Βασικά αποτελέσματα - Άσκηση 5

Να βρείτε τις στάσιμες κατανομές $\{p_n\}$, $\{r_n\}$ και $\{d_n\}$ του αριθμού πελατών σε συνεχή χρόνο, σε στιγμές αφίξεων και σε στιγμές αναχωρήσεων σε μια ευσταθή $M/M/1$ ουρά με ρυθμό αφίξεων λ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Little και την ιδιότητα PASTA.

Υπόδειξη: Για το σκοπό αυτό θεωρήστε ως "σύστημα" την i θέση του συστήματος, διαδοχικά για $i = 1, 2, ...$(Σκεφτείτε ποιος είναι ο μέσος αριθμός πελατών που βρίσκεται στην i θέση του συστήματος, ποιος είναι ο μέσος ρυθμός αφίξεων στην i θέση του συστήματος και ποιος είναι ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη σ' αυτήν).

Λύση:

Θέτουμε Q να είναι μια τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στη στάσιμη κατανομή (p_n) του πλήθους των πελατών στο σύστημα σε συνεχή χρόνο και Q^- μια τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στη στάσιμη κατανομή (r_n) του πλήθους των πελατών στο σύστημα αμέσως πριν τις στιγμές αφίξεων. Επικεντρωνόμαστε στην i θέση, $i = 1, 2, ...$ του συστήματος και ορίζουμε

$$Q(i)= \text{αριθμός πελατών στην } i \text{ θέση} = \begin{cases} 1 & \text{αν η } i\text{-οστή θέση είναι κατειλημμένη,} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$\lambda(i)$ = ο ρυθμός άφιξης στην i-οστή θέση = ρυθμός πελατών που περνάνε από την i θέση = ρυθμός άφιξης πελατών που βρίσκουν τουλάχιστον $i - 1$ πελάτες κατά την άφιξή τους, και

$S(i)$ = ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη στην i θέση.

Αν θεωρήσουμε ως σύστημα μόνο τη θέση i και εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Little, θα έχουμε ότι

$$E[Q(i)] = \lambda(i)E[S(i)]. \tag{1}$$

Όμως

$$E[Q(i)] = 0 \cdot P[Q(i) = 0] + 1 \cdot P[Q(i) = 1] = P[Q(i) = 1] = P[Q \geq i] = \sum_{n=i}^{\infty} p_n. \tag{2}$$

Επιπλέον ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων στη θέση i είναι

$$\lambda(i) = \lambda \cdot P[Q^- \geq i - 1] = \lambda \sum_{n=i-1}^{\infty} r_n = \lambda \sum_{n=i-1}^{\infty} p_n, \tag{3}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της ιδιότητας PASTA. Τέλος ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη στη θέση i είναι ίσος με το χρόνο εξυπηρέτησης του πρώτου πελάτη στην ουρά (αυτού δηλαδή που εξυπηρετείται) αφού μετά την ολοκλήρωση αυτής της εξυπηρέτησης ο πελάτης θα βρεθεί στη θέση $i-1$. Αλλά αυτός είναι εκθετικός με παράμετρο μ λόγω της αμνήμονης ιδιότητας. Έτσι

$$E[S(i)] = \frac{1}{\mu}. \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας τις (2),(3) και (4) στην (1) και θέτωντας $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ παίρνουμε

$$\sum_{n=i}^{\infty} p_n = \rho \sum_{n=i-1}^{\infty} p_n. \tag{5}$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για τη θέση $i+1$, οπότε θα προκύψει ότι

$$\sum_{n=i+1}^{\infty} p_n = \rho \sum_{n=i}^{\infty} p_n. \tag{6}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (5) και (6) προκύπτει $p_i = \rho p_{i-1} = \rho^2 p_{i-2} = \cdots = \rho^i p_0,\ i = 0, 1, \ldots$. Λαμβάνοντας υπόψη και την εξίσωση κανονικοποίησης, $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$, που δίνει $p_0 = 1-\rho$ παίρνουμε τελικά

$$p_i = \rho^i (1-\rho),\ i \geq 0.$$

Λόγω των μεμονωμένων μεταβάσεων και της ιδιότητας PASTA, έχουμε ότι $p_i = r_i = d_i$.