Βασικά αποτελέσματα - Άσκηση 1

Με χρήση του Θεωρήματος του Little και της ιδιότητας PASTA να βρείτε τις στάσιμες πιθανότητες κενού και απασχολημένου υπηρέτη, δηλαδή τα p_0 και p_1, σε ένα ευσταθές $M/GI/1/1$ με ρυθμό αφίξεων λ και μέσο χρόνο εξυπηρέτησης b.

Λύση:

Το σύστημα δεν διαθέτει χώρο αναμονής. Έτσι οποιαδήποτε χρονική στιγμή είτε θα είναι κενό, είτε θα υπάρχει ένας πελάτης που εξυπηρετείται. Από το Θεώρημα του Little ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα $E[Q]$ και ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη $E[S]$ συνδέονται μέσω της σχέσης

$$E[Q] = \lambda E[S]. \tag{1}$$

Επίσης, ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα υπολογίζεται από τις στάσιμες πιθανότητες p_n του αριθμού των πελατών στο σύστημα ως

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = 0p_0 + 1p_1 = p_1. \tag{2}$$

Επιπλέον, ένας πελάτης ο οποίος κατά την άφιξή του βρίσκει το σύστημα κενό, θα μείνει σε αυτό ακριβώς όσο χρόνο διαρκεί η εξυπηρέτησή του, ενώ αν το βρει πλήρες θα αναχωρήσει χωρίς να εξυπηρετηθεί κι έτσι ο χρόνος παραμονής του είναι μηδέν. Έτσι, δεσμεύοντας το μέσο χρόνο παραμονής ως προς το πλήθος των πελατών που βρίσκει κατά την άφιξή του έχουμε:

$$E[S] = \sum_{n=0}^{\infty} r_n E[S|\text{βρίσκει } n] = r_0 b + r_1 0 = b r_0 = b p_0, \tag{3}$$

όπου r_n είναι η στάσιμη πιθανότητα n ατόμων στο σύστημα μόλις πριν τη στιγμή άφιξης ενός πελάτη. Η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της ιδιότητας PASTA αφού η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson. Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) προκύπτει ότι $p_1 = \lambda b p_0 = \rho p_0$, όπου $\rho = \lambda b$ είναι η ένταση συνωστισμού (ρυθμός συνωστισμού). Επιπλέον $p_0 + p_1 = 1$. Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε τις πιθανότητες ελεύθερου και απασχολημένου υπηρέτη

$$p_0 = \frac{1}{1+\rho} \quad \text{και} \quad p_1 = \frac{\rho}{1+\rho}.$$