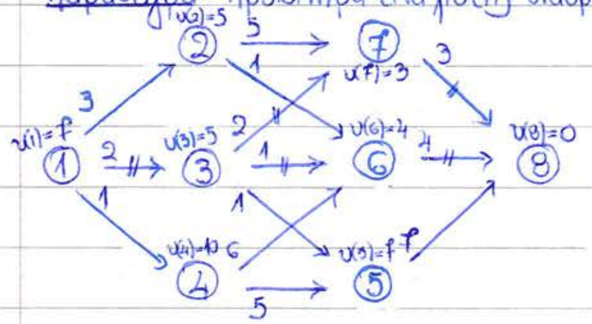
## Δυναμικός Προγραμματισμός

**Παράδειγμα - Πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής:**




Να βρω διαδρομή από τον κόμβο 1 στον κόμβο 8 που να έχει το ελάχιστο δυνατό κόστος. Υποθέτω ότι τα κόστη προστίθενται. Η απαρίθμηση των διαδρομών δεν έχει νόημα για μεγάλα προβλήματα, οπότε ψάχνω καλύτερο τρόπο.

Μυωπική πολιτική: Κοιτάζω σε κάθε βήμα ποιο είναι το μικρότερο κόστος που μπορώ να πετύχω → Δε μας δίνει τη βέλτιστη λύση του προβλήματος, π.χ. εδώ $1 \to 4 \to 5 \to 8$ με κόστος 13.

Έστω $J$ το σύνολο των κόμβων. Ορίζω μια συνάρτηση $v: J \to \mathbb{R}$, $v(x)$ = το ελάχιστο κόστος που μπορώ να πετύχω για να πάω από το $x$ στον προορισμό μου. Οι τιμές της συνάρτησης ορίζονται αναδρομικά. Η απάντηση στο αρχικό πρόβλημα είναι το $v(1)$.

Τετριμμένο: $v(8)=0$. Στη συνέχεια:

$$\left.\begin{aligned} v(5) &= 7+v(8)=7 \\ v(6) &= 4+v(8)=4 \\ v(7) &= 3+v(8)=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} v(2) &= \min\{5+v(7),\ 1+v(6)\}=5 \\ v(3) &= \min\{\underline{2+v(7)},\ \underline{1+v(6)},\ 1+v(5)\}=5 \\ v(4) &= \min\{6+v(6),\ 5+v(5)\}=10 \end{aligned}$$

Τελικά $v(1)=\min\{3+v(2),\ \underline{2+v(3)},\ 1+v(4)\} = 7$

**Παρατηρήσεις:** 1) Ο υπολογισμός της συνάρτησης $v$ γίνεται με αναδρομή προς τα πίσω

2) $$\left.\begin{aligned} a^*(1) &= 3 \\ a^*(3) &= 6 \text{ ή } 7 \\ a^*(6) &= a^*(7)=8 \end{aligned}\right\}$$ η βέλτιστη διαδρομή. Άρα τελική απάντηση $1\to3\to7\to8$ ή $1\to3\to6\to8$

Δηλαδή εφαρμόζω αντίστροφα την αναδρομή για να βρω τη βέλτιστη διαδρομή.

**Ορολογίες:** $v \to$ συνάρτηση βέλτιστης τιμής

Η $v$ ικανοποιεί τις εξισώσεις βελτιστότητας (Bellman)


z = προορισμός

δ = διαδρομή ελαχίστου κόστους $x \to z$

**Αρχή βελτιστότητας Bellman:** η $\delta(y)$ είναι επίσης διαδρομή ελαχίστου κόστους $y \to z$.

**Απόδειξη:** Έστω κόστος$(\delta')$ < κόστος$(\delta(y))$ ⇒ κόστος$(x\to y\to \delta')$ < κόστος$(x \to y \to \delta(y))$ → άτοπο

**Γενικό Πρόβλημα Δυναμικού Προγραμματισμού (ΠΔΠ):**

1) Βήματα ή περίοδοι: $t=1,2,\dots,N$, $N$: ορίζοντας του προβλήματος (συνολικός αριθμός αποφάσεων)

2) Κατάσταση: $x_t$ = κατάσταση στην αρχή του βήματος $t$, $x_t \in \mathcal{J}$ = χώρος καταστάσεων

3) Αποφάσεις: $a_t$ = απόφαση στο βήμα $t$, $D(x)$ = το σύνολο των δυνατών αποφάσεων στην κατάσταση $x$, $x \in \mathcal{J}$

4) Άμεσο κέρδος ή κόστος: $C_t(x, a)$ = κέρδος βήματος $t$, αν $x(t) = x$ και $a_t = a$

5) Δυναμική του συστήματος: $x_{t+1} = g_t(x_t, a_t)$

6) Τερματικό κόστος/κέρδος $\hat{c}(x)$, αν $x_{N+1} = x$