Βασικά αποτελέσματα - Άσκηση 4

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπηρέτη, στο οποίο καταφθάνουν πελάτες δύο τύπων 1 και 2 σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ_1 και λ_2 αντίστοιχα. Κάθε πελάτης ανεξαρτήτως τύπου έχει εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης παραμέτρου μ. Οι πελάτες τύπου 1 έχουν απόλυτη προτεραιότητα έναντι των πελατών τύπου 2, δηλαδή όταν υπάρχουν πελάτες τύπου 1 στο σύστημα ο υπηρέτης εξυπηρετεί αυτούς και αρχίζει να εξυπηρετεί πελάτες τύπου 2 μόνο όταν δεν υπάρχουν πελάτες τύπου 1. Επιπλέον, αν ο πελάτης τύπου 2 εξυπηρετείται και αφιχθεί πελάτης τύπου 1, ο υπηρέτης διακόπτει την εξυπηρέτηση και πηγαίνει να εξυπηρετήσει τον πελάτη τύπου 1, ενώ ο πελάτης τύπου 2 που βρισκόταν σε διαδικασία εξυπηρέτησης επιστρέφει στην ουρά. Όταν το σύστημα αδειάσει ξανά για πρώτη φορά από πελάτες τύπου 1, ο υπηρέτης θα ξαναασχοληθεί με τον πελάτη αυτόν (δεν έχει σημασία να καθορίσουμε κατά πόσο θα ξαναρχίσει την εξυπηρέτησή του από την αρχή ή θα συνεχίζει από το σημείο που βρισκόταν διότι ο υπολειπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη εκείνου θα έχει την ίδια κατανομή με τον αρχικό χρόνο εξυπηρέτησης λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής) κ.ο.κ. Να προσδιοριστούν οι μέσοι αριθμοί πελατών τύπου 1 και 2 στο σύστημα, $E[Q_1]$ και $E[Q_2]$ αντίστοιχα.

Λύση:

Έστω $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu}$, $i = 1, 2$ οι ρυθμοί συνωστισμού των πελατών τύπου 1 και 2 αντίστοιχα. Οι πελάτες τύπου 1 δεν επηρεάζονται από την ύπαρξη των πελατών τύπου 2. Μπορούμε έτσι να θεωρήσουμε ότι σχηματίζουν μια $M/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ_1, για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$E[Q_1] = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}. \tag{1}$$

Ο μέσος (συνολικός) αριθμός πελατών στο σύστημα δεν επηρεάζεται από τη σειρά εξυπηρέτησής τους, αφού και οι δυο τύποι πελατών έχουν την ίδια κατανομή χρόνων εξυπηρέτησης. Επιπλέον, λόγω της αμνήμονης ιδιότητας της εκθετικής κατανομής ο υπολοιπόμενος χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη τύπου 2 του οποίου η εξυπηρέτηση διακόπτεται λόγω της άφιξης ενός πελάτη τύπου 1 εξακολουθεί να είναι εκθετικός με παράμετρο μ. Έτσι, αγνοώντας τον τύπο των πελατών έχουμε ότι το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια $M/M/1$ ουρά με διαδικασία αφίξεων

Poisson$(\lambda_1 + \lambda_2)$. Άρα

$$E[Q_1 + Q_2] = \frac{\rho_1 + \rho_2}{1 - (\rho_1 + \rho_2)}. \tag{2}$$

Επειδή $E[Q_1 + Q_2] = E[Q_1] + E[Q_2]$, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε ότι

$$E[Q_2] = \frac{\rho_2}{(1 - \rho_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}.$$