Απλές Μαρκοβιανές ουρές - Άσκηση 1

Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/1$ ουράς με ρυθμό αφίξεων λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης μ, όπου ο χρόνος υπομονής κάθε πελάτη που περιμένει στην ουρά (δηλ. δεν εξυπηρετείται) έχει την εκθετική κατανομή με παράμετρο ν και μόλις αυτός συμπληρωθεί ο πελάτης αναχωρεί. Αιτιολογήστε γιατί η στοχαστική διαδικασία που καταγράφει τον αριθμό των παρόντων πελατών είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και βρείτε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασής της. Για την περίπτωση που $\nu = \mu$, βρείτε την οριακή κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα (σε συνεχή χρόνο).

Λύση:

Θεωρούμε $\{Q(t), t \geq 0\}$ τη στοχαστική διαδικασία που μετράει το πλήθος των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t, $t \geq 0$. Ο χώρος καταστάσεων είναι το $\mathbb{N}_0$. Θα αποδείξουμε ότι η $Q(t)$ διαθέτει την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Πράγματι, παρατηρούμε πως από κάθε κατάσταση n μεταβαίνουμε στη κατάσταση $n+1$ μόνο με άφιξη ενός νέου πελάτη στο σύστημα. Ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει αυτή η μετάβαση είναι εκθετικός με ρυθμό λ. Επίσης από μια κατάσταση n μπορούμε να πάμε στην $n-1$ με αναχώρηση ενός πελάτη. Ένας πελάτης αναχωρεί από το σύστημα είτε γιατί ολοκληρώθηκε η εξυπηρέτηση του, αν είναι σε διαδικασία εξυπηρέτησης, είτε γιατί αποχωρεί αφού έληξε ο χρόνος υπομονής του. Αναλυτικά:

$1 \to 0$ Η μετάβαση από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 0 γίνεται μόνο αν αναχωρήσει από το σύστημα ο πελάτης που εξυπηρετείται, μετά από εκθετικό χρόνο παραμέτρου μ.

$2 \to 1$ Η μετάβαση από την κατάσταση 2 στην κατάσταση 1 γίνεται είτε αν αναχωρήσει από το σύστημα ο πελάτης που εξυπηρετείται, μετά από εκθετικό χρόνο παραμέτρου μ, είτε αν αναχωρήσει από το σύστημα ο πελάτης σε αναμονή, μετά απο εκθετικό χρόνο παραμέτρου ν. Το γεγονός που καταγράφει η $Q(t)$ θα είναι αυτό που θα συμβεί στον μικρότερο χρόνο. Γνωρίζουμε πως το min τ.μ. που ακολουθούν εκθετική κατανομή ακολουθεί επίσης εκθετική κατανομή με παράμετρο το άθροισμα των παραμέτρων των αρχικών τ.μ.. Άρα η μετάβαση $2 \to 1$ θα γίνει σε εκθετικό χρόνο παραμέτρου $\mu + \nu$.

$3 \to 2$ Η μετάβαση από την κατάσταση 3 στην κατάσταση 2 γίνεται είτε αν αναχωρήσει από το σύστημα ο πελάτης που εξυπηρετείται, μετά από εκθετικό χρόνο παραμέτρου μ, είτε αν αναχωρήσει από το σύστημα ένας από τους δυο πελάτες σε αναμονή- αυτός με το μικρότερο χρόνο υπομονής- και άρα μετά απο εκθετικό χρόνο παραμέτρου 2ν. Άρα η μετάβαση $3 \to 2$ θα γίνει σε εκθετικό χρόνο παραμέτρου $\mu + 2\nu$.

$n \to n-1$ Με την ίδια συλλογιστική η μετάβαση από την κατάσταση n στην κατάσταση $n-1$ γίνεται είτε αν αναχωρήσει από το σύστημα ο πελάτης που εξυπηρετείται, μετά από εκθετικό χρόνο παραμέτρου μ, είτε αν αναχωρήσει από το σύστημα ένας από τους $n-1$ πελάτες σε αναμονή- αυτός με το μικρότερο χρόνο υπομονής- και άρα μετά απο εκθετικό χρόνο παραμέτρου $(n-1)\nu$. Άρα η μετάβαση $n \to n-1$ θα γίνει σε εκθετικό χρόνο παραμέτρου $\mu + (n-1)\nu$.

Καταστάσεις	Χρόνος Μετάβασης
$n \to n+1,\ n \geq 0$	$Exp(\lambda)$
$n \to n-1,\ n \geq 1$	$Exp(\mu + (n-1)\nu)$

Συνεπώς η $Q(t)$ διαθέτει την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Στη συνέχεια δίνεται το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης (σχήμα 1).

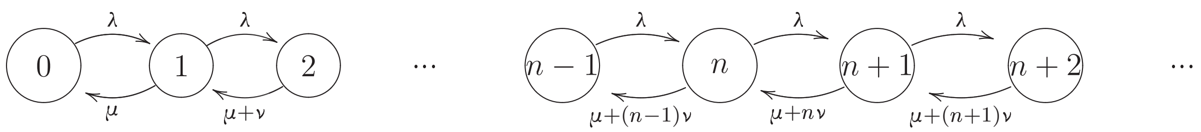

Figure 1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

Στην περίπτωση που $\mu = \nu$ τότε το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης έχει την δομή του σχήματος 2. Άρα η στοχαστική διαδικασία $Q(t)$ είναι μια διαδικασία γέννησης-θανάτου με ρυθμούς

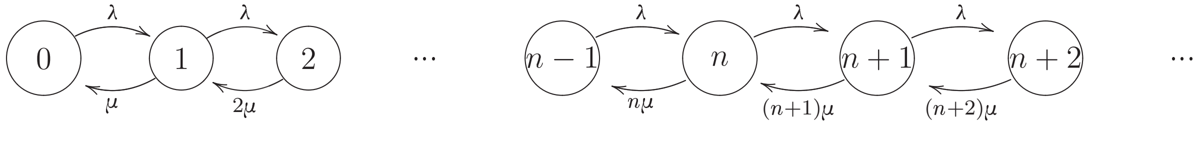

Figure 2: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

$$\lambda_n = \lambda,\ \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \mu_n = n\mu,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Η γενική συνθήκη ύπαρξης στάσιμης κατανομής γίνεται

$$
\begin{aligned}
B^{-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu 2\mu \cdots n\mu} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \\
&= e^{\lambda/\mu} = e^{\rho} < \infty, \qquad (2)
\end{aligned}
$$

η οποία ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του $\rho = \lambda/\mu$. Η αντίστοιχη οριακή κατανομή είναι

$$
\begin{aligned}
p_n &= B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \\
&= B \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \\
&\overset{(2)}{=} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!}, \qquad (3)
\end{aligned}
$$

δηλαδή η κατανομή Poisson(ρ).