$$\underset{t=1}{x_1} \xrightarrow[c_1(x_1,a_1)]{a_1} \underset{t=2}{\overset{g_1(x_1,a_1)}{x_2}} \xrightarrow[c_2(x_2,a_2)]{a_2} \cdots \underset{t=N-1}{x_{N-1}} \xrightarrow[c_{N-1}(x_{N-1},a_{N-1})]{a_{N-1}} \underset{t=N}{x_N} \xrightarrow[c_N(x_N,a_N)]{a_N} \underset{t=N+1}{x_{N+1}} \quad \hat{c}(x_{N+1})$$

$\hat{c}(x_{N+1})$ → τερματικό κόστος

$t=N+1$ → τέλος προβλήματος

Παράδειγμα: Βιομηχανία με εργοστάσια σε 5 τοποθεσίες σκέφτεται επεκτάσεις στις υπάρχουσες τοποθεσίες. Υπάρχουν 6 εκατομμύρια ευρώ προϋπολογισμός για επεκτάσεις.

Εργοστάσια	1	2	3	4	5	
Κόστος (εκ €)	2	4	3	1	5	K_t
Απόδοση (εκ €)	3	7	5	3	7	A_t

Προσοχή! Εδώ η απόδοση είναι το καθαρό κέρδος, άρα δεν συνυπολογίζω τα κόστη.

Μοντελοποίηση σε ΠΔΠ:

- Βήματα = Εργοστάσια με ορίζοντα $N=5$
- Κατάσταση x_t = υπόλοιπο ποσό του προϋπολογισμού στην αρχή του βήματος t
- Απόφαση: $a_t = \begin{cases} 0, & \text{όχι επένδυση} \\ 1, & \text{επένδυση} \end{cases}$ με $D_t(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } x < K_t \\ \{0,1\}, & \text{αν } x \geq K_t \end{cases}$
- Κέρδος: $c_t(x_t,a_t) = \begin{cases} A_t, & \text{αν } a_t=1 \\ 0, & \text{αν } a_t=0 \end{cases}$
- Δυναμική: $x_{t+1} = \begin{cases} x_t, & a_t=0 \\ x_t-K_t, & a_t=1 \end{cases}$
- $\hat{c}(x_{N+1})=0$ → δεν έχω πληροφορίες για μετά το τέλος του προβλήματος (πχ τι θα κάνω με το πιθανό υπόλοιπο του προϋπολογισμού)

Συνάρτηση βέλτιστης τιμής: $v(t,x)$ = μέγιστο κέρδος από (t,x) μέχρι $t=6$

$v(t,x) = \max\limits_{a\in D_t(x)} \{c_t(x,a) + v(t+1,x_{t+1})\}$, όπου $x_{t+1} = g_t(x,a)$ → εξισώσεις βελτιστότητας

και $v(N+1,x) = \hat{c}(x)$

$v(6,x)=0$

$v(5,6) = \max\{0+v(6,6),\ 7+v(6,1)\} = 7,\ a^*(5,6)=1$

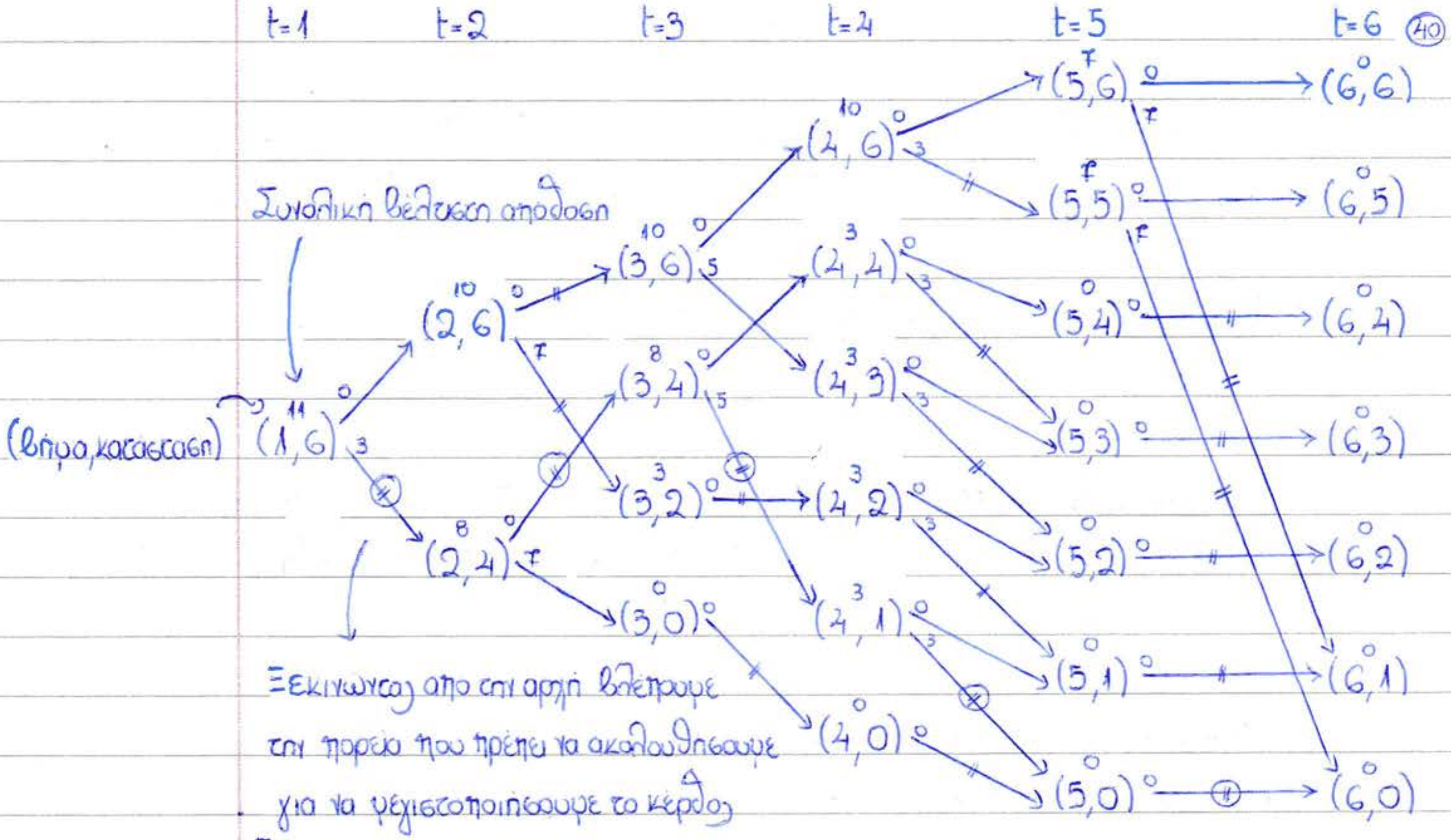
$v(5,5) = \max\{0+v(6,5),\ 7+v(6,0)\} = 7,\ a^*(5,5)=1$

… Μπορούμε να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες τιμές πάνω στο διάγραμμα.

Τελικά βέλτιστη διαδρομή: $(1,6) \xrightarrow{a_1=1} (2,4) \xrightarrow{a_2=0} (3,4) \xrightarrow{a_3=1} (4,1) \xrightarrow{a_4=1} (5,0) \xrightarrow{a_5=0} (6,0)$

Ξόδεψα και τα 6 εκ € ✓

Βλέπε διάγραμμα στην πίσω σελίδα



<u>Συντήρηση μηχανήματος</u>

Μηχάνημα, όπου, αν x είναι η ηλικία του σε έτη, $c(x)$ κόστος συντήρησης για ένα έτος, $p(x)$ αξία μεταπώλησης, T αξία νέου μηχανήματος, N ορίζοντας και n η μέγιστη επιτρεπόμενη ηλικία μηχανήματος, θέλω να ελαχιστοποιήσω το κόστος.

<u>Μοντέλο ΠΔΠ:</u>

- Βήματα = περίοδοι λειτουργίας με ορίζοντα N
- Κατάσταση x_t = ηλικία x του τρέχοντος μηχανήματος στην αρχή της περιόδου t.
- Απόφαση: $a_t = \begin{cases} 1, & \text{ανακατάσταση} \\ 2, & \text{συντήρηση} \end{cases}$ με $D_t(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{αν } x=n \\ \{1,2\}, & \text{αν } x<n \end{cases}$
- Κόστος: $c_t(x) = \begin{cases} T-p(x)+c(0), & a_t=1 \\ c(x), & a_t=2 \end{cases}$
- Δυναμική: $x_{t+1} = \begin{cases} 1, & a_t=1 \\ x_t+1, & a_t=2 \end{cases}$
- $\hat{C}(x_{N+1}) = -p(x_{N+1})$

πχ. $\underset{c(5)}{x_1=5}$ συντ. $\underset{c(6)}{x_2=6}$ συντ. $\underset{T-p(7)+c(0)}{x_3=7}$ αλλαγή $\underset{c(1)}{x_4=1}$ συντ. , ... $\underset{t=N}{}$ x_{N+1} $\hat{C}(x_{N+1}) = -p(x_{N+1})$

Προβλήματα Διαχείρισης Αποθεμάτων

Παραγωγή ενός προϊόντος.

Προγραμματισμός για τις επόμενες N περιόδους ($t=1,2,\dots,N$)

d_t = ζήτηση του προϊόντος (παραγγελίες)

$k_t(a)$ = κόστος παραγωγής a μονάδων (συνάρτηση του a - αύξουσα)

h_t = κόστος αποθήκευσης ανά μονάδα προϊόντος για την περίοδο t

m = δυναμικότητα της παραγωγής (μέγιστη ποσότητα που μπορεί να παραχθεί σε μία περίοδο)

M = χωρητικότητα αποθήκης

Η παραγωγή γίνεται σε ακέραιες (διακριτές) ποσότητες

πχ. t	d_t	παραγωγή	απόθεμα
1	30	~~30~~ 50	20
2	80	~~80~~ 60 δεκτό (60+20=80)	
3	30	απορρίπτεται	
4	50		

$m=60 \to$ αναγκάζομαι να χρησιμοποιήσω απόθεμα

$m=40 \to$ δεν μπορώ να καλύψω τη ζήτηση ($190 > 160 = 4\cdot 40$)

Το κόστος αποθήκευσης εξαρτάται από το πότε γίνονται η παραγωγή και η πώληση: υποθέτουμε ακαριαία στην αρχή της περιόδου.

Μοντελοποίηση σε Π.Δ.Π.:

1) Βήματα = περίοδοι $t=1,2,\dots,N$

2) Κατάσταση x_t = ποσότητα αποθέματος στην αρχή της περιόδου t.

3) Απόφαση a_t = ποσότητα παραγωγής με $D_t(x_t)$: $0 \le a_t \le m$, $0 \le x_t+a_t-d_t \le M$

Άρα $\max(0, d_t-x_t) \le a_t \le \min(m, M+d_t-x_t)$ ικανοποίηση ζήτησης, χωρητικότητα αποθήκης

4) Κόστος ενός βήματος $c_t(x_t,a_t) = \underbrace{k_t(a_t)}_{\text{παραγωγή}} + \underbrace{(x_t+a_t-d_t)\, h_t}_{\text{αποθήκευση}}$

5) Δυναμική $x_{t+1} = x_t+a_t-d_t$

6) Τερματικό κόστος $\hat{c}(x_{N+1}) \to$ καθορίζεται από το πρόβλημα (μπορεί να είναι 0)

Προβλήματα κατανομής πόρων ή φόρτωσης φορτίων

Ποσότητα αγαθού B (μετριέται σε ακέραιες μονάδες)

N δραστηριότητες, $t=1,2,\dots,N$

a_t = ο βαθμός ενεργοποίησης της δραστηριότητας t (ακέραιες μονάδες)

$g_t(a_t)$ = ποσότητα πόρου που απαιτείται για a_t μονάδες του t (συνάρτηση του a_t)

$R_t(a_t)$ = ωφέλεια που έχω (χρηματική ή όχι) από a_t μονάδες της δραστηριότητας t.

Στον γραμμικό προγραμματισμό θα λέγαμε: $\max \sum_{t=1}^{N} R_t(a_t)$, υπό τους περιορισμούς $\sum_{t=1}^{N} g_t(a_t) \le B$, $a_t \ge 0$ ακέραιοι π.χ. N μαθήματα, B ώρες διαβάσματος.

$$a_t = \begin{cases} 0, & \text{δε διαβάζω καθόλου} \\ 1, & \text{διαβάζω για να περάσω} \\ 2, & \text{διαβάζω για να πάρω βαθμό} \end{cases} \quad \begin{array}{l} g_1(0)=0 \\ g_1(1)=10 \ \ldots \\ g_1(2)=30 \end{array}$$

<u>Μοντελοποίηση σε Π.Δ.Π.:</u>

1) Βήματα = δραστηριότητες $t=1,2,\ldots,N$

2) Κατάσταση x_t = ποσότητα πόρου διαθέσιμη για τις δραστηριότητες $t, t+1, \ldots, N$

3) Απόφαση a_t = βαθμός ενεργοποίησης της δραστηριότητας t με $g_t(a_t) \le x_t$.

4) Κέρδος ενός βήματος: $R_t(a_t)$

5) Δυναμική $x_{t+1} = x_t - g_t(a_t)$

6) Τερματικό κέρδος $\hat{C}(x_{n+1})$, x_{n+1} = αχρησιμοποίητη ποσότητα αγαθού → εξαρτάται από το πρόβλημα

$\hookrightarrow x_{n+1} = B - \sum_{t=1}^{N} g_t(a_t)$