Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα: 7ο Μάθημα - 14/05/2014 (κ. Φακίνος)

Μέθοδος Simplex (Συνέχεια)

Τα διαδοχικά βήματα της μεθόδου Simplex μπορούν να γραφούν με τη βοήθεια μιας σειράς πινάκων που είναι γνωστή ως tableaux Simplex. Θα δώσουμε τον αντίστοιχο αλγόριθμο (αλγόριθμος Simplex) με τη βοήθεια παραδειγμάτων. Για την εφαρμογή του αλγορίθμου Simplex, βασικές προϋποθέσεις είναι:

1. Το π.γ.π να βρίσκεται σε Κ.Μ
2. Να σχηματίζεται ο $m \times m$ μοναδιαίος πίνακας από στήλες του πίνακα A. Τότε αυτός ο μοναδιαίος πίνακας δίνει και την προφανή αρχική βασική εφικτή λύση x_0.

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί με τον αλγόριθμο Simplex το π.γ.π: $\max(5x_1 - 4x_2)$, όταν:

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + x_2 \geq -6 \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 24 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

<u>Λύση</u>: Εισάγοντας περιθώριες μεταβλητές φέρνουμε το π.γ.π σε Κ.Μ

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 24 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 = 9 \end{array}\right\} \text{ και } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Ισοδύναμα σε μορφή πινάκων: $\max(c^t \cdot x)$, $A \cdot x = b (\geq 0)$, $x \geq 0$, όπου:

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^t$, $c = (5, -4, 0, 0, 0)^t$, $b = (6, 24, 9)^t$ και

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επιπλέον ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας σχηματίζεται από τις 3 τελευταίες στήλες του πίνακα A. Παίρνοντας αυτές ως αρχική βάση έχουμε αμέσως την αρχική βασική εφικτή λύση $x_0 = (0, 0, 6, 24, 9)^t$, η οποία είναι μη-εκφυλισμένη, αφού έχει τουλάχιστον 3 (γενικά m) μη-μηδενικά στοιχεία. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Simplex έχουμε τα παρακάτω tableaux

			5	-4	0	0	0	
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ
P_3	0	6	$\boxed{1}$	-1	1	0	0	6
P_4	0	24	3	-2	0	1	0	8
P_5	0	9	-2	3	0	0	1	-
		0	-5	4	0	0	0	
P_1	5	6	1	-1	1	0	0	-
P_4	0	6	0	$\boxed{1}$	-3	1	0	6
P_5	0	21	0	1	2	0	1	21
		30	0	-1	5	0	0	

<u>Πρώτο tableau Simplex</u>

Πρώτη στήλη: στήλες με τη σειρά που εμφανίζονται στον μοναδιαίο

Δεύτερη στήλη: συντελεστές των μεταβλητών στην α.σ.

Τελευταία γραμμή: τιμή της α.σ. στο x_0 - τιμές $z_j - c_j$, όπου $z_j = c_B^t \cdot P_j^t$ (εσωτερικό γινόμενο)

Το τετραγωνισμένο στοιχείο καλείται <u>πιλότος</u>. Ουσιαστικά κάνουμε γραμμοπράξεις χρησιμοποιώντας τη γραμμή του πιλότου, ώστε να μετατρέψουμε τον (P_1, P_4, P_5) στον μοναδιαίο. Εφαρμόζουμε τις ίδιες αλλαγές στη στήλη των σταθερών όρων b.

Στο πρώτο tableau η αντίστοιχη λύση x_0 δεν είναι άριστη καθώς δεν είναι όλες οι διαφορές $z_j - c_j \geq 0$ και συγκεκριμένα $z_1 - c_1 = -5 < 0$. Βρίσκουμε μια καλύτερη β.ε.λ., κάνοντας βασική τη στήλη στην οποία αντιστοιχεί η μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή αρνητική διαφορά $z_j - c_j$. Εδώ η μόνη αρνητική διαφορά είναι η $z_1 - c_1 = -5$, άρα η αντίστοιχη στήλη P_1 γίνεται βασική στο επόμενο tableau

<u>Βασική παρατήρηση</u>: Αν για κάποια αρνητική διαφορά, όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης αυτής είναι επίσης αρνητικά, αυτό σημαίνει ότι το π.γ.π. δεν έχει πεπερασμένη άριστη λύση, δηλαδή $\max(c^t x) = \infty$, και τότε λέμε ότι το π.γ.π. είναι μη-φραγμένο.

Για να βρούμε ποια στήλη θα βγει από τη βάση, σχηματίζουμε τους λόγους των στοιχείων της στήλης b προς τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία της στήλης που μπαίνει στη βάση, εδώ της P_1. Η στήλη που βγαίνει από τη βάση είναι αυτή που αντιστοιχεί στον ελάχιστο τέτοιο λόγο. Οι λόγοι τοποθετούνται στη στήλη θ του tableau Simplex. Εδώ η στήλη που βγαίνει από τη βάση είναι η P_3.

Το δεύτερο tableau δίνει τη β.ε.λ. (κορυφή) $x_1 = (6,0,0,6,21)^t$ με $z = 30$ που είναι καλύτερη από τη x_0, όμως και πάλι δεν είναι άριστη, αφού $z_2 - c_2 = -1 < 0$. Αυτή τη φορά η P_2 μπαίνει στη βάση και η P_4 βγαίνει από τη βάση

			5	-4	0	0	0	
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	θ
P_1	5	12						
P_2	-4	6	0	1	-3	1	0	
P_5	0	15						
		36	0	0	2	1	0	

Συνέχεια - Τρίτο tableau Simplex. Όλες οι διαφορές είναι μη-αρνητικές, άρα είναι το άριστο tableau, δηλαδή αυτό που δίνει την άριστη λύση, η οποία είναι $x^* = (12,6,0,0,15)$ με $z^* = 36$.

Κάνοντας κατευθείαν γραμμοπράξεις, χρησιμοποιώντας τη γραμμή του πίνακα, ώστε να μηδενίσουμε το αρνητικό στοιχείο, βλέπουμε χωρίς άλλες πράξεις ότι καταλήξαμε σε άριστη λύση.

Τεχνητές μεταβλητές (Η Μ-μέθοδος)

Έχοντας φέρει ένα π.γ.π. σε Κ.Μ. δεν είναι απαραίτητο να σχηματίζεται ο $m \times m$ μοναδιαίος πίνακας από στήλες του πίνακα A, δηλαδή είναι δυνατό να λείπουν μία ή περισσότερες στήλες. Σ' αυτή την περίπτωση εισάγουμε, σε όσες εξισώσεις χρειάζεται, από μία νέα μη-αρνητική μεταβλητή, ώστε να σχηματίζεται ο μοναδιαίος πίνακας. Οι νέες αυτές μεταβλητές εισάγονται στην α.σ. όλες με τον ίδιο συντελεστή $M \ll 0$ ($M \to -\infty$), έναν αυθαίρετα μικρό αρνητικό αριθμό. Έτσι, αφού έχουμε πρόβλημα μεγιστοποίησης, η άριστη λύση του προβλήματος θα έχει όλες τις τεχνητές μεταβλητές ίσες με 0 και επομένως αγνοώντας αυτές έχουμε την άριστη λύση του π.γ.π. Αν όμως η άριστη λύση περιέχει μία τουλάχιστον τεχνητή μεταβλητή με θετική τιμή, αυτό σημαίνει ότι το αρχικό π.γ.π. δεν έχει εφικτές λύσεις.

Παράδειγμα: Να λυθεί (με την Μ-μέθοδο) το π.γ.π. $\max(2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4)$, όταν

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4 \end{cases}$$

(εννοείται - δεν υπάρχει άλλη μέθοδος)

Λύση: Το π.γ.π. είναι σε Κ.Μ., όμως δε σχηματίζεται ο 3x3 μοναδιαίος πίνακας και συγκεκριμένα λείπουν η 2η και 3η στήλη. Επομένως εισάγουμε τεχνητές μεταβλητές στη 2η και 3η εξίσωση έτσι, ώστε να σχηματίζεται. Εισάγοντας τις τεχνητές μεταβλητές και στην α.σ. με συντελεστή $M \ll 0$ ($M \to -\infty$), έχω το νέο π.γ.π.: $\max(2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + Mx_5 + Mx_6)$, όταν

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ 2x_3 - 3x_4 + x_6 = 3 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Simplex έχουμε τα παρακάτω tableaux

			2	-3	1	2	M	M	
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_1	2	8	1	2	1	2	0	0	8
P_5	M	6	0	1	1	1	1	0	6
P_6	M	3	0	0	$\boxed{2}$	-3	0	1	$\frac{3}{2}$
		16+9M	0	7+M	1+3M	2-2M	0	0	
P_1	2	$\frac{13}{2}$	1	2	0	$\frac{7}{2}$	0		$\frac{13}{7}$
P_5	M	$\frac{9}{2}$	0	1	0	$\boxed{\frac{5}{2}}$	1		$\frac{9}{5}$
P_3	1	$\frac{3}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0		-
		$\frac{29+9M}{2}$	0	7+M	0	$\frac{7+5M}{2}$	0		

Κάθε τεχνητή μεταβλητή που φεύγει από τη βάση διαγράφεται αφού δε θα ξαναμπεί στη βάση μελλοντικά!

			2	-3	1	2	M	M	
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_1	2	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{3}{5}$	0	0			
P_4	2	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	0	1			
P_3	1	$\frac{21}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	1	0			
		$\frac{41}{5}$	0	$\frac{28}{5}$	0	0			

Το 3ο tableau δίνει την άριστη λύση του νέου ηγπ, αλλά και του αρχικού ηγπ, αγνοώντας τις τεχνητές μεταβλητές, που είναι μηδενικές. Άρα η άριστη λύση είναι $x^* = (\frac{1}{5}, 0, \frac{21}{5}, \frac{9}{5})^t$ (μοναδική) με $z^* = 21/5$.

<u>Το δυϊκό ηγπ</u>

<u>Ορισμός</u>: Ένα ηγπ είναι σε <u>ημικανονική μορφή</u> (ημι-ΚΜ), αν και μόνο αν έχει τη μορφή: $(\pm)\max(c^t x)$, $Ax \le b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \ge 0$ (Π). Εδώ σε αντίθεση με την Κ.Μ. έχουμε μόνο ανισώσεις της μορφής "$\le$", ενώ το b δεν είναι θετικό κατ' ανάγκη. Αφού κάθε ηγπ μπορεί να τεθεί σε ΚΜ, μπορεί επίσης να τεθεί και σε ημι-ΚΜ, αναλύοντας κάθε εξίσωση σε ένα ισοδύναμο σύστημα 2 ανισώσεων

<u>Ορισμός</u>: Ορίζω ως <u>δυϊκό ηγπ</u> του (Π), το ηγπ $(\pm)\min(b^t w)$, $A^t w \ge c$, $w \ge 0$ (Δ), $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ (ο ανάστροφος του A) και w καινούργιες μη-αρνητικές μεταβλητές.

<u>Θεώρημα</u>: Το δυϊκό του (Δ) είναι το (Π).

<u>Απόδειξη</u>: Βιβλίο

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί το δυϊκό του ηγπ $\max(5x_1+3x_2+2x_3+x_4)$, όταν:

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1+3x_2+x_3+2x_4 \le 6 \\ 2x_1+2x_2+5x_3+x_4 = 4 \\ x_1, x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0,\ x_4 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (\Pi)$$

<u>Λύση</u>: Ανακαθιστώντας τον 2ο περιορισμό με το ισοδύναμο σύστημα 2 εξισώσεων και θέτοντας $x_3 = -x_3'$, $x_3' \ge 0$, $x_4 = x_4' - x_4''$, $x_4', x_4'' \ge 0$, έχουμε την ημι-ΚΜ $\max(5x_1+3x_2-2x_3'+x_4'-x_4'')$,

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1+3x_2-x_3'+2x_4'-2x_4'' \le 6 \\ 2x_1+2x_2-5x_3'+x_4'-x_4'' \le 4 \\ -2x_1-2x_2+5x_3'-x_4'+x_4'' \le -4 \\ x_1, x_2, x_3', x_4', x_4'' \ge 0 \end{array}\right\} (\Pi_1)$$

Από ορισμό του δυϊκό του (Π_1) είναι: $\min(6w_1+4w_2-4w_3)$,

$$\left.\begin{array}{l} 4w_1+2w_2-2w_3 \ge 5 \\ 3w_1+2w_2-2w_3 \ge 3 \\ -w_1-5w_2+5w_3 \ge -2 \\ 2w_1+w_2-w_3 \ge 1 \\ -2w_1-w_2+w_3 \ge -1 \\ w_1, w_2, w_3 \ge 0 \end{array}\right\} (\Delta_1)$$

Όμως οι 2 τελευταίοι περιορισμοί μπορούν να ανακατασταθούν από μια ισοδύναμη ισότητα $2w_1+w_2-w_3 = 1$ και επίσης, αφού οι w_2, w_3 εμφανίζονται παντού ως διαφορά $w_2 - w_3$, μπορούμε να θέσουμε $w_2' = w_2 - w_3$, $w_2' \in \mathbb{R}$. Έτσι έχουμε το ισοδύναμο ηγπ. $\max(6w_1+4w_2')$, όταν:

$$\left.\begin{array}{l} 4\omega_1+2\omega_2' \geq 5 \\ 3\omega_1+2\omega_2' \geq 3 \\ \omega_1+5\omega_2' \leq 2 \\ 2\omega_1+\omega_2' = 1 \\ \omega_1 \geq 0,\ \omega_2' \in \mathbb{R} \end{array}\right\} (\Delta)$$

<u>Βασική παρατήρηση</u>: Το (Δ) μπορεί να βρεθεί κατευθείαν από το (Π), χωρίς να φέρω αυτό σε μη-ΚΜ, παρατηρώντας ότι κάθε περιορισμός του ενός αντιστοιχεί σε 1 μεταβλητή του άλλου και αντίστροφα: $\min(6\omega_1+4\omega_2)$, όταν:

$4\omega_1+2\omega_2 \geq 5$ "≥", επειδή $x_1 \geq 0$, στο αρχικό (Π)

$3\omega_1+2\omega_2 \geq 3$

$\omega_1+5\omega_2 \leq 2$ "≤", επειδή $x_3 \leq 0$

$2\omega_1+2\omega_2 = 1$ "=", επειδή $x_4 \in \mathbb{R}$

$\omega_1 \geq 0$ (επειδή ο πρώτος περιορισμός του (Π) έχει "≤"), $\omega_2 \in \mathbb{R}$ (επειδή ο δεύτερος περιορισμός έχει "=")

Από σύμβαση ορίζουμε ως αναμενόμενη ή φυσική φορά το "≤" για προβλήματα μεγιστοποίησης και το "≥" για προβλήματα ελαχιστοποίησης, όσον αφορά τους περιορισμούς. Φυσική φορά για τις μεταβλητές είναι πάντα η συνθήκη μη-αρνητικότητας.

Έστω τα δυϊκά ζεύγη:

$$\left.\begin{array}{l}\max(c^t x)\\ A x \le b\\ x \ge 0\end{array}\right\} (\Pi) \quad \text{και} \quad \left.\begin{array}{l}\min(b^t \omega)\\ A^t \omega \ge c\\ \omega \ge 0\end{array}\right\} (\Delta)$$

με εφικτές περιοχές F_x και F_ω αντίστοιχα.

Θεώρημα 1: Το δυϊκό του (Δ) είναι το (Π)

Απόδειξη: Η πρι-ΚΜ του (Δ) είναι:

$$\left.\begin{array}{l}-\max(-b^t \omega)\\ (-A)^t \omega \le -c\\ \omega \ge 0\end{array}\right\} \text{Από ορισμό το δυϊκό αυτού είναι:} \left.\begin{array}{l}-\min(-c^t x)\\ ((-A)^t)^t x \ge -b\\ x \ge 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\max(c^t x)\\ A x \le b\\ x \ge 0\end{array}\right\}$$

Θεώρημα 2: Αν $x \in F_x$, $\omega \in F_\omega$, τότε $c^t x \le b^t \omega$

Απόδειξη: Αφού x, ω είναι εφικτές λύσεις των (Π) και (Δ) αντίστοιχα, έχουμε

i) $\left.\begin{array}{l}Ax \le b\\ \omega \ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow \omega^t A x \le \omega^t b \Rightarrow \omega^t A x \le b^t \omega \ (1)$

ii) $\left.\begin{array}{l}A^t \omega \ge c\\ x \ge 0\end{array}\right\} \Rightarrow x^t A^t \omega \ge x^t c \Rightarrow \omega^t A x \ge c^t x \ (2)$

Από (1) και (2) έπεται το ζητούμενο: $c^t x \le \omega^t A x \le b^t \omega$

Θεώρημα 3. Αν $\hat{x} \in F_x$, $\hat{\omega} \in F_\omega$ και $c^t \hat{x} = b^t \hat{\omega}$, τότε οι $\hat{x}, \hat{\omega}$ είναι άριστες λύσεις των (Π),(Δ) αντίστοιχα.

Απόδειξη: i) $\forall x \in F_x$, από Θεώρημα 2, $c^t x \le b^t \hat{\omega} = c^t \hat{x} \Rightarrow \hat{x}$ άριστη λύση του προβλήματος μεγιστοποίησης

ii) $\forall \omega \in F_\omega$, από Θεώρημα 2, $b^t \omega \ge c^t \hat{x} = b^t \hat{\omega} \Rightarrow \hat{\omega}$ άριστη λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης

Θεώρημα 4. i) Αν το (Π) έχει άριστη λύση $\hat{x}$, τότε και το (Δ) έχει άριστη λύση $\hat{\omega}$ και $c^t \hat{x} = b^t \hat{\omega}$.

ii) Αν το (Π) είναι μη-φραγμένο, τότε $F_\omega = \emptyset$, δηλαδή το (Δ) δεν έχει εφικτές λύσεις.

Απόδειξη: i) Εισάγοντας από μια περιθώρια μεταβλητή σε κάθε περιορισμό του (Π), το φέρνουμε στην ισοδύναμη σχεδόν ΚΜ (το b μπορεί να έχει αρνητικά στοιχεία). Επιλέγοντας ως πρώτη βάση τον μοναδιαίο πίνακα, το αρχικό tableau simplex είναι:

b	$A \ : \ I$
0	$-c^t \ : \ 0$

Το tableau που αντιστοιχεί στη βάση $B = (P_{i1}, P_{i2}, \ldots, P_{im})$ είναι:

$B^{-1} b$	$B^{-1} A \ : \ B^{-1}$
$c_B^t B^{-1} b$	$c_B^t B^{-1} A - c^t \ : \ c_B^t B^{-1}$

Υποθέτοντας ότι η βάση B αντιστοιχεί στην άριστη λύση, αυτή είναι $\hat{x} = B^{-1} b$ (1) και όλες οι διαφορές $z_j - c_j$ στη τελευταία γραμμή του tableau είναι μη-αρνητικές, δηλαδή $c_B^t B^{-1} A \ge c^t$ (2), $c_B^t B^{-1} \ge 0$ (3)

Το διάνυσμα $\hat{w}=(\hat{w}_1,\dots,\hat{w}_m)^t$ που δίνεται από τη σχέση $\hat{w}^t = c_B^t B^{-1}$ (4) είναι άριστη λύση του (Δ).
Πράγματι από την (2) $w^t A = c_B^t B^{-1} A \geq c^t$ ή $A^t \hat{w} \geq c$, δηλαδή η $\hat{w}$ ικανοποιεί τους περιορισμούς του (Δ), είναι λύση αυτού και λόγω της (3) είναι εφικτή. Τέλος $b^t \hat{w} = \hat{w}^t b = c_B^t B^{-1} b = c_B^t \hat{x}_B = c^t \hat{x}$.
Άρα από το θεώρημα 3, $\hat{w}$ άριστη λύση του (Δ).

ii) Έστω ότι το (Δ) έχει εφικτή λύση w, ενώ το (Π) είναι μη-φραγμένο, δηλαδή $\max(c^t x)=\infty$. Τότε από το θεώρημα 2, $b^t w \geq c^t x \ \forall x \in F_x \Rightarrow b^t w = \infty$, άτοπο. Δηλαδή το (Δ) δεν έχει εφικτές λύσεις.

Παρατήρηση: Αν γνωρίζουμε ποιος είναι ο βασικός πίνακας B στην άριστη λύση του (Π), τότε υπολογίζοντας τον αντίστροφο του B^{-1} και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4), βρίσκουμε την άριστη λύση του (Δ). Όμως, αν έχουμε λύσει με τον αλγόριθμο Simplex το (Π), τότε η άριστη λύση του (Δ) βρίσκεται αμέσως με τη βοήθεια της τελευταίας γραμμής (γραμμή των διαφορών) του τελικού tableau. Συγκεκριμένα οι συντεταγμένες της άριστης λύσης του (Δ) βρίσκονται στην τελευταία γραμμή του τελικού tableau του (Π) στις θέσεις ακριβώς που βρίσκονται οι μοναδιαίες στήλες στο αρχικό tableau. π.χ. Αν η πρώτη στήλη του μοναδιαίου πίνακα στο αρχικό tableau είναι στην 3η θέση, τότε η πρώτη συντεταγμένη $\hat{w}_1$ της άριστης λύσης $\hat{w}$ του (Δ) βρίσκεται στην 3η θέση της τελευταίας γραμμής του τελικού tableau και συγκεκριμένα $\hat{w}_1 = z_3 = (z_3 - c_3) + c_3$

Θεώρημα 5: Αν $\hat{x}, \hat{w}$ είναι άριστες λύσεις των (Π),(Δ) αντίστοιχα, τότε:
$\hat{x}_i(a_{1i}\hat{w}_1 + a_{2i}\hat{w}_2+\dots+a_{mi}\hat{w}_m - c_i)=0$, $i=1,2,\dots,m$ (5)

Απόδειξη: Η σχέση (4) γράφεται ισοδύναμα $\hat{w}^t B = c_B^t$. Άρα, αν η στήλη P_i είναι βασική στην άριστη λύση του (Π), ισχύει ότι $\hat{w}^t P_i = c_i$ ή αναλυτικά $a_{1i}\hat{w}_1 + a_{2i}\hat{w}_2 + \dots + a_{mi}\hat{w}_m = c_i$ (6)
Θα διακρίνω 2 περιπτώσεις:
1) Η $\hat{x}_i$ δεν είναι βασική στην άριστη λύση. Τότε $\hat{x}_i=0$ και η (5) ισχύει.
2) Η $\hat{x}_i$ είναι βασική στην άριστη λύση. Τότε $\hat{x}_i \geq 0$, αλλά ισχύει η (6) και άρα και η (5).

Πόρισμα: Αν $\hat{x},\hat{w}$ είναι άριστες λύσεις των (Π),(Δ) αντίστοιχα και $\hat{x}_i > 0$, τότε η $\hat{w}$ κάνει τον i περιορισμό του (Δ) ισότητα. Επομένως, αν γνωρίζουμε ποιες μεταβλητές είναι θετικές στην άριστη λύση του (Π), τότε πάλι μπορούμε να βρούμε την άριστη λύση του (Δ), λύνοντας ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων.

Παράδειγμα: Δίνεται το πγπ $\max(2x_1-3x_2+x_3+2x_4)$, όταν

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2+x_3+2x_4=8 \\ x_2+x_3+x_4=6 \\ 2x_3-3x_4=3 \end{array}\right\}, \; x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$$

με άριστη λύση $\hat{x}=\left(\frac{1}{5}, 0, \frac{21}{5}, \frac{9}{5}\right)$. Να βρεθεί η άριστη λύση του δυϊκού του.

<u>Λύση</u>: Το δυϊκό ΠΓΠ είναι: $\min(8w_1+6w_2+3w_3)$, όταν:

$$\left.\begin{aligned} &w_1 \geq 2 \\ &2w_1 + w_2 \geq -3 \\ &w_1 + w_2 + 2w_3 \geq 1 \\ &2w_1 + w_2 - 3w_3 \geq 2 \\ &w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\}$$

Από το πόρισμα, αφού οι θετικές μεταβλητές στην άριστη λύση του (Π) είναι οι 1η, 3η και 4η, αυτό σημαίνει ότι η άριστη λύση του (Δ) κάνει τον 1ο, 3ο και 4ο περιορισμό του (Δ) ισότητες:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{w}_1 = 2 \\ &\hat{w}_1 + \hat{w}_2 + 2\hat{w}_3 = 1 \\ &2\hat{w}_1 + \hat{w}_2 - 3\hat{w}_3 = 2 \end{aligned}\right\}$$ Η λύση του συστήματος είναι $\hat{w}_1 = 2$, $\hat{w}_2 = -\frac{7}{5}$, $\hat{w}_3 = \frac{1}{5}$, η οποία είναι

και η άριστη λύση του (Δ).