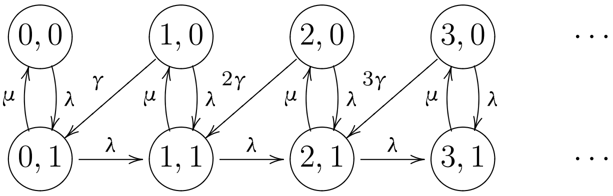
Βασικά αποτελέσματα - Άσκηση 8

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με επαναπροσπάθειες, το οποίο διαθέτει έναν υπηρέτη και μηδενικό χώρο αναμονής. Οι πελάτες φθάνουν σύμφωνα με μία διαδικασία Poisson με ρυθμό λ ενώ για κάθε πελάτη ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι εκθετικός με παράμετρο μ. Ένας πελάτης που κατά την άφιξή του βρίσκει τον υπηρέτη ελεύθερο εξυπηρετείται αμέσως. Αν όμως βρει τον υπηρέτη απασχολημένο τότε αναχωρεί από το σύστημα και προσπαθεί αργότερα μέχρι τελικά να καταφέρει να εξυπηρετηθεί. Οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών επαναπροσπαθειών είναι εκθετικοί με ρυθμό γ. Οι πελάτες που δεν έχουν εξυπηρετηθεί και βρίσκονται σε τροχιά επαναπροσπάθειας δρουν ανεξάρτητα. Να βρεθεί ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα καθώς και ο μέσος χρόνος παραμονής τους.

Λύση:

Οι πελάτες που βρίσκουν τον υπηρέτη απασχολημένο μπαίνουν σε τροχιά επαναπροσπάθειας. Έστω $Q(t)$ ο αριθμός των πελατών σε τροχιά επαναπροσπάθειας τη στιγμή t και $I(t)$ η κατάσταση του υπηρέτη τη στιγμή t, όπου $I(t)$=0 ή 1(0: ελεύθερος, 1: απασχολημένος). Τότε η $\{(Q(t), I(t)),\ t \geq 0\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου με χώρο καταστάσεων $S = \{(n, i),\ i = 0, 1,\ n = 0, 1, \ldots\}$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης το παρακάτω:



Αρχικά θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες ο υπηρέτης να είναι ελεύθερος ή απασχολημένος, π_0 και π_1 αντίστοιχα. Θέτουμε $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ να είναι η ένταση συνωστισμού του συστήματος. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Little στο χώρο εξυπηρέτησης κατά τα γνωστά και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\pi_0 + \pi_1 = 1$, προκύπτει ότι

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho \qquad \text{και} \qquad \pi_1 = \rho. \tag{1}$$

Έστω S ο συνολικός χρόνος παραμονής ενός πελάτη μέχρι τελικά να εξυπηρετηθεί, T ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη σε τροχιά επαναπροσπάθειας (δεδομένου ότι μπαίνει στην κατάσταση αυτή) και N το πλήθος των εξυπηρετήσεων κατά τη διάρκεια του χρόνου T. Ένας πελάτης που κατά την άφιξή του βρίσκει τον υπηρέτη ελεύθερο εξυπηρετείται αμέσως οπότε ο χρόνος παραμονής του είναι μόνο ο χρόνος εξυπηρέτησης. Αν τον βρει απασχολημένο τότε μπαίνει σε φάση επαναπροσπάθειας όπου θα μείνει για χρόνο T και επιπλέον θα μείνει όσο χρειάζεται για να εξυπηρετηθεί. Έτσι,

$$E[S|I^- = 1] = E[T] + \frac{1}{\mu} \qquad \text{και} \qquad E[S|I^- = 0] = \frac{1}{\mu} \tag{2}$$

Επιπλέον ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη σε φάση επαναπροσπάθειας, T, ισούται με το χρόνο εξυπηρέτησης των πελατών που εξυπηρετούνται στο διάστημα αυτό και το χρόνο που απαιτείται για την επαναπροσπάθειά του. Έχουμε δηλαδή ότι

$$E[T] = E[N] \cdot \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma}. \tag{3}$$

Δεσμεύοντας την $E[S]$ ως προς την κατάσταση του υπηρέτη που ένας πελάτης βρίσκει κατά την άφιξή του έχουμε

$$\begin{aligned} E[S] &= P[I^- = 0]E[S|I^- = 0] + P[I^- = 1]E[S|I^- = 1] \\ &= \pi_0 E[S|I^- = 0] + \pi_1 E[S|I^- = 1] \\ &= \frac{1}{\mu} + \rho \left(E[N] \cdot \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\gamma} \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Η προτελευταία ισότητα ισχύει λόγω της ιδιότητας PASTA ενώ η τελευταία προκύπτει αντικαθιστώντας την (1) και λόγω της (2) σε συνδυασμό με την (3). Χρειαζόμαστε μία επιπλέον εξίσωση μεταξύ των $E[S]$ και $E[N]$. Αυτή προκύπτει αν εξισώσουμε το μέσο πλήθος αφίξεων με το μέσο πλήθος αναχωρήσεων που πραγματοποιούνται κατά την διάρκεια του χρόνου παραμονής ενός πελάτη (δεν συμπεριλαμβάνουμε ούτε την άφιξη ούτε την αναχώρηση αυτού του πελάτη στην εξίσωση). Έτσι έχουμε ότι

$$\lambda E[S] = (1-\rho) \cdot 0 + \rho \cdot E[N]. \tag{5}$$

Επιλύοντας το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων παίρνουμε

$$E[S] = \frac{\rho}{\gamma(1-\rho)} + \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

ενώ το μέσο πλήθος πελατών από Θεώρημα του Little προκύπτει άμεσα:

$$E[Q] = \lambda E[S] = \frac{\lambda\rho}{\gamma(1-\rho)} + \frac{\rho}{1-\rho}.$$