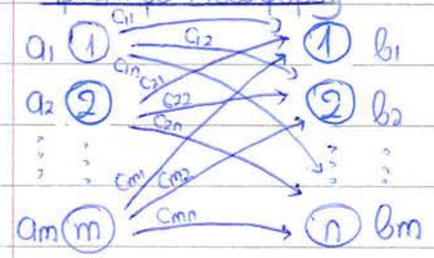
Πρόβλημα Μεταφοράς



Το πρόβλημα είναι το κόστος μεταφοράς. Οι πηγές επικοινωνούν με κάθε προορισμό (τα βελάκια αποτελούν τις ακμές του γραφήματος και τους αναστοιχεί ένα κόστος μεταφορά). Όχι πηγές ή προορισμοί μεταξύ τους. Δεν είναι αναγκαίο να μιλάμε για προϊόντα!

$i = 1, 2, \dots, m$ πηγές

$j = 1, 2, \dots, n$ προορισμοί

a_i = διαθέσιμη ποσότητα στην πηγή i

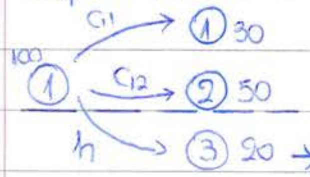
b_j = απαιτούμενη ποσότητα στον προορισμό j

c_{ij} = κόστος ανά μονάδα για μεταφορά από πηγή i σε προορισμό j.

Ορισμός: Ένα πρόβλημα μεταφοράς λέγεται ισορροπημένο αν $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (η ποσότητα που παράγεται ισούται με την ποσότητα που ζητείται)

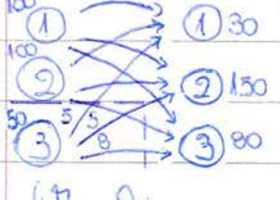
Αν $\sum_i a_i > \sum_j b_j$ (περισσεύει κάποια ποσότητα στις πηγές) ή $\sum_i a_i < \sum_j b_j$ (δεν καλύπτονται οι διαθέσιμες ποσότητες), τότε πρέπει να γνωρίζουμε πως θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα

π.χ. $m=1, n=2$



→ Εισάγω αυτόν τον φανταστικό προορισμό για να ισοσταθμίσω διαθέσιμα-ζητούμενα (το κόστος h μπορεί να είναι 0 ανάλογα με το πρόβλημα - διαχείριση πλεονάσματος)

π.χ. $m=2, n=3$



Το πρόβλημα είναι πως θα "μοιραστεί" η έλλειψη στους προορισμούς (ελάχιστο κόστος σύμφωνα με τις ελλείψεις)

(Προσθέτω τη φανταστική πηγή 3 (τα κόστη μεταφοράς από τη φανταστική πηγή στον προορισμό i ισούται με το κόστος έλλειψης ανά μονάδα στον προορισμό αυτό)

→ Θέλω να γράψω το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους μεταφοράς ως π.γ.π.

- Μεταβλητές: x_{ij} = ποσότητα που μεταφέρεται από πηγή i σε προορισμό j, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$. Άρα $m \cdot n$ μεταβλητές.
- Αντικειμενική συνάρτηση: $\min\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}\right)$

- Περιορισμοί: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ (πηγή i)

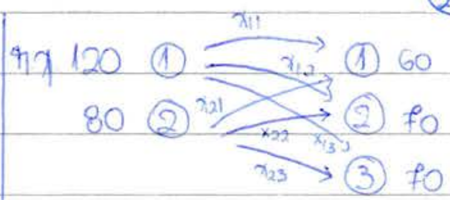
$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ (προορισμός j)

$x_{ij} \geq 0$ (μη-αρνητικότητα)

Παρατηρήσεις: 1) Είναι ηχ.π (σχεδόν) σε ΚΜ (πρόβλημα ελαχιστοποίηση)

2) Στον πίνακα δεν εμφανίζεται ο μοναδιαίος πίνακας

3) Δεν είναι όλες οι γραμμές του πίνακα γραμμικά ανεξάρτητες $\rightarrow r(A) = m+n-1$



$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21} \geq 60 \\ x_{12}+x_{22} \geq 70 \\ x_{13}+x_{23} \geq 70 \end{array}\right\} \text{προορισμοί}$$

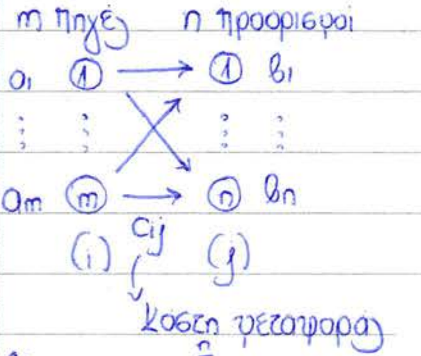
$$\left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 120 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23} \leq 80 \end{array}\right\} \text{πηγές}$$

Στην περίπτωση του ισορροπημένου γίνονται εξισώσεις.

$$\Downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πρόβλημα Μεταφοράς



Ισορροπημένο πρόβλημα: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (αν δεν είναι, μπορεί να γίνει με προσθήκη φανταστικής πηγής - προορισμού)

Μεταβλητές απόφασης x_{ij}: ποσότητα που μεταφέρεται από πηγή i σε προορισμό j

Αντικειμενική συνάρτηση: $\min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right)$

Περιορισμοί: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $i=1,2,\dots,m$ και $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $j=1,2,\dots,n$; $x_{ij} \geq 0$

$m+n$ περιορισμοί και $m \cdot n$ μεταβλητές → $A_{(m+n)\times(m\cdot n)}$, π.χ. $m=4$, $n=5$, $A_{9\times 20}$

Οι περιορισμοί των πηγών δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητοι από τους περιορισμούς των προορισμών.

$r(A) = m+n-1$ ⇒ Μια β.ε.λ. (ΒΕΛ) μπορεί να έχει το πολύ $m+n-1$ θετικά στοιχεία.

Αλγόριθμος μεταφοράς

Παράδειγμα: $m=3$, $n=4$

i \ j	1	2	3	4	a_i	
1	− $\boxed{4}$	− $\boxed{5}$	100 $\boxed{2}$	− $\boxed{6}$	$\cancel{100}$	
2	90 $\boxed{1}$	− $\boxed{3}$	− $\boxed{4}$	30 $\boxed{5}$	$\cancel{120}$	30
3	− $\boxed{2}$	60 $\boxed{1}$	10 $\boxed{3}$	10 $\boxed{4}$	$\cancel{80}$	$\cancel{20}$ 10
b_j	$\cancel{90}$	$\cancel{60}$	$\cancel{110}$ $\cancel{10}$	40	300	

Α' φάση: εύρεση αρχικής ΒΕΛ (Μέθοδος ελάχιστου στοιχείου)

Β' φάση: Εύρεση βέλτιστης λύσης (Μέθοδος δυναμικών)

Εδώ $m+n-1=6$ (το πολύ 6 θετικά τετράγωνα)

Έχω ακριβώς 6 θετικά ⇒ ΒΕΛ μη-εκφυλισμένη

$\left.\begin{array}{l}\sum a_i = 300\\ \sum b_j = 300\end{array}\right\}$ ισορροπημένο πρόβλημα

Παρατηρήσεις: 1) Ένα ισορροπημένο πρόβλημα μεταφοράς είναι εφικτό και φραγμένο ⇒ έχει πάντα βέλτιστη λύση

2) Υπάρχει βέλτιστη ΒΕΛ

3) Μια ΒΕΛ έχει το πολύ $m+n-1$ θετικά στοιχεία.

Μέθοδος ελάχιστου στοιχείου: Επιλέγω τα τετράγωνα με τα μικρότερα κόστη, μεταφέρω εκεί όσο μεγαλύτερη ποσότητα μπορώ και συνεχίζω λύνοντας τα μικρότερα προβλήματα που προκύπτουν.

Μέθοδος Δυναμικών

Θεώρημα: Έστω $\hat{x} = (x_{ij})$ μια ΒΕΛ του προβλήματος μεταφοράς. Η $\hat{x}$ είναι βέλτιστη, αν και μόνο αν υπάρχουν $u_1,\dots,u_m, v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}$:

(i) $u_i + v_j = c_{ij}$, $\forall i,j$: $\hat{x}_{ij} > 0$ (μόνο για τις θετικές ποσότητες)

(ii) $\delta_{ij} \equiv u_i + v_j - c_{ij} \leq 0,\ \forall i,j$ (για όλες τις ποσότητες)

u_i, v_j οι μεταβλητές του δυϊκού του προβλήματος μεταφοράς ($m+n$ μεταβλητές)

<u>Παράδειγμα:</u> $m=3,\ n=5 \rightarrow m+n-1=7$

		$u_i \backslash v_j$	$v_1=3$	$v_2=4$	$v_3=5$	$v_4=1$	$v_5=2$	a_i	
Πάνω δεξιά:		$u_1=0$	[0] [3] –	[-2] [6] –	[3] [2] –	[0] [1] 15	[0] [2] 5	~~20~~	~~5~~
Κόστη μεταφοράς		$u_2=-1$	[-4] [6] –	[0] [3] 25	[0] [4] 15	[-7] [7] –	[-3] [4] –	~~40~~	~~15~~
Πάνω αριστερά:		$u_3=3$	[0] [6] 10	[2] [5] –	[0] [8] 20	[-5] [9] –	[0] [5] 20	50	
Διαφορές δ_{ij}		b_j	10	~~25~~	~~35~~ 20	~~15~~	~~25~~ 20	110	

Ακριβώς 7 θετικά τετράγωνα $\Rightarrow$ ΒΕΛ, μη-εκφυλισμένη

$x_{14} > 0 \Rightarrow u_1 + v_4 = c_{14} = 1$

$x_{15} > 0 \Rightarrow u_1 + v_5 = c_{15} = 2$

$\vdots$

7 εξισώσεις - 8 άγνωστοι $\Rightarrow$ άπειρες λύσεις

Θέτω αυθαίρετα κάποια μεταβλητή 0 και υπολογίζω τις υπόλοιπες από τον πίνακα, ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις

$\delta_{13} > 0,\ \delta_{32} > 0 \Rightarrow$ μη-βέλτιστη λύση (από το θεώρημα)

Κόστος αυτής της λύσης: $1 \cdot 15 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 10 + 8 \cdot 20 + 5 \cdot 20 = 480$

Θέλω να μηδενίσω μια θετική διαφορά και μια μηδενική να την κάνω αρνητική.

Επιλέγω το τετράγωνο με τη μεγαλύτερη θετική διαφορά, προσθέτω εκεί μια θετική ποσότητα θ, κάνω κατάλληλες αλλαγές στον πίνακα και υπολογίζω το θ, ώστε να καταλήξω τελικά σε νέο ΒΕΛ.

<u>Κανόνας αλλαγής βάσης</u>: Έστω το τετράγωνο με τη μεγαλύτερη διαφορά $\delta_{ij} > 0$.

Δημιουργώ μονοπάτι που ξεκινάει από αυτό το τετράγωνο, πάει εναλλάξ οριζόντια-κάθετα, πατάει <u>πάντα</u> σε βασικά τετράγωνα (εκτός από το πρώτο) και καταλήγει στην ίδια στήλη με το αρχικό τετράγωνο. Βάζω εναλλάξ +, - στις κορυφές του μονοπατιού. Τελικά θ είναι η ελάχιστη ποσότητα από τα (-) τετράγωνα.

Εδώ $\theta = \min\{5, 20\} = 5$ και νέο κόστος: $480 - \theta\,\delta_{13} = 480 - 5 \cdot 3 = 465$. Αναλυτικά:

–	–	θ	15	$5-\theta$
–	25	15	–	–
10	–	$20-\theta$	–	$20+\theta$

Δε διαλέγω να μετακινηθώ οριζόντια στο 15 γιατί είναι το μοναδικό στη στήλη. Στο τέλος μηδενίζω το $5-\theta$, άρα βρίσκω $\theta = 5$