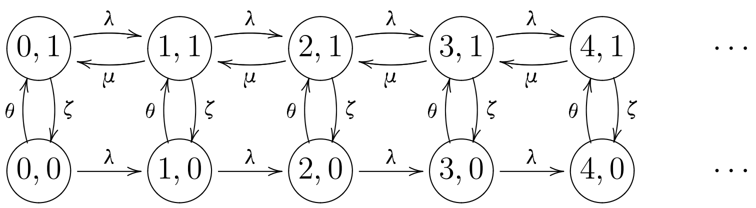
Βασικά αποτελέσματα - Άσκηση 7

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης τύπου $M/M/1$ στο οποίο ο υπηρέτης εναλλάσεται μεταξύ ενεργών και ανενεργών περιόδων. Πιο συγκεκριμένα, το σύστημα διαθέτει έναν υπηρέτη και άπειρη χωρητικότητα. Η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson με παράμετρο λ ενώ οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο μ. Ο υπηρέτης περνάει εναλλάξ από ενεργές και ανενεργές περιόδους. Οι διάρκειες των ενεργών περιόδων είναι εκθετικές με ρυθμό ζ ενώ οι διάρκειες των ανενεργών είναι επίσης εκθετικές αλλά με παράμετρο θ. Οι αφίξεις γίνονται σύμφωνα με τη διαδικασία Poisson(λ) ανεξάρτητα από το αν ο υπηρέτης βρίσκεται σε ενεργή ή ανενεργή περίοδο. Οι εξηπηρετήσεις όμως γίνονται μόνο κατά τη διάρκεια των ενεργών περιόδων του υπηρέτη. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Little και την ιδιότητα PASTA, να βρεθεί ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα και ο μέσος χρόνος παραμονής τους σε αυτό.

Λύση:

Έστω $Q(t)$ ο αριθμός των πελατών στο σύστημα τη στιγμή t και $I(t)$ η κατάσταση του υπηρέτη τη στιγμή t, όπου $I(t)$=0 ή 1(0: απενεργοποιημένος, 1: ενεργοποιημένος). Τότε, η $\{(Q(t), I(t)),\ t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{(n,i),\ i = 0,1,\ n = 0,1,\ldots\}$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης το παρακάτω:



Αρχικά θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες ο υπηρέτης να βρίσκεται σε ανενεργό και ενεργό περίοδο, π_0 και π_1 αντίστοιχα. Είναι άμεσο να παρατηρήσουμε ότι η διαδικασία $\{I(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου που εξελίσσεται ως μια $M/M/1/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων θ και ρυθμό εξυπηρετήσεων ζ. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Little κατά τα γνωστά παίρνουμε $\pi_1 = \frac{\theta}{\zeta}\pi_0$. Επιπλέον $\pi_0 + \pi_1 = 1$. Από τις δύο αυτές εξισώσεις προκύπτει ότι

$$\pi_0 = \frac{\zeta}{\theta + \zeta} \qquad \text{και} \qquad \pi_1 = \frac{\theta}{\theta + \zeta}. \tag{1}$$

Ορίζουμε τώρα Q να παριστάνει το πλήθος των πελατών στο σύστημα, S το χρόνο παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα και T τον υπολειπόμενο χρόνο παραμονής του πελάτη που τώρα εξυπηρετείται δεδομένου ότι ο υπηρέτης είναι ενεργοποιημένος. Παρατηρούμε ότι στο σύστημα αυτό κατά τη διάρκεια της εξυπηρέτησης ενός πελάτη ο υπηρέτης μπορεί να απενεργοποιηθεί και γι αυτό ο συνολικός μέσος χρόνος εξυπηρέτησης του δεν είναι $\frac{1}{\mu}$.

Για τον πελάτη ο οποίος βρίσκεται στο χώρο εξυπηρέτησης, ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης του είναι

$$E[T] = \frac{1}{\mu+\zeta} + \frac{\mu}{\mu+\zeta} \cdot 0 + \frac{\zeta}{\mu+\zeta} \cdot \left(\frac{1}{\theta} + E[T]\right) \tag{2}$$

διότι ένας τέτοιος πελάτης θα περιμένει κατά μέσο όρο $\frac{1}{\mu+\zeta}$ μέχρι το επόμενο γεγονός (το ελάχιστο από δυο ανεξάρτητες εκθετικές κατανομές που αντιστοιχούν στην ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του και στην απενεργοποίηση του υπηρέτη) οπότε με πιθανότητα $\frac{\mu}{\mu+\zeta}$ θα ολοκληρώσει πρώτα την εξυπηρέτηση του και τότε ο υπολοιπόμενος χρόνος παραμονής του είναι 0 ή με πιθανότητα $\frac{\zeta}{\mu+\zeta}$ θα απενεργοποιηθεί ο υπηρέτης και τότε θα πρέπει να περιμένει κατά μέσο όρο $\frac{1}{\theta}$ μέχρι την ενεργοποίησή του συν έναν χρόνο $E[T]$ αφού η διαδικασία επαναλαμβάνεται η ίδια. Επιλύοντας την τελευταία εξίσωση προκύπτει

$$E[T] = \frac{1}{\mu} + \frac{\zeta}{\mu}\,\frac{1}{\theta}. \tag{3}$$

Στην ίδια εξίσωση θα μπορούσαμε να καταλήξουμε εναλλακτικά, σκεφτόμενοι ότι ο μέσος συνολικός χρόνος $E[T]$ που θα διαρκέσει η εξυπηρέτηση ενός πελάτη συμπεριλαμβανομένων και των ανενεργών περιόδων του υπηρέτη ισούται με το μέσο χρόνο εξυπηρέτησης $\frac{1}{\mu}$, προσαυξημένο με το μέσο συνολικό χρόνο των ανενεργών περιόδων που διακόπτουν την εξυπηρέτησή του. Επειδή οι απενεργοποιήσεις συμβαίνουν με ρυθμό ζ ο μέσος αριθμός ανενεργών περιόδων που διακόπτουν ένα χρόνο εξυπηρέτησης είναι $\zeta\frac{1}{\mu}$. Επιπλέον κάθε μια από αυτές διαρκεί κατά μέσο όρο $\frac{1}{\theta}$ οπότε ο μέσος συνολικός χρόνος που διακόπτεται ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι $\frac{\zeta}{\mu}\,\frac{1}{\theta}$.

Λόγω της ιδιότητας PASTA το μέσο πλήθος πελατών που βλέπει ένας πελάτης κατά την άφιξή του είναι ίσο με $E[Q]$. Ένας πελάτης ο οποίος κατά την άφιξή του βρίσκει τον υπηρέτη ενεργοποιημένο θα πρέπει να περιμένει να εξυπηρετηθούν όσοι είναι πριν από αυτόν και ο ίδιος, όπου όλοι έχουν χρόνο εξυπηρέτησης μαζί με τις αντίστοιχες ανενεργές περιόδους T. Αν όμως κατά την άφιξή του ο υπηρέτης είναι απενεργοποιημένος θα πρέπει επιπλέον να περιμένει μέχρι την ενεργοποίηση του υπηρέτη (υπολειπόμενο χρόνο ενεργοποίησης). Έτσι έχουμε

$$E[S] = \pi_0 \frac{1}{\theta} + (E[Q] + 1)E[T] \tag{4}$$

η οποία αντικαθιστώντας τις (1) και (3) γίνεται

$$E[S] = \frac{\zeta}{\theta(\theta+\zeta)} + (E[Q] + 1)\,\frac{\theta+\zeta}{\mu\theta}. \tag{5}$$

Επιπλέον από το Θεώρημα του Little

$$E[Q] = \lambda E[S]. \tag{6}$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων προκύπτει ότι

$$E[S] = \frac{\mu+\theta+\zeta-\lambda}{\mu\theta-\lambda(\theta+\zeta)} - \frac{1}{\theta+\zeta} \qquad \text{και} \qquad E[Q] = \lambda E[S].$$