Απλές Μαρκοβιανές ουρές - Άσκηση 2

Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, με αποθαρρυνόμενους πελάτες, όπου κάθε πελάτης που βρίσκει n πελάτες στο σύστημα κατά την άφιξη του αναχωρεί με πιθανότητα $q_0 = \frac{1}{4}$ και $q_n = \frac{3}{4}$ για $n > 0$. Να βρεθούν:

a. η συνθήκη στασιμότητας (ευστάθειας) για το σύστημα,

b. οι κατανομές (p_n), (r_n) και (d_n) του αριθμού των πελατών σε συνεχή χρόνο, σε στιγμές αφίξεων και σε στιγμές αναχωρήσεων, όταν υπάρχουν και

c. το ποσοστό των χαμένων πελατών.

Λύση:

Θεωρούμε $\{Q(t),\, t \geq 0\}$ τη στοχαστική διαδικασία που μετράει το πλήθος των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t, $t \geq 0$. Ο χώρος καταστάσεων είναι το $\mathbb{N}_0$. Θα αποδείξουμε ότι η $Q(t)$ έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Παρατηρούμε πως από κάθε κατάσταση n μεταβαίνουμε στη κατάσταση $n+1$ μόνο με άφιξη ενός νέου πελάτη στο σύστημα. Ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει η άφιξη ενός πελάτη είναι εκθετικός με ρυθμό λ, όμως κάθε αφικνούμενος πελάτης μπαίνει στο σύστημα με πιθανότητα $1 - q_n$. Τότε ο πραγματικός ρυθμός άφιξης πελατών στο σύστημα, δηλαδή ο ρυθμός αφίξεων πελατών που αποφασίζουν να παραμείνουν και επομένως να μεταβάλλουν την κατάσταση του συστήματος, είναι $\lambda_n = (1 - q_n)\lambda$, όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα. Άρα ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει η μετάβαση από την κατάσταση n στην $n+1$ είναι εκθετικός με παράμετρο $(1-q_n)\lambda$. Επίσης από μια κατάσταση n μπορούμε να πάμε στην $n-1$ με την αναχώρηση ενός πελάτη. Ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει η μετάβαση είναι εκθετικός με παράμετρο μ. Συνοπτικά έχουμε:

Καταστάσεις	Χρόνος Μετάβασης
$n \to n+1,\, n \geq 0$	$Exp((1-q_n)\lambda)$
$n \to n-1,\, n \geq 1$	$Exp(\mu)$

Συνεπώς η $Q(t)$ διαθέτει την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Στη συνέχεια δίνεται το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

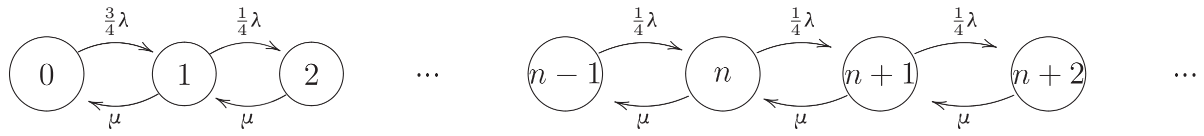

Figure 1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

Άρα η στοχαστική διαδικασία $Q(t)$ είναι μια διαδικασία γέννησης-θανάτου με ρυθμούς

$$\lambda_n = \lambda(1-q_n) = \begin{cases} \frac{3}{4}\lambda, & \text{αν} \quad n=0 \\ \frac{1}{4}\lambda, & \text{αν} \quad n \geq 1 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \mu_n = \mu, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Η γενική συνθήκη ύπαρξης στάσιμης κατανομής γίνεται

$$\begin{aligned} B^{-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{3}{4}\lambda \frac{1}{4}\lambda \cdots \frac{1}{4}\lambda}{\mu^n} \\ &= 1 + 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^n < \infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει, λόγω της γεωμετρικής σειράς, αν και μόνο αν $\frac{\lambda}{4\mu} < 1$ και τότε

$$\begin{aligned} B^{-1} &= 1 + 3\frac{\lambda}{4\mu}\frac{1}{1-\frac{\lambda}{4\mu}} \\ &= 1 + 3\frac{\lambda}{4\mu - \lambda} \\ &= \frac{4\mu + 2\lambda}{4\mu - \lambda} \\ &\overset{\rho=\lambda/\mu}{=} \frac{4+2\rho}{4-\rho}, \end{aligned} \tag{3}$$

όπου $\rho = \lambda/\mu < 4$. Η αντίστοιχη οριακή κατανομή είναι

$$\begin{aligned} p_n &= B\frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \\ &= 3B\left(\frac{\lambda}{4\mu}\right)^n \\ &\overset{(3)}{=} 3\frac{4-\rho}{4+2\rho}\left(\frac{\rho}{4}\right)^n, \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{4}$$

και

$$p_0 \;=\; B \;=\; \frac{4-\rho}{4+2\rho}. \tag{5}$$

Επειδή έχουμε μεμονωμένες μεταβάσεις έπεται ότι $(r_n) = (d_n)$ και $r_n = d_n = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*}$, όπου λ^* είναι ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων που υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
\lambda^* &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n \\
&= \lambda_0 p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n p_n \\
&= \frac{3}{4}\lambda p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4}\lambda p_n \\
&= \frac{3}{4}\lambda p_0 + \frac{1}{4}\lambda(1-p_0) \\
&= \frac{3\lambda}{4+2\rho}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Άρα

$$r_n = d_n \;=\; \begin{cases} 1-\frac{\rho}{4}, & \text{αν } n = 0 \\ \left(\frac{\rho}{4}\right)^n (1-\frac{\rho}{4}), & \text{αν } n \geq 1 \end{cases}, \tag{7}$$

και επομένως οι στάσιμες πιθανότητες $r_n = d_n$ ακολουθούν τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\frac{\rho}{4}$. Τέλος το ποσοστό των χαμένων πελατών υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned}
\text{ποσοστό χαμένων πελατών} &= 1 - \frac{\lambda^*}{\lambda} \\
&= 1 - \frac{\frac{3\lambda}{4+2\rho}}{\lambda} \\
&= \frac{1+2\rho}{4+2\rho}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα μπορούσε ισοδύναμα να υπολογιστεί ως

$$\begin{aligned}
\text{ποσοστό χαμένων πελατών} &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n r_n^{\text{ολικό}} \\
&\overset{\substack{\text{Ιδιότητα}\\ \text{PASTA}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} q_n p_n \\
&= \frac{1}{4}p_0 + \frac{3}{4}(1-p_0) \\
&= \frac{1+2\rho}{4+2\rho}. \qquad (9)
\end{aligned}$$