Μαρκοβιανές ουρές και Πιθανογεννήτριες - Άσκηση 3

Θεωρούμε την $M/M/1$ ουρά με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις ($M^c/M/1$ ουρά). Οι ομάδες φθάνουν στο σύστημα με ρυθμό λ και το μέγεθός τους έχει συνάρτηση πιθανότητας $(g_j : j = 1, 2, ...)$. Μια ομάδα που βρίσκει κατά την άφιξή της το σύστημα κενό εισέρχεται σίγουρα σε αυτό, ενώ αν βρει έστω και έναν πελάτη αναχωρεί ολόκληρη, χωρίς να εξυπηρετηθεί, με πιθανότητα $1 - p$. Ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών στο σύστημα.

α. Να αιτιολογήσετε γιατί η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου και να κάνετε το διάγραμμα των ρυθμών μετάβασής της. Γράψτε τις εξισώσεις ισορροπίας για τη στάσιμη κατανομή (p_n).

β. Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής και τη συνθήκη ευστάθειας του συστήματος.

γ. Να βρεθεί συναρτήσει των πιθανοτήτων p_n και g_n, η πιθανότητα ένας πελάτης αμέσως μετά την άφιξή του στο σύστημα να καταλάβει την $n-$οστή θέση (να έχει μπροστά του $n - 1$ πελάτες).

δ. Στην περίπτωση που $g_1 = 1$ και $g_j = 0$ για $j = 2, 3, ...$ να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n).

Λύση:

Θεωρούμε $\{Q(t),\, t \geq 0\}$ την στοχαστική διαδικασία που μετράει το πλήθος των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t, $t \geq 0$. Ο χώρος καταστάσεων είναι το $\mathbb{N}_0$. Θα αποδείξουμε ότι η $Q(t)$ διαθέτει την Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Παρατηρούμε πως από κάθε κατάσταση n, $n \geq 1$ μπορούμε να πάμε στην $n-1$ με την αναχώρηση ενός πελάτη. Ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει η μετάβαση είναι εκθετικός με παράμετρο μ. Από την κατάσταση 0 μεταβαίνουμε σε οποιαδήποτε κατάσταση j, $j \geq 1$ με την άφιξη ομάδας μεγέθους j. Ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει η άφιξη μιας ομάδας είναι εκθετικός με παράμετρο λ και η αφικνούμενη ομάδα θα έχει μέγεθος j με πιθανότητα g_j. Άρα η μετάβαση απο την 0 στην j γίνεται μετά απο εκθετικό χρόνο παραμέτρου $g_j\lambda$. Από την κατάσταση n, $n \geq 1$

μεταβαίνουμε σε οποιαδήποτε κατάσταση $n+j$, $j \geq 1$, με την άφιξη ομάδας μεγέθους j. Ο χρόνος που απαιτείται για να γίνει η άφιξη μιας ομάδας είναι εκθετικός με παράμετρο λ και η αφικνούμενη ομάδα θα έχει μέγεθος j με πιθανότητα g_j. Επειδή όμως το σύστημα δεν είναι κενό η αφικνούμενη ομάδα εισέρχεται στο σύστημα με πιθανότητα p. Τελικά οι μεταβάσεις από την κατάσταση n, $n \geq 1$, στις καταστάσεις $n+j$, $j \geq 1$, γίνονται σε εκθετικό χρόνο παραμέτρου $pg_j\lambda$.

Καταστάσεις	Χρόνος Μετάβασης
$0 \to j$, $j \geq 1$	$Exp(g_j\lambda)$
$n \to n+j$, $n \geq 1$ και $j \geq 1$	$Exp(pg_j\lambda)$
$n \to n-1$, $n \geq 1$	$Exp(\mu)$

Συνεπώς η $Q(t)$ διαθέτει την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Στη συνέχεια δίνεται το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.

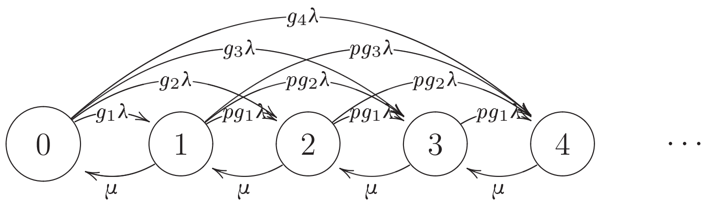

Figure 1: Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

Οι εξισώσεις ισορροπίας για την στάσιμη κατανομή του αριθμού των πελατών στο σύστημα, της παραπάνω $M^c/M/1$ ουράς, είναι

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu)p_n &= g_n\lambda p_0 + pg_{n-1}\lambda p_1 + \cdots + pg_1\lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1},\ n \geq 1 \\ &= g_n\lambda p_0 + p\lambda \sum_{k=1}^{n-1} g_{n-k}p_k + \mu p_{n+1},\ n \geq 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (2) με z^n, οπότε το σύστημα των εξισώσεων διορφώνεται ως εξής

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \tag{3}$$

$$(\lambda p+\mu)p_n z^n = g_n\lambda p_0 z^n + p\lambda \sum_{k=1}^{n-1} g_{n-k}p_k z^n + \mu p_{n+1}z^n,\ n \geq 1. \tag{4}$$

και αθροίζουμε τις εξισώσεις (3)-(4). Το αποτέλεσμα που θα πάρουμε είναι

$$\lambda p_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda p+\mu)p_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \lambda p_0 z^n + \sum_{n=1}^{\infty} p\lambda \sum_{k=1}^{n-1} g_{n-k} p_k z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \mu p_{n+1} z^n. \tag{5}$$

Θεωρούμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της στάσιμης κατανομής $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$ καθώς και την πιθανογεννήτρια του μεγέθους των αφικνούμενων ομάδων $G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n$ οπότε η σχέση (5) παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}
\lambda p_0 + (\lambda p+\mu)(\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - p_0) &= \lambda p_0 \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n + p\lambda \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1} g_{n-k} p_k z^n + \frac{\mu}{z}\sum_{n=0}^{\infty} p_{n+1} z^{n+1} \\
\lambda p_0 + (\lambda p+\mu)(P(z) - p_0) &= \lambda p_0 G(z) + p\lambda \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \sum_{n=k+1}^{\infty} g_{n-k} z^{n-k} + \frac{\mu}{z}\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \\
(\lambda p+\mu)P(z) + (\lambda q-\mu)p_0 &= \lambda p_0 G(z) + p\lambda \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k \sum_{m=1}^{\infty} g_m z^m + \frac{\mu}{z}(\sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n - p_0) \\
(\lambda p+\mu)P(z) + (\lambda q-\mu)p_0 &= \lambda p_0 G(z) + p\lambda \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k G(z) + \frac{\mu}{z}(P(z) - p_0) \\
(\lambda p+\mu)P(z) + (\lambda q-\mu)p_0 &= \lambda p_0 G(z) + p\lambda (P(z)-p_0) G(z) + \frac{\mu}{z}(P(z) - p_0) \\
(\lambda p+\mu)zP(z) + (\lambda q-\mu)zp_0 &= \lambda q z p_0 G(z) + p\lambda z P(z) G(z) + \mu(P(z) - p_0) \\
((\lambda p+\mu)z - p\lambda z G(z) - \mu)\, P(z) &= \lambda q z p_0 G(z) - \mu p_0 - (\lambda q-\mu)zp_0 \\
((\lambda p+\mu)z - p\lambda z G(z) - \mu)\, P(z) &= p_0(\lambda q z G(z) - \mu - (\lambda q-\mu)z) \\
P(z) &= \frac{p_0(\lambda q z G(z) - \mu - (\lambda q-\mu)z)}{(\lambda p+\mu)z - p\lambda z G(z) - \mu}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Για τον πλήρη προσδιορισμό της στάσιμης κατανομής υπολείπεται η εύρεση της πιθανότητας κενού συστήματος p_0. Η p_0 θα υπολογιστεί με την χρήση της εξίσωσης κανονικοποίησης, $P(1) = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 1} P(z) &= \lim_{z\to 1} \frac{p_0(\lambda q z G(z) - \mu - (\lambda q-\mu)z)}{(\lambda p+\mu)z - p\lambda z G(z) - \mu} \\
&\overset{0/0}{=} \lim_{z\to 1} \frac{p_0(\lambda q G(z) + \lambda q z G'(z) - \lambda q + \mu)}{\lambda p + \mu - p\lambda G(z) - p\lambda z G'(z)} \\
&= \frac{p_0(\lambda q G(1) + \lambda q G'(1) - \lambda q + \mu)}{\lambda p + \mu - p\lambda G(1) - p\lambda G'(1)} \\
&= \frac{p_0(\lambda q + \lambda q G'(1) - \lambda q + \mu)}{\lambda p + \mu - p\lambda - p\lambda G'(1)} \\
&= \frac{p_0(\lambda q G'(1) + \mu)}{\mu - p\lambda G'(1)} \qquad (7)
\end{aligned}$$

Από την εξίσωση κανονικοποίησης και την σχέση (7) έπεται ότι

$$1 = \frac{p_0(\lambda q G'(1) + \mu)}{\mu - p\lambda G'(1)} \quad \Rightarrow \quad p_0 = \frac{\mu - p\lambda G'(1)}{\lambda q G'(1) + \mu}, \tag{8}$$

όπου η $G'(1)$ εκφράζει το μέσο μέγεθος αφικνούμενης ομάδας. Θέτουμε $G'(1) = g$. Για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει ο μέσος ρυθμός αφίξεων να είναι μικρότερος από τον μέγιστο ρυθμό εξυπηρέτησης που παρέχει το σύστημα, δηλαδή $gp\lambda < \mu$.

Το σύστημα είναι ευσταθές ανν $p_0 > 0$, ισοδύναμα ανν $G'(1)p\lambda = gp\lambda < \mu$.

Θα συμβολίζουμε με π_n την πιθανότητα ένας πελάτης αμέσως μετά την άφιξη του να καταλάβει την n-οστή θέση. Επίσης θα συμβολίζουμε με $\widetilde{g}_m$ την πιθανότητα ένας πελάτης να είναι ο m-οστός στην ομάδα του. Τότε

$$\begin{aligned}
\pi_n &= \sum_{m=0}^{n-1} P\left(\begin{matrix}\text{ένας πελάτης αμέσως}\\ \text{μετά την άφιξη του να}\\ \text{καταλάβει την } n\text{-οστή}\\ \text{θέση}\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix}\text{κατά την άφιξη}\\ \text{της η ομάδα}\\ \text{βρίσκει } n \text{ πελάτες}\\ \text{στο σύστημα}\end{matrix}\right) P\left(\begin{matrix}\text{κατά την άφιξη της η}\\ \text{ομάδα να βρει } n \text{ πελάτες}\\ \text{στο σύστημα}\end{matrix}\right)\\
&= \sum_{m=0}^{n-1} \widetilde{g}_{n-m} r_m^{\text{ομάδας}}\\
&\overset{\substack{\text{Ιδιότητα}\\ \text{PASTA}}}{=} \sum_{m=0}^{n-1} \widetilde{g}_{n-m} p_m.
\end{aligned} \tag{9}$$

Όμως

$$\widetilde{g}_n = \frac{1}{g}\sum_{k=n}^{\infty} g_k, \tag{10}$$

όπου με g έχουμε συμβολίσει το μέσο μέγεθος αφικνούμενων ομάδων. Άρα

$$\pi_n = \frac{1}{g}\sum_{m=0}^{n-1} p_m \sum_{k=n-m}^{\infty} g_k. \tag{11}$$

Στην περίπτωση που $g_1 = 1$ και $g_j = 0 \;\forall\, j \geq 1$ έχουμε ότι $G(z) = z$ και $G'(z) = 1$ για κάθε z.

Τότε από την σχέση (6) έπεται ότι

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{p_0(\lambda q z^2 - \mu - (\lambda q - \mu) z)}{(\lambda p + \mu) z - p\lambda z^2 - \mu} \\
&= \frac{p_0(z-1)(q\lambda z - \mu)}{(z-1)(-p\lambda z + \mu)} \\
&= \frac{p_0(q\lambda z - \mu)}{\mu - p\lambda z} \\
&= p_0\left(1 + \frac{\lambda z}{\mu - p\lambda z}\right) \\
&= p_0 + p_0 \frac{\lambda z}{\mu} \frac{1}{1 - p\frac{\lambda}{\mu} z} \\
&= p_0 + p_0 \frac{\lambda z}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \left(p\frac{\lambda}{\mu} z\right)^n \\
&= p_0 + p_0 \sum_{n=0}^{\infty} p^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1} z^{n+1} \\
&= p_0 + p_0 \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} z^{n}. \qquad (12)
\end{aligned}$$

Άρα

$$p_n = \begin{cases} p_0, & \text{αν} \quad n = 0 \\ p_0 p^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, & \text{αν} \quad n \geq 1 \end{cases} \qquad (13)$$

όπου

$$p_0 = \frac{\mu - p\lambda}{\lambda q + \mu}. \qquad (14)$$