Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα: 1º Μάθημα - 14/04/2014 (κ. Φακίνος) ①

Το αντικείμενο της Επιχειρησιακής Έρευνας (Operational Research) είναι η ανάπτυξη, μελέτη και εφαρμογή μαθηματικών μοντέλων σχετικά με τον βέλτιστο σχεδιασμό και έλεγχο οργανωμένων συστημάτων.

Ένας βασικός κλάδος της Ε.Ε. είναι ο μαθηματικός προγραμματισμός. Η μαθηματική διατύπωση του γενικού προβλήματος μαθηματικού προγραμματισμού είναι η εξής:

Δίνεται μια πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x)$ και ένα σύνολο $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Να βρεθεί, αν υπάρχει $x^* \in F$: $f(x^*) = \max\{f(x): x \in F\}$ ή $f(x^*) = \min\{f(x): x \in F\}$

Λόγω της ταυτότητας $\min f(x) = -\max(-f(x))$ (1), κάθε πρόβλημα ελαχιστοποίησης μετατρέπεται σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μεγιστοποίησης, και επομένως θεωρούμε ότι το γενικό πρόβλημα μαθηματικού προγραμματισμού (π.μ.π) είναι η εύρεση κάποιου $x^* \in F$: $f(x^*) = \max\limits_{x \in F} f(x)$ (2)

Η συνάρτηση $f(x)$ λέγεται αντικειμενική συνάρτηση.

Το σύνολο F λέγεται εφικτή περιοχή.

Τα σημεία του F λέγονται εφικτές λύσεις του προβλήματος.

Κάθε x^* που ικανοποιεί τη (2) λέγεται άριστη ή βέλτιστη λύση του π.μ.π.

Ανάλογα με τη μορφή της συνάρτησης f και του συνόλου F προκύπτουν τα διάφορα είδη του μαθηματικού προγραμματισμού. Σε ό,τι ακολουθεί θα ασχοληθούμε με τον γραμμικό προγραμματισμό. Συγκεκριμένα αν $f(x)$ γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών $x_1, x_2, \ldots, x_n$ και F εκφράζεται από γραμμικούς περιορισμούς (εξισώσεις ή ανισώσεις), τότε έχουμε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (π.γ.π). Έτσι η μαθηματική διατύπωση του γενικού π.γ.π είναι η εξής: Να βρεθεί το $z = \max(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$, όταν

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le, =, \ge b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le, =, \ge b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le, =, \ge b_m
\end{aligned}\right\}$$

Συνήθως υποθέτουμε επιπλέον και τη συνθήκη μη-αρνητικότητας των μεταβλητών: $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$

Αν όλοι οι περιορισμοί είναι εξισώσεις ή ανισώσεις της ίδιας φοράς, το σύστημα γράφεται πιο συνοπτικά με μορφή πινάκων ως εξής: $z = \max(c^t x)$, $A \cdot x \le, =, \ge b$, $x \ge 0$, όπου $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^t$, A ο πίνακας συντελεστών του συστήματος, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και b η στήλη των σταθερών όρων, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^t$

Ένα πλήθος πρακτικών προβλημάτων μπορεί να γραφεί σαν π.γ.π.

Παράδειγμα: (πρόβλημα μεγιστοποίηση κέρδους)

Μια φαρμακευτική εταιρία παρασκευάζει 3 ειδών φάρμακα Φ_1, Φ_2, Φ_3. Για το καθένα χρησιμοποιούνται 3 διαφορετικά υλικά Y_1, Y_2, Y_3 στις παρακάτω αναλογίες

	Y_1	Y_2	Y_3
Φ_1	0.2	0.4	0.4
Φ_2	0.1	0.5	0.4
Φ_3	0.3	0.2	0.5

Οι διαθέσιμες ποσότητες των υλικών σε κιλά είναι 8, 12, 11 αντίστοιχα, ενώ το κέρδος ανά κιλό για τα φάρμακα είναι 15, 20, 30 χρηματικές μονάδες αντίστοιχα. Να βρεθεί βέλτιστος προγραμματισμός παραγωγής.

Έστω x_j η παραγόμενη ποσότητα των φαρμάκων Φ_j, $j=1,2,3$. Τότε το συνολικό κέρδος είναι $15x_1+20x_2+30x_3$, ενώ οι χρησιμοποιούμενες ποσότητες από τα υλικά είναι:

$$\left.\begin{array}{l} 0.2x_1+0.1x_2+0.3x_3 \\ 0.4x_1+0.5x_2+0.2x_3 \\ 0.4x_1+0.4x_2+0.5x_3 \end{array}\right\}$$

και αυτές δεν μπορούν να υπερβαίνουν τα 8, 12 και 11 κιλά αντίστοιχα. Έτσι η μαθηματική διατύπωση είναι $z=\max(15x_1+20x_2+30x_3)$, όταν:

$$\left.\begin{array}{l} 0.2x_1+0.1x_2+0.3x_3 \leq 8 \\ 0.4x_1+0.5x_2+0.2x_3 \leq 12 \\ 0.4x_1+0.4x_2+0.5x_3 \leq 11 \end{array}\right\}$$

, όπου $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ (ποσότητες φαρμάκων) $\Rightarrow$ Έχουμε π.γ.π.

Γραφική Επίλυση

Στην περίπτωση που υπάρχουν μόνο 2 μεταβλητές x_1, x_2, τότε το π.γ.π μπορεί να επιλυθεί γραφικά.

Παράδειγμα 1: Ένα ζαχαροπλαστείο παράγει 2 είδη γλυκών Α, Β, που τα πουλάει σε πακέτα. Χρειάζεται ζάχαρη, αλεύρι και γάλα σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα

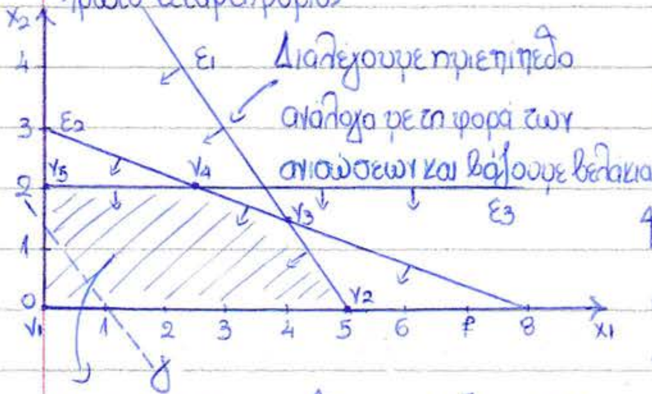
	Απαιτούμενα Υλικά (kg/πακέτο)		Διαθέσιμα
Υλικό	Α	Β	Υλικό (kg)
Ζάχαρη	2	1	10
Αλεύρι	3	8	24
Γάλα	0	1	2
Κέρδος (€/πακέτο)	14	10	

Να βρεθεί βέλτιστος προγραμματισμός παραγωγής. Δηλαδή να βρεθούν οι ποσότητες κάθε γλυκού που πρέπει να παράγονται έτσι ώστε να έχουμε μέγιστο κέρδος.

Έστω ότι παράγονται x_1 πακέτα από το Α και x_2 πακέτα από το Β. Τότε η μαθηματική διατύπωση είναι: $z=\max(14x_1+10x_2)$ και για τις ποσότητες των υλικών που χρησιμοποιούνται ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 8x_2 \le 24 \\ x_2 \le 2 \end{array}\right\} \text{ και } x_1, x_2 \ge 0$$

Γραφική Επίλυση: Στο επίπεδο (x_1, x_2) κάθε ανίσωση ορίζει ένα ημιεπίπεδο. Η τομή όλων των ημιεπιπέδων είναι η εφικτή περιοχή F (επειδή $x_1, x_2 \ge 0$ περιοριζόμαστε στο πρώτο τεταρτημόριο)



(ε_1): $2x_1 + x_2 = 10$

(ε_2): $3x_1 + 8x_2 = 24$

(ε_3): $x_2 = 2$

Για να βρούμε τη βέλτιστη λύση, θέτουμε την αντικειμενική συνάρτηση $14x_1 + 10x_2 = c$, (γ) όπου έστω $c = 14$. Παρατηρούμε ότι για εφικτή περιοχή F αυξανόμενες τιμές του c, οι αντίστοιχες ευθείες είναι παράλληλες και συνεχώς απομακρυνόμενες από την αρχή των αξόνων. Αφού έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης θέτουμε το c να γίνει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Έτσι μετακινούμε τη (γ) παράλληλα σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, προσέχοντας συγχρόνως να έχει 1 τουλάχιστον κοινό σημείο με το F, που εδώ είναι η κορυφή v_3 με συντεταγμένες που βρίσκονται λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (ε_1) και (ε_2). Με πράξεις η βέλτιστη λύση είναι $x^* = (56/13, 18/13)$ με μέγιστο κέρδος

$z = 14 \cdot \frac{56}{13} + 10 \cdot \frac{18}{3} = 76.15$. Άρα πρέπει να παράγονται $56/13 = 4.31$ πακέτα από το A και $18/3 = 1.38$ από το B. Παρατηρούμε ότι τα υλικά που χρησιμοποιήθηκαν πλήρως είναι ζάχαρη και αλεύρι (σημείο τομής ε_1 και ε_2).

Αν ζητούνταν μόνο ακέραιες ποσότητες γλυκών θα παίρναμε στην F μόνο τα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες και θα ακολουθούσαμε την ίδια διαδικασία → Αποτέλεσμα $(5,0)^+$

Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα: 2ο Μάθημα - 16/04/2014 (κ. Φακίνος)

Παράδειγμα: Στο πανεπιστημιακό εστιατόριο πρέπει να υπάρχουν 3 μονάδες βιταμίνης A και 4 μονάδες βιταμίνης B ανά προσφερόμενη μερίδα. Υπάρχουν 2 τροφές T_1, T_2 που περιέχουν τα A, B σύμφωνα με τον πίνακα:

	A	B → Μονάδες βιταμίνης/gr
T_1	0.03	0.01
T_2	0.01	0.02

Αν η T_1 κοστίζει 0.04€/gr και η T_2 0.05€/gr να βρεθεί βέλτιστος

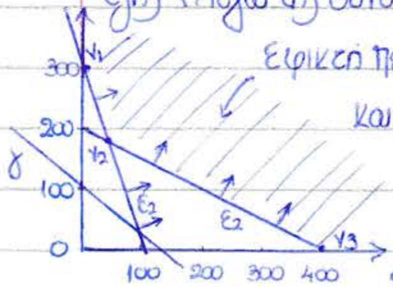
Προγραμματισμός διατροφής -> Πρόβλημα ελαχιστοποίησης κόστους

Δηλαδή πόση ποσότητα των τροφών T_1, T_2 πρέπει να περιέχει κάθε μερίδα, ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος της.

Μαθηματική διατύπωση: Έστω x_1, x_2 οι ποσότητες σε gr των τροφών T_1, T_2 αντίστοιχα που πρέπει να περιέχει κάθε μερίδα φαγητού. Έχουμε το π.γ.π: $z=\min(0.04x_1+0.05x_2)$, όταν

$$\left.\begin{array}{l}0.03x_1+0.01x_2 \geq 3\\ 0.01x_1+0.02x_2 \geq 4\end{array}\right\} \text{ και } x_1, x_2 \geq 0$$

Γραφική επίλυση: Αφού υπάρχουν 2 μόνο μεταβλητές, το π.γ.π. μπορεί να λυθεί γραφικά ως εξής (λόγω της συνθήκης μη-αρνητικότητας περιοριζόμαστε στο πρώτο τεταρτημόριο)



Εφικτή περιοχή F: ορίζεται από τις κορυφές $v_1(0,300)$, $v_2(40,180)$, $v_3(400,0)$ και τους θετικούς ημιάξονες. Παρατηρούμε ότι είναι μη-φραγμένη. Προκειμένου να βρούμε την άριστη λύση θέτουμε την αντικειμενική συνάρτηση: $0.04x_1+0.05x_2=c$, π.χ. $c=5$ (γ)

Παρατηρούμε ότι για αυξανόμενες τιμές του c οι αντίστοιχες ευθείες είναι παράλληλες και συνεχώς απομακρυνόμενες από την αρχή των αξόνων.

Αφού έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης, μετακινούμε τη (γ) σε όσο το δυνατόν μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, προσέχοντας συγχρόνως να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με το F, το οποίο είναι η κορυφή $v_2(40,180)$, το οποίο βρέθηκε λύνοντας το σύστημα των αντίστοιχων 2 εξισώσεων ευθειών. Άρα η άριστη λύση είναι το διάνυσμα $x^*=(40,180)^t$ με ελάχιστο κόστος $z=0.04\cdot 40+0.05\cdot 180=10.6$. Δηλαδή το ελάχιστο συνολικό κόστος ανά μερίδα είναι 10.6€ και αυτό επιτυγχάνεται, όταν κάθε μερίδα περιέχει 40gr της τροφής T_1 και 180gr της τροφής T_2.

Παρατηρήσεις: Όσον αφορά τις 2 διαστάσεις (αλλά και γενικά, όπως θα αποδειχθεί αργότερα) ισχύουν τα παρακάτω:

1. Η F είναι κυρτό σύνολο (η ευθεία που ενώνει 2 κορυφές ανήκει στο σχήμα)
2. Αν η F είναι μη-κενό και φραγμένο σύνολο, όπως στο Παράδειγμα 1, η άριστη λύση επιτυγχάνεται σε μια κορυφή της F. Αν όμως αυτή επιτυγχάνεται σε 2 κορυφές, τότε και κάθε κυρτός συνδυασμός (σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν) είναι άριστη λύση. Έτσι το π.γ.π. έχει άπειρες λύσεις.
3. Επίσης ένα π.γ.π δεν έχει άριστη λύση, αν $F=\emptyset$. Τέλος αν το F είναι μη-κενό και μη-φραγμένο σύνολο, τότε το π.γ.π μπορεί να έχει άριστη λύση ή όχι (π.χ. πρόβλημα μεγιστοποίησης)

Προκειμένου τα παραπάνω να γενικευθούν στην περίπτωση των n μεταβλητών, θα πρέπει αρχικά το π.γ.π. να έχει πιο συγκεκριμένη μορφή, η οποία δίνεται από τον παρακάτω ορισμό:

<u>Ορισμός</u>: Ένα π.γ.π. είναι σε <u>κανονική μορφή</u> (ΚΜ) ή τυπική μορφή, αν και μόνο αν έχει τη μορφή

$z = \pm \max(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n)$

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}\right\}$$ με $b_1, \dots, b_m \geq 0$ και $x_1, \dots, x_n \geq 0$. Ισοδύναμα με μορφή πινάκων

$z = \pm\max(c^t x)$, $Ax = b$, $x \geq 0$, όπου $c, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $b \geq 0$ και $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$

Κάθε π.γ.π. μπορεί να τεθεί σε κανονική μορφή με τη χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών. Συγκεκριμένα, οι ανισώσεις τρέπονται σε εξισώσεις με την εισαγωγή νέων μη-αρνητικών μεταβλητών, οι οποίες ονομάζονται <u>περιθώριες μεταβλητές</u>. Επίσης, αν π.χ. $x_i \leq 0$ θέτω $x_i = -x_i'$, $x_i' \geq 0$, ενώ, αν $x_i \in \mathbb{R}$, θέτω $x_i = x_i' - x_i''$, $x_i', x_i'' \geq 0$

<u>Παράδειγμα</u>: Να τεθεί σε Κ.Μ. το π.γ.π. $\min(x_1 + 2x_2 + x_3)$,

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ &x_1 - x_2 - x_3 = 30 \\ &x_1 - 3x_2 - 2x_3 \geq -50 \\ &x_2 + x_3 \geq 25 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}\right\}$$

Πολλαπλασιάζω τον 3^o περιορισμό επί -1, για να γίνει ο σταθερός όρος θετικός. Επίσης θέτω $x_3 = x_3' - x_3''$, $x_3', x_3'' \geq 0$, για να έχω τη συνθήκη μη-αρνητικότητας των μεταβλητών. Κατόπιν εισάγω περιθώριες μεταβλητές $x_4, x_5, x_6 \geq 0$, για να τραπούν οι ανισώσεις σε εξισώσεις. Τέλος μετατρέπω το min σε -max της αντίθετης συνάρτησης. Έτσι καταλήγουμε στην Κ.Μ. που είναι: $-\max(-x_1 - 2x_2 - x_3' + x_3'')$,

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_4 = 40 \\ &x_1 - x_2 + x_3' - x_3'' = 30 \\ &-x_1 + 3x_2 + 2x_3' - 2x_3'' + x_5 = 50 \\ &x_2 + x_3' - x_3'' - x_6 = 25 \\ &x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}\right\}$$

<u>Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα: 3ο Μάθημα - 28/04/2014 (κ. Φακίνος)</u>

Έστω π.γ.π. σε Κ.Μ: $z = (\pm)\max(c^t x)$, $Ax = b \geq 0$, $x \geq 0$, όπου $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (π)

Αναλυτικά $z = \pm\max(c_1x_1 + \dots + c_nx_n)$

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \geq 0 \\ &\vdots \\ &a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \geq 0 \end{aligned}\right\}$$ και $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

Σε ό,τι ακολουθεί υποθέτουμε ότι $r(A) = m < n$, όπου $r(A)$ ο βαθμός (τάξη) του A, δηλαδή ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών του A.

Θεώρημα 1: Αν $F \neq \phi$, συμπαγές (π.χ. κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και η $f: F \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τότε $\exists x^* \in F: f(x^*) \geq f(x), \forall x \in F$, δηλαδή η F πετυχαίνει τη μέγιστη, και επομένως και την ελάχιστη τιμή της, σε κάποιο σημείο του F.

Σαν πόρισμα του Θεωρήματος 1 της μαθηματικής ανάλυσης έχουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 2: Αν η εφικτή περιοχή F του (π) είναι μη-κενή και φραγμένη, τότε το (π) έχει άριστη λύση (1ο Θεώρημα του γραμμικού προγραμματισμού).

Απόδειξη: Η αντικειμενική συνάρτηση ως γραμμική είναι συνεχής ($f(x) = c^t \cdot x$). Επομένως με βάση του Θεώρημα 1, αρκεί να δείξω ότι η F είναι κλειστό σύνολο, δηλαδή περιέχει τα οριακά του σημεία. Πράγματι, έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία σημείων του F με $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Αφού $x_n \in F$, $\forall n \in \mathbb{N}$ είναι:

i) $A \cdot x_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(A x_n) = b \Rightarrow A \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow A \cdot x = b$

ii) $x_n \geq 0 \Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} x_n \geq 0$

Από i) και ii) έχουμε ότι $x \in F$, δηλαδή το F είναι κλειστό. Άρα από το Θεώρημα 1, το (π) έχει άριστη λύση x^*.

Ορισμοί:

1) Κυρτός συνδυασμός των $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ είναι κάθε σημείο x της μορφής $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ με $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ και $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

2) Ένα $\phi \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται κυρτό, αν και μόνο αν $\forall x_1, x_2 \in K$ και λ, $0 < \lambda < 1$, ισχύει: $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in K$, δηλαδή κάθε κυρτός συνδυασμός 2 σημείων του K είναι επίσης σημείο του K.

3) Ακρότατο σημείο ενός κυρτού συνόλου K είναι κάθε σημείο $x \in K$, ώστε να μην υπάρχουν $x_1, x_2 \in K$ και $\lambda \in (0,1)$ με $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, δηλαδή δεν μπορεί να γραφεί σαν κυρτός συνδυασμός 2 σημείων του K.

Όταν τα ακρότατα σημεία είναι πεπερασμένα στο πλήθος, το κυρτό σύνολο K λέγεται κυρτό πολύγωνο ή κυρτό πολύεδρο, ενώ τα παραπάνω σημεία αναφέρονται ως κορυφές αυτού. Τότε αποδεικνύεται ότι οι κορυφές ορίζουν το K με την έννοια ότι κάθε σημείο του μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός των κορυφών.

Θεώρημα 1: i) Η εφικτή περιοχή F είναι κυρτό σύνολο

ii) Αν η F φραγμένη, τότε F κυρτό πολύεδρο

Απόδειξη: i) Έστω $x_1, x_2 \in F$ και $\lambda \in (0,1)$: $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$. Αρκεί να δείξω ότι $x \in F$.

$Ax = A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] = \lambda A x_1 + (1-\lambda)A x_2 = \lambda b + (1-\lambda)b = b$ και $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq 0 \Rightarrow x \in F$.

ii) Η απόδειξη είναι πέρα από τους σκοπούς του παρόντος

Θεώρημα 2: i) Αν η F είναι φραγμένη, τότε άριστη λύση πετυχαίνεται σε μια κορυφή της F

ii) Αν 2 ή περισσότερες κορυφές είναι άριστες λύσεις, τότε και κάθε κυρτός συνδυασμός αυτών είναι άριστη λύση επίσης

Απόδειξη: i) Αφού F φραγμένη, τότε το (π) έχει άριστη λύση, έστω x^*, και επίσης η F είναι κυρτό πολύεδρο από το θεώρημα 1. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι κορυφές της F. Τότε το x^* γράφεται ως κυρτός συνδυασμός αυτών, δηλαδή $x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ για κάποια $\lambda_i \geq 0$ με $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Άρα $f(x^*) = c^t x^* = c^t \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^t x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_p) = f(x_p) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = f(x_p) \cdot 1 = f(x_p)$, όπου $f(x_p) = \max_{1 \leq i \leq k} f(x_i)$. Αλλά, αφού x^* άριστη λύση ισχύει και η ανίσωση $f(x^*) \geq f(x_p)$. Άρα $f(x^*) = f(x_p)$, δηλαδή ∃ κορυφή που δίνει μέγιστη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση (δεν συνεπάγεται $x^* = x_p$)

ii) Έστω ότι υπάρχουν τ κορυφές $x_1, \dots, x_\tau$ με $z = f(x_1) = \dots = f(x_\tau) = \max f(x)$. Τότε ∀ κυρτό συνδυασμό $x = \sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i x_i$ με $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i = 1$, έχω: $f(x) = c^t x = c^t \sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i c^t x_i = \sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i f(x_i) = \sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i z = z \sum_{i=1}^{\tau} \lambda_i = z \cdot 1 = z$. Άρα η x είναι επίσης άριστη λύση.

Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα: 4ο Μάθημα - 30/04/2014 (κ. Φακίνος)

Μια ενδιαφέρουσα ισοδύναμη μορφή του π.γ.π. σε κανονική μορφή είναι:

$\max(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n)$, όταν $P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n = b$, $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$, όπου P_j η j-στήλη του πίνακα A, $j = 1, 2, \dots, n$ ($P_j \in \mathbb{R}^{m \times 1}$) $\Rightarrow A = (P_1 P_2 \dots P_n)$

Ορισμοί: i) Λύση του π.γ.π. είναι κάθε $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ με $A \cdot x = b$.

ii) Εφικτή λύση είναι κάθε λύση x με $x \geq 0$

iii) Βασική λύση είναι κάθε λύση x που οι μη-μηδενικές συντεταγμένες της αντιστοιχούν σε γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του A. Αφού $r(A) = m$, αυτή έχει το πολύ m μη-μηδενικές συντεταγμένες

iv) Βασική εφικτή λύση είναι κάθε λύση x που είναι συγχρόνως βασική και εφικτή. Αυτή έχει το πολύ m θετικές συντεταγμένες. Αν έχει ακριβώς m λέγεται μη-εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση, ενώ διαφορετικά λέγεται εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση.

Για να βρούμε μια βασική λύση επιλέγουμε m γραμμικά ανεξάρτητες στήλες από τις $P_1, P_2, \dots, P_n$, έστω π.χ. τις $P_1, P_2, \dots, P_m$ και λύνω το αντίστοιχο σύστημα $P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_mx_m = b$. Έστω $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ η μοναδική λύση. Η ζητούμενη βασική λύση είναι η $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, 0, \dots, 0)^t$

Αν τα $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ είναι μη-αρνητικοί αριθμοί, τότε έχουμε μια βασική εφικτή λύση.

Θεώρημα: Η x είναι βασική εφικτή λύση, αν και μόνο αν είναι κορυφή της εφικτής περιοχής F.

Απόδειξη: σελ 30-32 του βιβλίου

Παράδειγμα: Να λυθεί το π.γ.π. $\max(3x_1+5x_2-2x_3+x_4)$, όταν:

$$\left.\begin{array}{l} x_1-x_2+x_3+x_4=5 \\ 2x_1+x_2+2x_3=1 \\ x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$ Είναι σε κανονική μορφή. Αυτό γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x_4=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$$

Λύση. Εξετάζουμε πρώτα αν η εφικτή περιοχή F είναι φραγμένο σύνολο, που είναι ικανή συνθήκη για άριστη λύση. Γράφουμε:

$0\leq x_1\leq \frac{1}{2}$, $0\leq x_2\leq 1$, $0\leq x_3\leq \frac{1}{2}$, $0\leq x_4\leq 6$ (μηδενίζοντας μεταβλητές στις εξισώσεις)

Άρα F φραγμένη, οπότε το π.γ.π. έχει άριστη λύση και αυτή αντιστοιχεί σε κάποια κορυφή της F ή ισοδύναμα σε κάποια βασική εφικτή λύση. Για να βρούμε τις β.ε.λ. (και αφού $r(A)=2$) επιλέγουμε κάθε φορά 2 γραμμικά ανεξάρτητες στήλες από τις $P_1,\ldots,P_4$ και λύνουμε το αντίστοιχο σύστημα απορρίπτοντας τις λύσεις με αρνητικά στοιχεία:

i) Οι P_1,P_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}x_2=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_1-x_2=5\\2x_1+x_2=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_1=x_2+5\\2x_2+10+x_2=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=-3\end{array}\right\} \rightarrow \text{απορρίπτεται}$$

ii) Οι P_1,P_3 είναι γραμμικά εξαρτημένες

iii) Οι P_1,P_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητες:

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x_4=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_1+x_4=5\\2x_1=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_4=\frac{9}{2}\\x_1=\frac{1}{2}\end{array}\right\} \rightarrow \underline{\text{δεκτή}}$$

iv) Οι P_2,P_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητες:

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_3=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_2=-3\\x_3=2\end{array}\right\} \rightarrow \text{απορρίπτεται, ομοίως}$$

v) Οι P_2,P_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητες:

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x_4=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-x_2+x_4=5\\x_2=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x_4=6\\x_2=1\end{array}\right\} \rightarrow \underline{\underline{\text{δεκτή}}}$$

vi) Οι P_3,P_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητες:

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x_4=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}x_3=\frac{1}{2}\\ x_4=\frac{9}{2}\end{matrix}\right\} \rightarrow$ δεκτή, ομοίως

Άρα το π.γ.π. έχει 3 β.ε.λ. ή ισοδύναμα 3 κορυφές και συγκεκριμένα οι $x_1=\left(\frac{1}{2},0,0,\frac{9}{2}\right)^t$, $x_2=(0,1,0,6)^t$, $x_3=\left(0,0,\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)^t$. Οι αντίστοιχες τιμές της α.σ. είναι: $f(x_1)=6$, $f(x_2)=11$, $f(x_3)=7/2$. Καθώς η x_2 δίνει τη μεγαλύτερη τιμή στην α.σ., αυτή είναι και η (μοναδική) άριστη λύση.

Παρένθεση: Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να λύσουμε οποιοδήποτε π.γ.π, αλλά δεν είναι ο καλύτερος (π.χ. αν έχω πολλούς περιορισμούς). Οπότε οδηγούμαστε στην επόμενη μέθοδο.

Η Μέθοδος Simplex

Η μέθοδος Simplex είναι η απλούστερη και ευκολότερη μέθοδος για την επίλυση ενός π.γ.π. Σύμφωνα με αυτήν, ξεκινώντας από μια κορυφή x_1, πηγαίνουμε σε μια καλύτερη κορυφή x_2, μέχρι να καταλήξουμε στην άριστη κορυφή. Σε αντίθεση με την προηγούμενη μέθοδο, είναι πολύ συντομότερη.

Για την εφαρμογή της μεθόδου Simplex πρέπει:

1. Το π.γ.π. να είναι σε Κ.Μ.
2. Να είναι γνωστή μια (αρχική) μη-εκφυλισμένη β.ε.λ. x_0. Μια τέτοια x_0 έχει ακριβώς m θετικές συντεταγμένες και χωρίς βλάβη της γενικότητας (χ.β.γ) ότι αυτές είναι οι πρώτες m, δηλαδή $x_0=(x_{10},x_{20},\dots,x_{m0},\underbrace{0,\dots,0}_{n-m \text{ μηδενικά}})$ με $x_{i0}>0$, $i=1,2,\dots,m$

Μέθοδος Simplex (Συνέχεια)

Αφού η x_0 είναι λύση ισχύει $\sum_{i=1}^{m} P_i x_{i0} = b$ (1) και έστω $\sum_{i=1}^{m} x_{i0} c_i = z_0$ (2) η τιμή της α.σ. στη x_0. Αφού η x_0 είναι βασική λύση, οι στήλες $P_1, P_2, \dots, P_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και ακριβώς m, δηλαδή αποτελούν βάση του δ.χ. $\mathbb{R}^{m\times 1}$ των αντίστοιχων στηλών. Άρα κάθε στήλη του A γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών, δηλαδή υπάρχουν $x_{ij} \in \mathbb{R}$: $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i = P_j$, $j=1,2,\dots,n$, (3), όπου για $j=1,2,\dots,m$ είναι $x_{ij}=1$, αν $i=j$, η $x_{ij}=0$, αν $i \neq j$.
Έστω $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i = z_j$, $j=1,2,\dots,n$, (4) η τιμή της α.σ. στο $Y_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})^t$

Θεώρημα 1. Αν $z_j - c_j \geq 0$ $\forall j=1,2,\dots,n$, τότε η x_0 είναι άριστη λύση.

Απόδειξη: Έστω $y_0 = (y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})^t$ τυχούσα εφικτή λύση. Αρκεί να δείξω ότι $z_0 = c^t x_0$, όπου $z_0 \geq c^t y_0 \equiv z_0^*$. Αφού η y_0 είναι λύση ισχύει ότι $\sum_{j=1}^{m} y_{j0} P_j = b$ (5).
Από (5) και (3), $\sum_{j=1}^{m} y_{j0} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} P_i = b \iff \sum_{i=1}^{m} P_i \sum_{j=1}^{m} y_{j0} x_{ij} = b$ (6). Από (6) και (1) και λόγω της ανεξαρτησίας των $P_1, P_2, \dots, P_m$ προκύπτει ότι $x_{i0} = \sum_{j=1}^{m} y_{j0} x_{ij}$ $(i=1,2,\dots,m)$ (7)
Άρα $z_0 = c^t x_0 = \sum_{i=1}^{m} x_{i0} c_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} y_{j0} x_{ij}\right) c_i = \sum_{j=1}^{m} y_{j0} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} c_i = \sum_{j=1}^{m} y_{j0} z_j \geq \sum_{j=1}^{m} y_{j0} c_j = c^t y_0 = z_0^*$

Θεώρημα 2. Αν $z_j - c_j < 0$ για ένα τουλάχιστον j, τότε η x_0 δεν είναι άριστη λύση.

Απόδειξη. Αρκεί να βρω μια εφικτή λύση πιο καλύτερη από τη x_0. Για ένα j με $z_j - c_j < 0$ σχηματίζω τις:

$$\left.\begin{aligned} &①-\theta③: \sum_{i=1}^{m} (x_{i0} - \theta x_{ij}) P_i = b - \theta P_j \\ &②-\theta④: \sum_{i=1}^{m} (x_{i0} - \theta x_{ij}) c_i = z_0 - \theta z_j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} (x_{i0} - \theta x_{ij}) P_i + \theta P_j = b \quad (8) \\ &\sum_{i=1}^{m} (x_{i0} - \theta x_{ij}) c_i + \theta c_j = z_0 - \theta (z_j - c_j). \quad (9) \end{aligned}$$

Έστω το διάνυσμα: $x(\theta) = (x_{10} - \theta x_{1j}, \dots, x_{m0} - \theta x_{mj}, 0, \dots, 0, \theta, 0, \dots, 0)^t$ (10)
Τώρα οι παραπάνω σχέσεις γράφονται συνοπτικά $Ax(\theta) = b$ (11) και
$c^t x(\theta) = z_0 + \theta |z_j - c_j|$ (12). Από την (11) προκύπτει ότι η $x(\theta)$ είναι λύση του π.γ.π., ενώ η (12) μας δίνει την τιμή της α.σ. στη λύση αυτή. Για να είναι η $x(\theta)$ εφικτή λύση θα πρέπει $\theta \geq 0$ και $x_{i0} - \theta x_{ij} \geq 0$ $(i=1,2,\dots,m)$, (13). Διακρίνω 2 περιπτώσεις:

i) $x_{ij} \leq 0$ $\forall i=1,2,\dots,m$. Τότε η (13) ικανοποιείται $\forall \theta > 0$, άρα $\forall \theta > 0$ η $x(\theta)$ είναι εφικτή λύση και καλύτερη από τη x_0, λόγω της (12). Μάλιστα σ' αυτή την περίπτωση έχουμε $\max c^t x = \lim_{\theta\to\infty} c^t x(\theta) = z_0 + |z_j - c_j| \lim_{\theta\to\infty} \theta = \infty$, άρα το π.γ.π. δεν είναι φραγμένο

ii) $x_{ij} > 0$ για ένα τουλάχιστον $i=1,2,\dots,m$. Τότε η απαίτηση (13) ικανοποιείται $\forall \theta \in [0, \theta_0]$, όπου $\theta_0 = \min_i \left\{ \frac{x_{i0}}{x_{ij}} : x_{ij} > 0 \right\} > 0$. Επομένως για τέτοιο θ, η $x(\theta)$ είναι εφικτή λύση και καλύτερη από τη x_0, λόγω της (12)

Άρα σε κάθε περίπτωση η x_0 δεν είναι άριστη.

Παρατήρηση: Στην περίπτωση (2), το καλύτερο που μπορούμε να πετύχουμε είναι, όταν $\theta = \theta_0$. Αλλά τότε μεταβαίνουμε σε μια νέα κορυφή $x_1 = x(\theta_0)$ η οποία είναι καλύτερη από τη x_0.

Οι θεμελιώδεις σχέσεις (1)-(4) μπορούν να γραφούν πιο συνοπτικά εισάγοντας τον συμβολισμό $B = (P_1 P_2 \dots P_m)$, $x_B = (x_1, x_2, \dots, x_m)^t$, $x_B^0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})^t$, $c_B = (c_1, c_2, \dots, c_m)^t$. Τώρα οι (1)-(4) γράφονται:

$$\left.\begin{array}{l} B x_B^0 = b \ (1) \\ c_B^t x_B^0 = z_0 \ (2) \\ B\, Y_j = P_j \ (3) \\ c_B^t Y_j = z_j \ (4) \end{array}\right\} \text{από τις οποίες παίρνουμε τις σχέσεις:} \quad \left.\begin{array}{l} x_B^0 = B^{-1} b \\ z_0 = c_B^t B^{-1} b \\ Y_j = B^{-1} P_j \\ z_j = c_B^t B^{-1} P_j \end{array}\right\}$$

Είναι φανερό ότι ο αντίστροφος του βασικού πίνακα B, είναι ο πίνακας-κλειδί για τη μέθοδο Simplex, καθώς όλες οι αναγκαίες ποσότητες για την εκτέλεση ενός βήματος αυτής υπολογίζονται αμέσως, αν γνωρίζουμε τον πίνακα B^{-1}.

Σήμερα θα γίνουν κάποια παραδείγματα μοντελοποιήσεων

Ασκήσεις: 1) Πρόβλημα παραγωγής πολλών προϊόντων με κοινά μηχανήματα.

Προϊόντα 1, 2, ..., n - Μηχανές 1, 2, ..., m → Όλα τα προϊόντα πρέπει να επεξεργαστούν από όλα τα μηχανήματα. Δηλαδή το προϊόν i απαιτεί a_{ij} μονάδες χρόνου επεξεργασίας στη μηχανή j, ανά μονάδα παραγωγής.

π.χ. $n=3$, $m=4$

προϊόν \ μηχανή	1	2	3	4	κέρδος/μονάδα
1	10	30	20	15	10
2	30	20	20	10	20
3	5	20	10	15	15

Χρόνοι σε λεπτά
Κάθε μηχάνημα είναι διαθέσιμο 8 ώρες τη μέρα
Πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους.

Στάδια επίλυσης προβλήματος:

i) Ορίζουμε σωστά τις μεταβλητές και εξηγούμε τι παριστάνει η καθεμία (μεταβλητές απόφασης)

x_j = ποσότητα παραγωγής προϊόντος j ανά ημέρα, $j=1,2,3$.

ii) Ορίζουμε την αντικειμενική συνάρτηση

$\max(10x_1+20x_2+15x_3)$

iii) Ορίζουμε τους περιορισμούς

$10x_1+30x_2+5x_3 \le \underbrace{8\cdot 60}_{\text{λεπτά}} = 480$

$30x_1+20x_2+20x_3 \le 480$

$20x_1+20x_2+10x_3 \le 480$

$15x_1+10x_2+15x_3 \le 480$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

2) Παράγω 3 προϊόντα - έχω 4 μηχανήματα. Έχω ακριβώς τον ίδιο πίνακα με τον προηγούμενο. Κάθε μονάδες προϊόντος χρειάζεται επεξεργασία μόνο από ένα μηχάνημα.

Εδώ θα παραχθούν μεγαλύτερες ποσότητες, αφού το προηγούμενο πρόβλημα ήταν πιο περιοριστικό.

i) Μεταβλητές: x_{ij}, $i=1,2,3$, $j=1,2,3,4$ → δεν αρκούν οι 3 μεταβλητές του προηγούμενου

Ποσότητα προϊόντος i που παράγεται από το μηχάνημα j

ii) Αντικειμενική συνάρτηση $\max\left(\sum_{j=1}^{4}(10x_{1j}+20x_{2j}+15x_{3j})\right)$

x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} = συνολική ποσότητα προϊόντος 1

x_{21} x_{22} x_{23} x_{24}

x_{31} x_{32} x_{33} x_{34}

iii) Περιορισμοί:

$10x_{11}+30x_{21}+5x_{31}\le 480$

$30x_{12}+20x_{22}+20x_{32}\le 480$

$20x_{13}+20x_{23}+10x_{33}\le 480$

$15x_{14}+10x_{24}+15x_{34}\le 480$

$x_{11},\dots,x_{34}\ge 0$

3) Εστιατόριο που εργάζεται 7 μέρες τη βδομάδα

Απαιτούμενος αριθμός σερβιτόρων (ελάχιστος)

Μέρες	Δε	Τρ	Τε	Πε	Πα	Σα	Κυ
Αριθμός	7	7	10	12	14	16	10

Κάθε εργαζόμενος δουλεύει 5 συνεχόμενες μέρες και παίρνει τις άλλες 2 μέρες ρεπό.

Ελάχιστος αριθμός σερβιτόρων για να βγει το πρόγραμμα;

i) Μεταβλητές: Υπάρχουν 7 κατηγορίες εργαζομένων ανάλογα με τη μέρα που αρχίζουν να δουλεύουν. Ορίζω μεταβλητές $x_1,\dots,x_7$ σύμφωνα με αυτές τις κατηγορίες (κάθε κατηγορία περιέχει διακεκριμένους εργαζόμενους - ξένα σύνολα)

ii) Αντικειμενική συνάρτηση: $\min(x_1+x_2+\dots+x_7)$

iii) Περιορισμοί: Δε Τρ Τε Πε Πα Σα Κυ

$x_1+x_4+x_5+x_6+x_7\ge 7$ 1)

$x_1+x_2+x_5+x_6+x_7\ge 7$ 2)

$x_1+x_2+x_3+x_6+x_7\ge 10$ 3)

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_7\ge 12$ 4)

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\ge 14$ 5)

$x_2+x_3+x_4+x_5+x_6\ge 16$ 6)

$x_3+x_4+x_5+x_6+x_7\ge 10$ 7)

$x_1,\dots,x_7\ge 0$

1ος 2ος περιορισμός ...

4) Μια βιομηχανία παράγει 2 είδη σωλήνες για υδραυλικές εγκαταστάσεις → φαρδιά (Φ), στενή (Σ)

Και οι 2 παράγονται στο ίδιο μηχάνημα με δυναμικότητα παραγωγής 200 μέτρα/ώρα (Φ), 300 μέτρα/ώρα (Σ). Διαθέσιμο 8 ώρες/μέρα

Καμία ποσότητα προϊόντος να μη ξεπερνάει την άλλη πάνω από 25%.

Μεγιστοποίηση συνολικού μήκους των 2 προϊόντων

Αν δεν υπήρχε ο περιορισμός στις αναλογίες το ζητούμενο θα ήταν απλά 300×8, δηλαδή μόνο (Σ).

i) Μεταβλητές απόφασης: x_1 = μήκος παραγωγής Φ, x_2 = μήκος παραγωγής Σ

ii) Αντικειμενική συνάρτηση: $\max(x_1+x_2)$

iii) Περιορισμοί:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le 1.25x_2 \\ x_2 \le 1.25x_1 \end{array}\right\} \text{αναλογίες}$$

$\frac{x_1}{200}+\frac{x_2}{300} \le 8$ (προσοχή στις μονάδες) → ώρες

$x_1, x_2 \ge 0$ (μη-αρνητικότητα)

2ος τρόπος (ισοδύναμα):

i) Μεταβλητές: t_1 = χρόνος (σε ώρες) που το μηχάνημα παράγει Φ (σε μια μέρα), t_2 = χρόνος που παράγει Σ

ii) Αντικειμενική συνάρτηση: $\max(200t_1+300t_2)$

iii) Περιορισμοί:

$200t_1 \le 1.25(300t_2) = 375t_2$

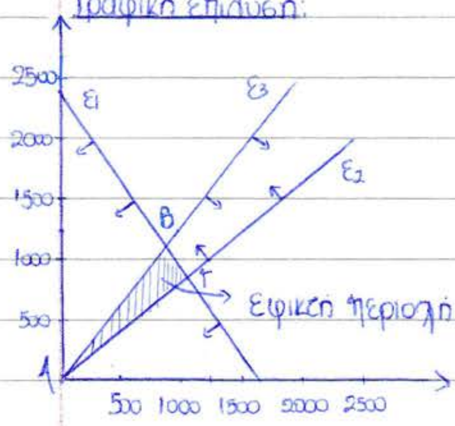
$300t_2 \le 1.25(200t_1) = 250t_1$

$t_1+t_2 \le 8$

$t_1, t_2 \ge 0$

Δηλαδή αν ορίσω τα μήκη ορίζονται μονοσήμαντα οι χρόνοι παραγωγής και αντίστροφα. Αντικαθιστώντας $x_1=200t_1$, $x_2=300t_2$ προκύπτει το δεύτερο πρόβλημα από το πρώτο. Οι εφικτές περιοχές των 2 προβλημάτων έχουν μια 1-1 αντιστοιχία.

Γραφική επίλυση:



$(\varepsilon_1): \frac{x_1}{200}+\frac{x_2}{300}=8$, $(\varepsilon_2): x_1=1,25x_2$, $(\varepsilon_3): x_2=1,25x_1$

Υπολογίζω τις συντεταγμένες των κορυφών της F:

(A) $x_1=x_2=0 \Rightarrow z=x_1+x_2=0$ (τετριμμένη κορυφή)

Εφικτή περιοχή F (B) $\frac{x_1}{200}+\frac{x_2}{300}=8,\ x_2=\frac{5}{4}x_1 \rightarrow \frac{x_1}{200}+\frac{x_1}{240}=8 \Rightarrow \dots$

Διαισθητικά περιμένουμε ότι το B είναι η άριστη λύση, αφού παράγονται περισσότερα μέτρα του (Σ), που έχει μεγαλύτερη απόδοση στην ώρα.

Για το σπίτι: Βιομηχανία παράγει χυμούς φρούτων (πορτοκάλια-λεμόνια). Έχει ένα μηχάνημα για συμπύκνωση με δυναμικότητα 100 λίτρα πορτοκάλι την ώρα ή 80 λίτρα λεμόνι την ώρα.

Το μηχάνημα είναι διαθέσιμο 150 ώρες τη βδομάδα

Πορτοκάλι: Κοστίζει 1.5€ το λίτρο

Χάνει 30% του όγκου στη συμπύκνωση

Συμπυκνωμένος χυμός πωλείται 6€ το λίτρο

Λεμόνι: Κοστίζει 2€ το λίτρο

Χάνει 25% όγκου

Συμπυκνωμένος πωλείται 8€ το λίτρο

Ο συμπυκνωμένος αποθηκεύεται σε 2 δεξαμενές των 1000 λίτρων

Μεγιστοποίηση κέρδους - Πρόκληση στην κατασκευή της αντικειμενικής συνάρτησης

2 διαφορετικές μοντελοποιήσεις