Απλές Μαρκοβιανές ουρές - Άσκηση 3

Θεωρούμε μια απλή Μαρκοβιανή ουρά με ρυθμούς αφίξεων και αναχωρήσεων $\lambda_n = \alpha^n \lambda, (n \geq 0)$ και $\mu_n = n\alpha^n \mu, (n \geq 1)$ αντίστοιχα, όπου $\alpha \in (0,1), \lambda, \mu > 0$ γνωστές παράμετροι.

α. Πότε η ουρά είναι στάσιμη (ευσταθής); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_j) του αριθμού των πελατών $Q(t)$ στο σύστημα. Τι είδους κατανομή είναι;

β. Να βρεθούν οι κατανομές (r_j) και (d_j) των εμφυτευμένων διαδικασιών $\{Q_j^-\}$ και $\{Q_j^+\}$ του αριθμού των πελατών σε στιγμές αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα. Τι κατανομές είναι;

γ. Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα, καθώς και οι μέσοι χρόνοι συνεχούς λειτουργίας, αργίας και κύκλου απασχόλησης $E[Y], E[I]$ και $E[Z]$ αντίστοιχα.

Λύση:

Θεωρούμε $\{Q(t),\, t \geq 0\}$ τη στοχαστική διαδικασία που καταγράφει το πλήθος των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t, $t \geq 0$. Ο χώρος καταστάσεων είναι το $\mathbb{N}_0$. Παρατηρούμε ότι η στοχαστική διαδικασία $Q(t)$ είναι μια διαδικασία γέννησης-θανάτου με ρυθμούς

$$\lambda_n = \alpha^n \lambda, \;\; n \in \mathbb{N}_0, \quad \mu_n = n\alpha^n \mu, \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Στη συνέχεια δίνεται το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

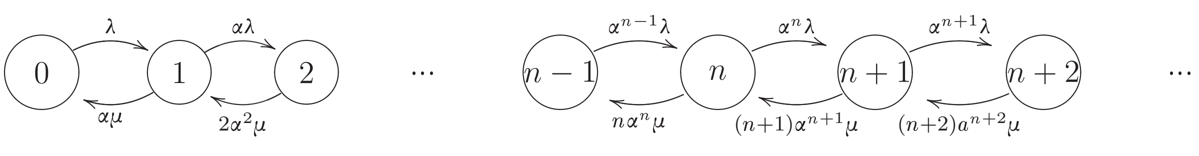

Figure 1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

Η γενική συνθήκη ύπαρξης στάσιμης κατανομής γίνεται

$$\begin{aligned} B^{-1} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda \alpha \lambda \cdots \alpha^{n-1} \lambda}{\alpha \mu 2 \alpha^2 \mu \cdots n \alpha^n \mu} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda/\alpha\mu)^n}{n!} \\ &= e^{\lambda/\alpha\mu} < \infty \end{aligned} \tag{2}$$

η οποία ισχύει για κάθε τιμή των λ, μ, α. Η αντίστοιχη οριακή κατανομή είναι

$$\begin{aligned} p_j &= B \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_j} \\ &= B \frac{(\lambda/\alpha\mu)^j}{j!} \\ &\overset{(2)}{=} e^{-\lambda/\alpha\mu} \frac{(\lambda/\alpha\mu)^j}{j!}, \quad j \geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

δηλαδή κατανομή Poisson(λ/αμ).

Επειδή έχουμε μεμονωμένες μεταβάσεις έπεται ότι $(r_j) = (d_j)$ και $r_j = d_j = \frac{\lambda_j p_j}{\lambda^*}$, όπου λ^* είναι ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων που υπολογίζεται ως

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \lambda e^{-\lambda/\alpha\mu} \frac{(\lambda/\alpha\mu)^n}{n!} \\ &= \lambda e^{-\lambda/\alpha\mu} e^{\lambda/\mu} = \lambda e^{(1-\alpha)\lambda/\mu}. \end{aligned} \tag{4}$$

Άρα

$$r_j = d_j = e^{-\lambda/\mu} \frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}, \; j \geq 0 \tag{5}$$

άρα $r_j = d_j$ έχουν την Poisson κατανομή με παράμετρο $\frac{\lambda}{\mu}$.

Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα θα υπολογιστεί με την χρήση του θεωρήματος του

Little. Αναλυτικά

$$
\begin{aligned}
E[S] &= \frac{1}{\lambda^*}E[Q] \\
&= \frac{1}{\lambda e^{(1-\alpha)\lambda/\mu}}\frac{\lambda}{\alpha\mu} \\
&= \frac{e^{-(1-\alpha)\lambda/\mu}}{\alpha\mu}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Τέλος για τον υπολογισμό των μέσων χρόνων λειτουργίας, αργίας και κύκλου απασχόλησης θα χρησιμο-ποιήσουμε τις ακόλουθες σχέσεις.

$$E[I] = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda} \tag{7}$$

$$\frac{E[I]}{E[Z]} = p_0 = e^{-\lambda/\alpha\mu} \tag{8}$$

$$E[Z] = E[I] + E[Y] \tag{9}$$

Από τις σχέσεις (7) και (8) έπεται ότι $E[Z] = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda/\alpha\mu}$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των $E[I]$ και $E[Z]$ στην σχέση (9) προκύπτει άμεσα ο υπολογισμός του $E[Y] = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda/\alpha\mu} - 1)$.