Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα. 8º Μάθημα - 19/05/2014 (κ. Φακίνος) (18)

1.8 σελ. 77 | $\max(-x_1+2x_2-3x_3)$

$$\left.\begin{array}{l} x_1-x_2+x_3+2x_4=10 \\ 2x_2-x_3\le 1 \\ x_2+2x_4\le 8 \\ x_i\ge 0,\ i=1,2,3,4 \end{array}\right\}$$

Λύση: Πρέπει αρχικά το π.γ.π. να έρθει σε Κ.Μ., εισάγοντας περιθώριες μεταβλητές x_5, x_6, στον δεύτερο και τρίτο περιορισμό αντίστοιχα

$$\left.\begin{array}{l} x_1-x_2+x_3+2x_4=10 \\ 2x_2-x_3+x_5=1 \\ x_2+2x_4+x_6=8 \\ x_i\ge 0,\ i=1,2,\dots,6 \end{array}\right\}$$

, όπου $x=(x_1,\dots,x_6)^t$, $c=(-1,2,-3,0,0,0)^t$, $b=(10,1,8)^t$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ Επιπλέον οι στήλες P_1, P_5, P_6 του A σχηματίζουν τον 3×3 μοναδιαίο πίνακα.

Επιλέγοντας αυτές ως πρώτη βάση έχουμε την αρχική β.ε.λ. (κορυφή) $x_0=(10,0,0,0,1,8)^t$

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Simplex έχουμε τα παρακάτω tableaux:

			-1	2	-3	0	0	0	
B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	5
P_5	0	1	0	2	-1	0	1	0	-
P_6	0	8	0	1	0	$\boxed{2}$	0	1	4
		-10	0	-1	2	-2	0	0	
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1	-
P_5	0	1	0	$\boxed{2}$	-1	0	1	0	$\frac{1}{2}$
P_4	0	4	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	8
		-2	0	0	2	0	0	1	

Στο πρώτο tableau δεν έχουμε άριστη λύση, αφού έχουμε αρνητικές διαφορές και συγκεκριμένα $z_2-c_2=-1$, $z_4-c_4=-2$

Αν πάνω από μια αρνητική διαφορά, όλα τα στοιχεία του A ήταν αρνητικά, το π.γ.π. θα ήταν μη-φραγμένο.

Έτσι βρίσκω καλύτερη β.ε.λ. x_1 εισάγοντας στη βάση μια μη-βασική στήλη στη θέση μιας βασικής που φεύγει από τη βάση. Η στήλη που μπαίνει στη βάση είναι αυτή που αντιστοιχεί στη μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή αρνητική διαφορά. Η στήλη που φεύγει από τη βάση είναι η P_6, καθώς σε αυτή αντιστοιχεί ο ελάχιστος λόγος στη στήλη θ.

Το δεύτερο tableau δίνει τη β.ε.λ. $x_1=(2,0,0,4,1,0)^t$ με $z_1=-2$, που είναι καλύτερη από τη x_0, αλλά και άριστη λύση του προβλήματος, αφού όλα τα $z_j-c_j\ge 0$.

Αν επιλέγαμε στήλη με θετική διαφορά θα πηγαίναμε σε χειρότερη λύση. Αν υπάρχει μηδενική διαφορά που αντιστοιχεί σε μη-βασική στήλη, τότε υπάρχει εναλλακτική άριστη β.ε.λ., η οποία προκύπτει κάνοντας βασική την αντίστοιχη στήλη. Εδώ έχουμε $z_2-c_2=0$, άρα εισάγουμε την P_2 στη βάση και διώχνουμε την P_5.

			-1	2	-3	0	0	0	
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_1	-1	3	1	0	0	0	1	-1	
P_2	2	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
P_4	0	$\frac{15}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	
		-2	0	0	2	0	0	1	

Άρα η εναλλακτική άριστη κορυφή είναι η $x_2 = \left(3, \frac{1}{2}, 0, \frac{15}{4}, 0, 0\right)^t$ (με $z_2 = 2$)

Άρα τελικά το π.γ.π. έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $0 \le \lambda \le 1$, δηλαδή κάθε κυρτός συνδυασμός των x_1, x_2.

Τελικά $x = \left(3-\lambda, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda, 0, \frac{15}{4} - \frac{1}{4}\lambda, \lambda, 0\right)^t$, $0 \le \lambda \le 1$.

1.10 Να λυθεί το π.γ.π. $\min(x_1 - 3x_2 + 4x_3)$, όταν:

$$\left.\begin{array}{l} -7x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \le 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 2 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,3,4 \end{array}\right\}$$

Το φέρνω σε Κ.Μ.: $-\max(-x_1 + 3x_2 - 4x_3)$, όταν:

$$\left.\begin{array}{l} -7x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_6 = 2 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,\dots,6 \end{array}\right\}$$

Επίσης οι στήλες P_5, P_6 σχηματίζουν τον 2×2 μοναδιαίο πίνακα, τον οποίο επιλέγοντας ως πρώτη βάση, μας δίνει την αρχική β.ε.λ. $x_0 = (0,0,0,0,1,2)^t$ με $z_0 = 0$.
Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Simplex έχουμε τα παρακάτω tableaux:

			-1	3	-4	0	0	0	
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_5	0	1	-7	$\boxed{1}$	3	-1	1	0	1
P_6	0	2	-2	2	3	1	0	1	1
		0	1	-3	4	0	0	0	
P_2	3	1	-7	1	3	-1	1	0	-
P_6	0	ε	$\boxed{12}$	0	-3	3	-2	1	$\frac{\varepsilon}{12}$
		3	-20	0	13	-3	3	0	
P_2	3	$1+\frac{7\varepsilon}{12}$	0	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	
P_1	-1	$\frac{\varepsilon}{12}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	
		$3+\frac{5\varepsilon}{3}$	0	0	8	2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	

→ μη-φραγμένη εφικτή περιοχή.

Το δεύτερο tableau δίνει τη β.ε.λ. $x_1 = (0,1,0,0,0,0)^t$ με $z_1 = 3$, όχι όμως άριστη, γιατί υπάρχουν αρνητικές διαφορές. Επιπλέον η x_1 είναι εκφυλισμένη β.ε.λ., καθώς έχει 1 και όχι 2 θετικά στοιχεία. Μια μέθοδος αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος είναι η μέθοδος διαταραχής. Σύμφωνα με αυτή αντικαθιστούμε το 0 της β.ε.λ. με ε αυθαίρετο θετικό μικρό αριθμό.

Στο τρίτο tableau $z_5 - c_5 < 0$, αλλά και τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης αυτής μη-αρνητικά, δηλαδή το π.γ.π. είναι μη-φραγμένο και δεν έχει (πεπερασμένη) άριστη λύση. Αλλιώς $\max(c^t x) = \infty$.

<u>Σημείωση</u>: Αν τα στοιχεία μιας στήλης εκτός από τη διαφορά είναι αρνητικά, όπως εδώ στην πρώτη στήλη του πρώτου tableau, αυτό σημαίνει ότι η εφικτή περιοχή είναι μη-φραγμένη.