Μαρκοβιανά δίκτυα ουρών - Άσκηση 1

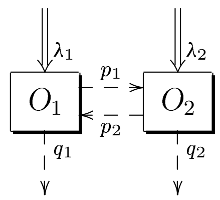
Θεωρούμε δύο ουρές O_1, O_2. Η ουρά O_i έχει Poisson(λ_i) εξωτερική διαδικασία αφίξεων, ένα υπηρέτη και εκθετικούς μ_i χρόνους εξυπηρέτησης. Συνδέουμε τις O_1 και O_2 έτσι ώστε κάθε πελάτης που φεύγει από την O_i να πηγαίνει στην άλλη ουρά με πιθανότητα p_i ή να αναχωρεί οριστικά από το σύστημα με πιθανότητα $q_i = 1 - p_i$.

α. Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για την στασιμότητα (ευστάθεια) του παραπάνω Μαρκοβιανού δικτύου.

β. Βρείτε την αντίστοιχη στάσιμη κατανομή.

Λύση:

Σχηματικά



Παρατηρούμε πως πρόκειται για ένα ανοιχτό δίκτυο Jackson αποτελούμενο από $N = 2$ ουρές με $\mu_i(\underline{n}) = \mu_i$, $i = 1, 2$. Οι συνολικοί ρυθμοί αφίξεων Λ_1, Λ_2 για τις ουρές O_1, O_2, αντίστοιχα προσδιορίζονται λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων κίνησης, που εδώ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \lambda_1 + \Lambda_2 p_2 \\ \Lambda_2 &= \lambda_2 + \Lambda_1 p_1 \ . \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 p_2}{1 - p_1 p_2} \\ \Lambda_2 &= \frac{\lambda_2 + \lambda_1 p_1}{1 - p_1 p_2} \ . \end{aligned}$$

α. Από γνωστό θεώρημα ένα ανοιχτό δίκτυο Jackson έχει στάσιμη κατανομή ανν η $B_i^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_i^n}{\mu_i(1)\mu_i(2)\ldots\mu_i(n)}$ συγκλίνει για κάθε i, $i = 1, 2$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} B_i^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_i^n}{\mu_i(1)\mu_i(2)\ldots\mu_i(n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_i^n}{\mu_i^n} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\Lambda_i}{\mu_i}} \end{aligned}$$

ανν $\Lambda_i < \mu_i$.

β. Στην ευσταθή περίπτωση που $\Lambda_i < \mu_i$ η στάσιμη κατανομή για την ουρά i, $i = 1, 2$, δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} p_i(n_i) &= B_i \frac{\Lambda_i^{n_i}}{\mu_i(1)\mu_i(2)\ldots\mu_i(n_i)} \\ &= B_i \left(\frac{\Lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \\ &= (1 - \frac{\Lambda_i}{\mu_i}) \left(\frac{\Lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i} \quad , \end{aligned}$$

δηλαδή $p_i(n_i) \sim Geom(\frac{\Lambda_i}{\mu_i})$ και άρα η στάσιμη κατανομή του δικτύου είναι ίση με

$$\begin{aligned} p(\underline{n}) &= p_1(n_1)p_2(n_2) \\ &= (1 - \frac{\Lambda_1}{\mu_1}) \left(\frac{\Lambda_1}{\mu_1}\right)^{n_1} (1 - \frac{\Lambda_2}{\mu_2}) \left(\frac{\Lambda_2}{\mu_2}\right)^{n_2} \quad . \end{aligned}$$