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_5^n}{\mu_5(1)\mu(2)_5\ldots\mu(n)_5} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_5^n}{n!\mu_5^n} \\
&= e^{\frac{\Lambda_5}{\mu_5}} \text{ για κάθε τιμή των } \Lambda_5, \mu_5 \ .
\end{aligned}$$

β. Στην ευσταθή περίπτωση που $\Lambda_i < \mu_i$ η στάσιμη κατανομή για τις ουρές $i = 1, 2, 3, 4$, δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} p_i(n_i) &= B_i \frac{\Lambda_i^{n_i}}{\mu_i(1)\mu(2)_i \ldots \mu(n_i)_i} \\ &= B_i \left(\frac{\Lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \\ &= (1 - \frac{\Lambda_i}{\mu_i}) \left(\frac{\Lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \quad , \end{aligned}$$

δηλαδή $p_i(n_i) \sim Geom(\frac{\Lambda_i}{\mu_i})$, ενώ όσον αφορά την ουρά 5, αυτή είναι πάντα ευσταθής και η στάσιμη κατανομή υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} p_5(n_5) &= B_5 \frac{\Lambda_5^{n_5}}{\mu_5(1)\mu_5(2) \ldots \mu_5(n_5)} \\ &= e^{-\frac{\Lambda_5}{\mu_5}} \frac{\left(\frac{\Lambda_5}{\mu_5}\right)^{n_5}}{n_5!} \quad , \end{aligned}$$

και άρα η στάσιμη κατανομή του δικτύου είναι ίση με

$$\begin{aligned} p(\underline{n}) &= \prod_{i=1}^{5} p_i(n_i) \\ &= \prod_{i=1}^{4} (1 - \frac{\Lambda_i}{\mu_i}) \left(\frac{\Lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i} e^{\frac{\Lambda_5}{\mu_5}} \frac{\left(\frac{\Lambda_5}{\mu_5}\right)^{n_5}}{n_5!} \, . \end{aligned}$$

γ. Θα συμβολίσουμε με Q_i το μήκος ουράς για την O_i και με Q το πλήθος πελατών στο δίκτυο. Τότε $E(Q) = \sum_{i=1}^{5} E[Q_i]$, όμως $Q_i \sim Geom(\frac{\Lambda_i}{\mu_i})$ για $i = 1, 2, 3, 4$ και $Q_5 \sim Poisson(\frac{\Lambda_5}{\mu_5})$, άρα $E[Q_i] = \frac{\frac{\Lambda_i}{\mu_i}}{1 - \frac{\Lambda_i}{\mu_i}} = \frac{\Lambda_i}{\mu_i - \Lambda_i}$ για $i = 1, 2, 3, 4$ και $E[Q_5] = \frac{\Lambda_5}{\mu_5}$. Τελικά το μέσο πλήθος πελατών στο δίκτυο είναι ίσο με $\sum_{i=1}^{4} \frac{\Lambda_i}{\mu_i - \Lambda_i} + \frac{\Lambda_5}{\mu_5}$. Ανάλογα στο υποδίκτυο που απαρτίζεται από τις ουρές O_2 και O_3 το μέσο πλήθος πελατών είναι $\frac{\Lambda_2}{\mu_2 - \Lambda_2} + \frac{\Lambda_3}{\mu_3 - \Lambda_3}$.

δ. Ο μέσος χρόνος παραμονής στο δίκτυο θα υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Little και θεωρώντας όλο το δίκτυο σαν ένα ενιαίο σύστημα στο οποίο αφίκνυνται πελάτες με ρυθμό $1 \cdot \lambda + 2 \cdot \lambda + 3 \cdot \lambda + 4 \cdot \lambda + 5 \cdot \lambda = 15\lambda$. Συνεπώς $E[S^{\text{δίκτυο}}] = \frac{E[Q]}{15\lambda}$.

ε. Έστω N_i το πλήθος των επισκέψεων στην ουρά O_i για έναν πελάτη που εισήλθε στο δίκτυο από την ουρά αυτή. Ισοδύναμα η τ.μ. N_i εκφράζει το πλήθος των δοκιμών που θα απαιτηθούν μέχρι την πρώτη επιτυχία, όπου επιτυχία είναι να απομακρυνθεί ο πελάτης από την ουρά O_i μεταβαίνοντας στην O_{i+1}. Η μετακίνηση από την O_i στην O_{i+1} συμβαίνει με πιθανότητα $p_i = \frac{1}{i}$. Τελικά η τ.μ. N_i ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας $p_i = \frac{1}{i}$ και άρα $P[N_i = n] = p_i(1-p_i)^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ και για $i = 2, 3, 4$.