Απλές Μαρκοβιανές ουρές - Άσκηση 4

Θεωρούμε την τροποποίηση της $M/M/k/k$ ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, όπου ορισμένοι πελάτες αποχωρούν από το σύστημα αμέσως μόλις αφιχθούν χωρίς να εξυπηρετηθούν (αποθαρρυνόμενοι πελάτες). Συγκεκριμένα, κάθε πελάτης που βρίσκει n άλλα άτομα στο σύστημα κατά την άφιξή του αναχωρεί με πιθανότητα $\frac{n}{k}, n = 0, 1, ..., k$.

α. Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών $Q(t)$ στο σύστημα. Τι είδους κατανομή είναι;

β. Να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των άμεσα αποχωρούντων πελατών (χαμένων πελατών).

γ. Να βρεθούν οι οριακές κατανομές (r_n) και (d_n) των εμφυτευμένων διαδικασιών $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα, που αναφέρονται στους πραγματικούς πελάτες (σε αυτούς δηλαδή που εισέρχονται τελικά στο σύστημα).

δ. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα, λαμβάνοντας υπόψιν όλους τους πελάτες. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S']$ ενός πελάτη στο σύστημα, λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τους πελάτες που εξυπηρετούνται.

ε. Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος.

Λύση:

Θεωρούμε $\{Q(t),\, t \geq 0\}$ την στοχαστική διαδικασία που μετράει το πλήθος των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή $t, t \geq 0$. Ο χώρος καταστάσεων είναι το $\{0, 1, \cdots, k\}$. Παρατηρούμε ότι η στοχαστική διαδικασία $Q(t)$ είναι μια διαδικασία γέννησης-θανάτου με ρυθμούς

$$\lambda_n = \frac{k-n}{k}\lambda,\ \forall n \in \{0, 1, \cdots, k-1\}, \quad \mu_n = n\mu,\ \forall n \in \{1, 2, \cdots, k\}. \tag{1}$$

Στη συνέχεια δίνεται το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

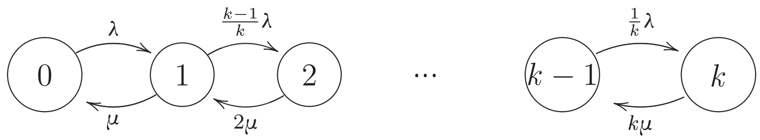

Figure 1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

Η γενική συνθήκη ύπαρξης στάσιμης κατανομής γίνεται

$$\begin{aligned} B^{-1} &= 1+\sum_{n=1}^{k}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \\ &= 1+\sum_{n=1}^{k}\frac{\lambda\frac{k-1}{k}\lambda\cdots\frac{k-n+1}{k}\lambda}{\mu 2\mu\cdots n\mu} \\ &= 1+\sum_{n=1}^{k}\binom{k}{n}(\lambda/k\mu)^n \\ &= \left(1+\frac{\lambda}{k\mu}\right)^k<\infty, \end{aligned} \tag{2}$$

η οποία ισχύει για κάθε τιμή των λ, μ, k. Η αντίστοιχη οριακή κατανομή είναι

$$\begin{aligned} p_n &= B\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \\ &= B\binom{k}{n}(\lambda/k\mu)^n \\ &\overset{(2)}{=} \binom{k}{n}(\lambda/k\mu)^n\left(\frac{k\mu}{\lambda+k\mu}\right)^k \\ &= \binom{k}{n}\left(\frac{\lambda}{\lambda+k\mu}\right)^n\left(\frac{k\mu}{\lambda+k\mu}\right)^{k-n}, \quad n\geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

δηλαδή κατανομή Διωνυμική με πιθανότητα επιτυχίας $\frac{\lambda}{\lambda+k\mu}$. Η μέση τιμή της Διωνυμικής κατανομής είναι $\sum_{n=0}^{k} np_n = k\frac{\lambda}{\lambda+k\mu}$.

Το ποσοστό των χαμένων πελατών είναι ίσο με $1-\frac{\lambda^*}{\lambda}$. Για τον υπολογισμό του πραγματικού ρυθμού αφίξεων πελατών στο σύστημα, λ^*, θα εφαρμόσουμε την σχέση

$$\begin{aligned}
\lambda^* &= \sum_{n=0}^{k} \lambda_n p_n \\
&= \sum_{n=0}^{k} \frac{k-n}{k} \lambda p_n \\
&= \lambda - \frac{1}{k}\lambda \sum_{n=0}^{k} n p_n \\
&= \lambda - \frac{1}{k}\lambda k \frac{\lambda}{\lambda + k\mu} \\
&= \lambda \frac{k\mu}{\lambda + k\mu}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\text{ποσοστό χαμένων πελατών} &= 1 - \frac{\lambda^*}{\lambda} \\
&= 1 - \frac{\lambda \frac{k\mu}{\lambda+k\mu}}{\lambda} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + k\mu}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα μπορούσε ισοδύναμα να υπολογιστεί ως

$$\begin{aligned}
\text{ποσοστό χαμένων πελατών} &= \sum_{n=0}^{k} \frac{n}{k} r_n^{\text{ολικό}} \\
&\overset{\substack{\text{Ιδιότητα} \\ \text{PASTA}}}{=} \sum_{n=0}^{k} \frac{n}{k} p_n \\
&= \frac{1}{k} k \frac{\lambda}{\lambda + k\mu} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + k\mu}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Επειδή έχουμε μεμονωμένες μεταβάσεις έπεται ότι $(r_n) = (d_n)$ και $r_n = d_n = \frac{\lambda_n p_n}{\lambda^*}$, όπου $\lambda^* = \lambda \frac{k\mu}{\lambda+k\mu}$. Άρα

$$r_n = d_n = \binom{k-1}{n} \left(\frac{\lambda}{\lambda + k\mu}\right)^n \left(\frac{k\mu}{\lambda + k\mu}\right)^{k-1-n}, \qquad (7)$$

άρα $r_n = d_n$ έχουν την Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $k-1$ και $\frac{\lambda}{\lambda+k\mu}$.

Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα λαμβάνοντας υπόψη όλους τους πελάτες θα υπολογιστεί με χρήση του θεωρήματος Little. Αναλυτικά

$$
\begin{aligned}
E[S] &= \frac{1}{\lambda}E[Q] \\
&= \frac{1}{\lambda}k\frac{\lambda}{\lambda+k\mu} \\
&= \frac{k}{\lambda+k\mu}. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα λαμβάνοντας υπόψη μόνο αυτούς που εξυπηρετούνται θα υπολογιστεί και πάλι με χρήση του θεωρήματος Little. Αναλυτικά

$$
\begin{aligned}
E[S^{'}] &= \frac{1}{\lambda^*}E(Q) \\
&= \frac{1}{\lambda\frac{k\mu}{\lambda+k\mu}}k\frac{\lambda}{\lambda+k\mu} \\
&= \frac{1}{\mu}. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

το οποίο ήταν βέβαια αναμενόμενο αφού οι πελάτες που δεν αποθαρρύνονται αρχίζουν αμέσως να εξυπηρετούνται. Τέλος, για τον υπολογισμό των μέσων χρόνων λειτουργίας, αργίας και κύκλου απασχόλησης θα χρησι-μοποιήσουμε τις ακόλουθες σχέσεις.

$$
\begin{aligned}
E[I] &= \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda} \qquad (10) \\
\frac{E[I]}{E[Z]} &= p_0 = \left(\frac{k\mu}{\lambda+k\mu}\right)^k \qquad (11) \\
E[Z] &= E[I] + E[Y] \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Από τις σχέσεις (10) και (11) έπεται ότι $E[Z] = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{k\mu}{\lambda+k\mu}\right)^{-k}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των $E[I]$ και $E[Z]$ στην σχέση (12) προκύπτει άμεσα ο υπολογισμός του $E[Y]$.