ΤΟ ΕΡΓΟ ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΕΥΡΩΠΑΙΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ ΚΑΙ ΑΠΟ ΕΘΝΙΚΟΥΣ ΠΟΡΟΥΣ

Αναμόρφωση του Προγράμματος Προπτυχιακών Σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών με έμφαση στην Πληροφορική, τη Διδακτική και τις Εφαρμογές των Μαθηματικών.

Σημειώσεις για το μάθημα της Επιχειρησιακής Έρευνας

Διδάσκοντες : Α. Μπουρνέτας

Δ. Φακίνος

Τις σημειώσεις επιμελήθηκαν οι : Σπ. Κάντα

Στ. Καποδίστρια

Κεφάλαιο 2

Το πρόβλημα μεταφοράς

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της οικονομικής διακίνησης ενός προϊόντος από ορισμένους σταθμούς παραγωγής σε ορισμένους σταθμούς προορισμού.

2.1 Εισαγωγή στο πρόβλημα μεταφοράς

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος μεταφοράς είναι η ακόλουθη.
Σε m σταθμούς παραγωγής A_1, A_2, ..., A_m ένα προϊόν υπάρχει σε ποσότητες α_1, α_2, ..., α_m, αντίστοιχα. Το προϊόν πρέπει να διανεμηθεί σε n σταθμούς προρισμού B_1, B_2, ..., B_n που απαιτούν ποσότητες β_1, β_2, ..., β_n, αντίστοιχα. Αρχικά υποθέτουμε πως η συνολική παραγωγή ισούται με την συνολική ζήτηση, δηλαδή πως $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j$. Θεωρούμε πως υπάρχει κόστος μεταφοράς από κάθε σταθμό παραγωγής πρός κάθε σταθμό ζήτησης, συγκεκριμένα το κόστος μεταφοράς από τον σταθμό παραγωγής A_i στον σταθμό προορισμού B_j θα συμβολίζεται με c_{ij}. Ζητείται να βρεθεί άριστο σχέδιο μεταφοράς, δηλαδή να βρεθούν οι κατάλληλες ποσότητες x_{ij} που πρέπει να μεταφερθούν από τον κάθε σταθμό παραγωγής σε κάθε σταθμό προορισμού έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος μεταφοράς και συγχρόνως να ικανοποιούνται όλες οι ανάγκες των σταθμών προορισμού.

Παρατήρηση 4 *Αν η προσφορά είναι μεγαλύτερη από την ζήτηση, δηλαδή* $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i > \sum_{j=1}^{n} \beta_j$, *τότε εισάγουμε έναν υποθετικό σταθμό προορισμού, έστω* B_{n+1} *ο οποίος απαιτεί ποσότητα* $\beta_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i - \sum_{j=1}^{n} \beta_j > 0$, *με κατάλληλα κόστη μεταφοράς* $c_{i\,n+1}$.

Αν η προσφορά είναι μικρότερη από την ζήτηση, δηλαδή $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i < \sum_{j=1}^{n} \beta_j$, *τότε εισάγουμε έναν υποθετικό σταθμό παραγωγής, έστω* A_{m+1} *ο οποίος απαιτεί ποσότητα* $\alpha_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i > 0$, *με κατάλληλα κόστη μεταφοράς* c_{m+1j}.

Τέλος αν δεν υπάρχει μέσο μεταφοράς από έναν σταθμό παραγωγής σε έναν σταθμό προορισμού τότε υποθέτουμε πως το αντίστοιχο κόστος είναι ένας αυθαίρετα μεγάλος θετικός αριθμός M.

Τα δεδομένα του προβλήματος μεταφοράς μπορούν να γραφούν συνοπτικά με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	α_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	α_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	α_m
	β_1	β_2	$\cdots$	β_n	

Παρατήρηση 5 *Κάθε βασική εφικτή λύση του προβλήματος της μεταφοράς έχει ακριβώς* $m + n - 1$ *βασικές μεταβλητές και επομένως το πολύ* $m+n-1$ *θετικές συντεταγμένες. Αν η βασική εφικτή λύση έχει λιγότερες από* $m + n - 1$ *θετικές συντεταγμένες τότε καλείται εκφυλισμένη.*

Θεώρημα 1 *Το πρόβλημα μεταφοράς έχει πάντα άριστη λύση.*

2.2 Αλγόριθμος

Θα περιγράψουμε συνοπτικά την βασική δομή του αλγόριθμου εξεύρεσης άριστου σχεδίου μεταφοράς:

1. Αρχικά αναζητούμε μια πρώτη βασική εφικτή λύση. Τη λύση αυτή θα την βρούμε με την μέθοδο ελάχιστου στοιχείου. Ξεκινάμε από το τετράγωνο του πίνακα με το ελάχιστο δυνατό κόστος, έστω $c_{i_0 j_0}$ και μέσα στο τετράγωνο αυτό τοποθετούμε τη μεγαλύτερη δυνατή ποσότητα, $x_{i_0 j_0} = min\{\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}\}$

(a) αν $x_{i_0j_0} = \alpha_{i_0}$ τότε μηδενίζουμε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της αντίστοιχης γραμμής, εφόσον αυτός ο σταθμός παραγωγής δεν διαθέτει άλλο απόθεμα.

(b) αν $x_{i_0j_0} = \beta_{j_0}$ τότε μηδενίζουμε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης, εφόσον αυτός ο σταθμός προορισμού έχει καλύψει όλη την ζήτηση.

(c) αν $x_{i_0j_0} = \alpha_{i_0} = \beta_{j_0}$ τότε μηδενίζουμε και την γραμμή και την στήλη, και άρα η λύση που θα προκύψει θα είναι εκφυλισμένη. Στην περίπτωση αυτή θα αναφερθούμε διεξοδικά στην επόμενη παράγραφο.

Συνεχίζουμε να εφαρμόζουμε την μέθοδο ελάχιστου στοιχείου στο υπόλοιπο tableau μέχρι να συμπληρώσουμε όλα τα τετράγωνα του πίνακα.

Παράδειγμα 1 *Έστω ότι μας δίνεται το ακόλουθο πρόβλημα μεταφοράς και μας ζητείται να βρεθεί άριστη λύση.*

	B_1	B_2	B_3	
A_1	8	7	4	40
A_2	5	4	2	30
A_3	6	9	5	20
	10	60	20	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	8	7	4	40
A_2	5	4	2 20	30
A_3	6	9	5	20
	10	60	20	

Παρατηρούμε ότι το μικρότερο από τα κόστη μεταφοράς είναι το $c_{23} = 2$, οπότε σύμφωνα με την μέθοδο ελάχιστου στοιχείου θα συμπληρώσουμε το αντίστοιχο τετράγωνο θέτοντας $x_{23} = min\{\alpha_2, \beta_3\} = \{30, 20\} = 20$. Εφόσον $x_{23} = \beta_3 = 20$ θα μηδενίσουμε τα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης μιας και ο σταθμός προορισμού B_3 έχει πλέον καλύψει τις ανάγκες του. Επιπλέον ο σταθμός παραγωγής A_2 διέθεσε ποσότητα 20 στον B_3 και άρα τώρα διαθέτει ποσότητα ίση με $10 = 30 - 20$.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8}	^{7}	^{4} 0	40
A_2	^{5}	^{4}	^{2} 20	$\cancel{30} \to 10$
A_3	^{6}	^{9}	^{5} 0	20
	10	60	$\cancel{20}$	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8}	^{7}	^{4} 0	40
A_2	^{5}	^{4}	^{2} 20	$\cancel{30} \to 10$
A_3	^{6}	^{9}	^{5} 0	20
	10	60	$\cancel{20}$	

Παρατηρούμε ότι το μικρότερο από τα κόστη μεταφοράς είναι το $c_{22} = 4$, *οπότε σύμφωνα με την μέθοδο ελάχιστου στοιχείου θα συμπληρώσουμε το αντίστοιχο τετράγωνο θέτοντας* $x_{22} = min\{\alpha_2, \beta_2\} = \{10, 60\} = 10$. *Εφόσον* $x_{22} = \alpha_2 = 10$ *θα μηδενίσουμε τα στοιχεία της αντίστοιχης γραμμής μιας και ο σταθμός παραγωγής* A_2 *δεν έχει πλέον άλλο απόθεμα. Επιπλέον ο σταθμός παραγωγής* B_2 *πήρε ποσότητα* 10 *από τον σταθμό παραγωγής* A_2 *και άρα τώρα ζητάει ποσότητα ίση με* $50 = 60 - 10$.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8}	^{7}	^{4} 0	40
A_2	^{5} 0	^{4} 10	^{2} 20	$\cancel{30} \to \cancel{10}$
A_3	^{6}	^{9}	^{5} 0	20
	10	$\cancel{60} \to 50$	$\cancel{20}$	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8}	^{7}	^{4} 0	40
A_2	^{5} 0	^{4} 10	^{2} 20	$\cancel{30} \to \cancel{10}$
A_3	^{6}	^{9}	^{5} 0	20
	10	$\cancel{60} \to 50$	$\cancel{20}$	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8} 0	^{7}	^{4} 0	40
A_2	^{5} 0	^{4} 10	^{2} 20	$\cancel{30} \to \cancel{10}$
A_3	^{6} 10	^{9}	^{5} 0	$\cancel{20} \to 10$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60} \to 50$	$\cancel{20}$	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8} 0	^{7}	^{4} 0	40
A_2	^{5} 0	^{4} 10	^{2} 20	$\cancel{30} \to \cancel{10}$
A_3	^{6} 10	^{9}	^{5} 0	$\cancel{20} \to 10$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60} \to 50$	$\cancel{20}$	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8} 0	^{7} 40	^{4} 0	$\cancel{40}$
A_2	^{5} 0	^{4} 10	^{2} 20	$\cancel{30} \to \cancel{10}$
A_3	^{6} 10	^{9}	^{5} 0	$\cancel{20} \to 10$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60} \to \cancel{50} \to 10$	$\cancel{20}$	

	B_1	B_2	B_3	
A_1	^{8} 0	^{7} 40	^{4} 0	$\cancel{40}$
A_2	^{5} 0	^{4} 10	^{2} 20	$\cancel{30} \to \cancel{10}$
A_3	^{6} 10	^{9} 10	^{5} 0	$\cancel{20} \to \cancel{10}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60} \to \cancel{50} \to \cancel{10}$	$\cancel{20}$	

Συνεπώς έχουμε βρεί μια βασική εφικτή λύση. Παρατηρούμε ότι η λύση αυτή έχει $3 + 3 - 1 = 5$ *θετικά στοιχεία και άρα είναι μη εκφυλισμένη.*

2. Στη συνέχεια θέλουμε να ελέγξουμε αν η βασική εφικτή λύση, που έχουμε βρεί $\tilde{x}_{ij}$, είναι άριστη. Θεωρούμε τα στοιχεία u_i και v_j τα οποία καλούνται δυναμικά.

$u_i \backslash v_j$	v_1	v_2	$\cdots$	v_n	
u_1	$^{c_{11}}$ $\tilde{x}_{11}$	$^{c_{12}}$ $\tilde{x}_{12}$	$\cdots$	$^{c_{1n}}$ $\tilde{x}_{1n}$	α_1
u_2	$^{c_{21}}$ $\tilde{x}_{21}$	$^{c_{22}}$ $\tilde{x}_{22}$	$\cdots$	$^{c_{2n}}$ $\tilde{x}_{2n}$	α_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
u_m	$^{c_{m1}}$ $\tilde{x}_{m1}$	$^{c_{m2}}$ $\tilde{x}_{m2}$	$\cdots$	$^{c_{mn}}$ $\tilde{x}_{mn}$	α_m
	β_1	β_2	$\cdots$	β_n	

Θέτουμε $u_1 = 0$. Ενώ τα υπόλοιπα u_i και v_j υπολογίζονται ως εξής: κοιτάζουμε μόνο τα βασικά τετράγωνα, δηλαδή εκείνα στα οποία $\tilde{x}_{ij} > 0$ και λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων $u_i + v_j = c_{ij}$.

Παράδειγμα 2 Συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος. *Θα υπολογίσουμε τα δυναμικά u_i και v_j για τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος.*

$u \backslash v$	v_1	v_2	v_3	
u_1	^{8} *0*	^{7} *40*	^{4} *0*	$\cancel{40}$
u_2	^{5} *0*	^{4} *10*	^{2} *20*	$\cancel{30}$
u_3	^{6} *10*	^{9} *10*	^{5} *0*	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

$$
\begin{aligned}
u_1 + v_2 &= 7, \ \textit{εφόσον το } x_{12} > 0 \\
u_2 + v_2 &= 4, \ \textit{εφόσον το } x_{22} > 0 \\
u_2 + v_3 &= 2, \ \textit{εφόσον το } x_{23} > 0 \\
u_3 + v_1 &= 6, \ \textit{εφόσον το } x_{31} > 0 \\
u_3 + v_2 &= 9, \ \textit{εφόσον το } x_{32} > 0
\end{aligned}
$$

Θεωρούμε $u_1 = 0$ και άρα επιλύοντας το παραπάνω σύστημα έπεται

$u \backslash v$	4	7	5	
0	8 *0*	7 *40*	4 *0*	$\cancel{40}$
-3	5 *0*	4 *10*	2 *20*	$\cancel{30}$
2	6 *10*	9 *10*	5 *0*	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

Μόλις υπολογίσουμε τα δυναμικά καταγράφουμε στα μη βασικά τετράγωνα στην πάνω αριστερά γωνία την ποσότητα $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ οι οποίες καλούνται διαφορές.

Παράδειγμα 3 Συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος. *Θα υπολογίσουμε τις διαφορές δ_{ij} για τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος.*

$u \backslash v$	4	7	5	
0	-4 / 8 *0*	7 *40*	1 / 4 *0*	$\cancel{40}$
-3	-4 / 5 *0*	4 *10*	2 *20*	$\cancel{30}$
2	6 *10*	9 *10*	2 / 5 *0*	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

εφόσον

$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= u_1 + v_1 - c_{11} = -4 \\
\delta_{13} &= u_1 + v_3 - c_{13} = 1 \\
\delta_{21} &= u_2 + v_1 - c_{21} = -4 \\
\delta_{33} &= u_3 + v_3 - c_{33} = 2
\end{aligned}$$

3. Ελέγχουμε αν η λύση $\tilde{x}_{ij}$ είναι άριστη, εξετάζοντας τις διαφορές δ_{ij} στα μη βασικά τετράγωνα.

   (a) αν $\delta_{ij} \leq 0$ για όλα τα μη βασικά τετράγωνα τότε η λύση που έχει βρεθεί είναι άριστη. Αν επιπλέον $\delta_{ij} < 0$ για όλα τα μη βασικά τετράγωνα τότε η άριστη λύση που έχει βρεθεί είναι μοναδική.

   (b) αν υπάρχει $\delta_{ij} > 0$ για κάποιο από τα μη βασικά τετράγωνα τότε η λύση που έχει βρεθεί **δεν** είναι άριστη, οπότε και συνεχίζουμε με το βήμα 4.

Παράδειγμα 4 Συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος. *Παρατηρούμε πως οι διαφορές δ_{13} και δ_{33} είναι γνησίως θετικές και άρα δεν έχουμε οδηγηθεί σε άριστη λύση. Συνεπώς συνεχίζουμε με το βήμα 4.*

4. Αναζητούμε μια καλύτερη βασική εφικτή λύση. Επιλέγουμε το τετράγωνο εκείνο με την μεγαλύτερη θετική διαφορά, δηλαδή το τετράγωνο (i_0, j_0) που προκύπτει από την σχέση $(i_0, j_0) : \delta_{i_0,j_0} = max\{\delta_{ij} : \delta_{ij} > 0\}$ και το συνδέουμε με οριζόντιες και κάθετες γραμμές, σχηματίζοντας ένα ορθογώνιο το οποίο στις κορυφές του να έχει βασικά τετράγωνα, ίσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο τετράγωνο (i_0, j_0) από το οποίο και ξεκινήσαμε. Αποδεικνύεται, τότε, ότι υπάρχει ακριβώς μια επιλογή τετραγώνων τέτοια ώστε να ικανοποεί τέτοια επιλογή βασικών τετραγώνων. Θέτουμε διαδοχικά $+$ και $-$ σε καθένα από αυτά τα τετράγωνα ξεκινώντας με $+$ από το τετράγωνο (i_0, j_0), από το οποίο και ξεκινήσαμε. Οι τιμές τη νέας βασικής εφικτής λύσης είναι

$$\begin{aligned} x'_{ij} &= \tilde{x}_{ij} + \theta_0 \text{ στα τετράγωνα που έχουν } + \\ x'_{ij} &= \tilde{x}_{ij} - \theta_0 \text{ στα τετράγωνα που έχουν } - \\ x'_{ij} &= \tilde{x}_{ij} \text{ στα υπόλοιπα τετράγωνα} \end{aligned}$$

όπου

$$\theta_0 = \tilde{x}_{i_1 j_1} = min\{\tilde{x}_{ij} : (i,j) \text{ τετράγωνα που έχουν } -\}.$$

Το αντίστοιχο συνολικό κόστος μεταφοράς είναι $R_1 = R_0 - \theta_0 \delta_{i_0 j_0}$, όπου R_0 είναι το συνολικό κόστος μεταφοράς που αντιστοιχεί στην λύση $\tilde{x}_{ij}$, αναλυτικά $R_0 = \sum_{i,j} \tilde{x}_{ij} c_{ij}$.

Παράδειγμα 5 Συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος.

$u \backslash v$	4	7	5	
0	-4 8 *0*	7 *40*	1 4 *0*	~~40~~
-3	-4 5 *0*	4 + *10*	2 - *20*	~~30~~
2	6 *10*	9 - *10*	2 5 + *0*	~~20~~
	~~10~~	~~60~~	~~20~~	

Παρατηρούμε ότι το μοναδικό ορθογώνιο που σχηματίζεται με κορυφές σε βασικά τετράγωνα είναι αυτό με κορυφές $(3,3) \to (3,2) \to (2,2) \to (2,3)$. *Τότε σύμφωνα με την θεωρία υπολογίζουμε το* $\theta_0 = min\{\tilde{x}_{ij} : (i,j)$ *τετράγωνα που έχουν* $-\} = min\{\tilde{x}_{23}, \tilde{x}_{32}\} = min\{20, 10\}$.

Στη συνέχεια στα τετράγωνα με + προσθέτουμε την ποσότητα $\theta_0 = 10$ που υπολογίσαμε, ενώ στα τετράγωνα με − αφαιρούμε το $\theta_0 = 10$, τα υπόλοιπα τετράγωνα παραμένουν ως έχουν. Συνεπώς

$u \backslash v$				
	^{8} 0	^{7} 40	^{4} 0	$\cancel{40}$
	^{5} 0	^{4} 20	^{2} 10	$\cancel{30}$
	^{6} 10	^{9} 0	^{5} 10	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

5. Επιστρέφουμε στο βήμα 2.

Παράδειγμα 6 Συνέχεια προηγούμενου παραδείγματος. *Θα ελέγξουμε αν η λύση που έχουμε βρεί είναι άριστη υπολογίζοντας εκ νεου τα δυναμικά u_i και v_j και τις διαφορές δ_{ij}. Έχουμε*

$u \backslash v$	6	7	5	
0	^{8} 0	^{7} 40	^{4} 0	$\cancel{40}$
-3	^{5} 0	^{4} 20	^{2} 10	$\cancel{30}$
0	^{6} 10	^{9} 0	^{5} 10	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

$u \backslash v$	6	7	5	
0	-2 / ^{8} 0	^{7} 40	1 / ^{4} 0	$\cancel{40}$
-3	-2 / ^{5} 0	^{4} 20	^{2} 10	$\cancel{30}$
0	^{6} 10	-2 / ^{9} 0	^{5} 10	$\cancel{20}$
	$\cancel{10}$	$\cancel{60}$	$\cancel{20}$	

Παρατηρούμε ότι υπάρχει διαφορά δ_{ij} θετική και άρα η λύση που έχουμε βρεί δεν είναι άριστη. Συνεχίζουμε όπως ορίζεται από τον αλγόριθμο στο βήμα 4.

$u \backslash v$	6	7	5	
0	-2 / 8 *0*	7 − *40*	1 / 4 + *0*	~~40~~
-3	-2 / 5 *0*	4 + *20*	2 − *10*	~~30~~
0	6 *10*	-2 / 9 *0*	5 *10*	~~20~~
	~~10~~	~~60~~	~~20~~	

$u \backslash v$				
	8 *0*	7 *30*	4 *10*	~~40~~
	5 *0*	4 *30*	2 *0*	~~30~~
	6 *10*	9 *0*	5 *10*	~~20~~
	~~10~~	~~60~~	~~20~~	

$u \backslash v$	5	7	4	
0	8 *0*	7 *30*	4 *10*	~~40~~
-3	5 *0*	4 *30*	2 *0*	~~30~~
1	6 *10*	9 *0*	5 *10*	~~20~~
	~~10~~	~~60~~	~~20~~	

$u \backslash v$	5	7	4	
0	-3 / 8 *0*	7 *30*	4 *10*	~~40~~
-3	-3 / 5 *0*	4 *30*	-1 / 2 *0*	~~30~~
1	6 *10*	-1 / 9 *0*	5 *10*	~~20~~
	~~10~~	~~60~~	~~20~~	

Στο τελευταίο tableau παρατηρούμε πως όλες οι διαφορές είναι γνησιώς αρνητικές και άρα η λύση που έχει προκύψει είναι άριστη και μάλιστα μοναδική.

Παρατήρηση 6 *Αν στο tableau που δίνει την άριστη λύση, υπάρχει μη βασικό τετράγωνο με διαφορά $\delta_{ij} = 0$ αυτό σημαίνει ότι υπάρχει εναλλακτική άριστη λύση που υπολογίζεται κάνοντας βασικό το τετράγωνο αυτό, δηλαδή σχηματίζουμε τετράγωνο με κορυφές βασικά τετράγωνα ξεκινώντας από το τετράγωνο με την μηδενική διαφορά.*

2.3 Εκφυλισμένες λύσεις

Αν στο πρόβλημα μεταφοράς υπάρχει γνήσιο υποσύνολο από $p < m$, σταθμούς παραγωγής με συνολική παραγωγή όση και η συνολική ζήτηση σε $q < n$, σταθμούς προορισμού, τότε υπάρχουν εκφυλισμένες λύσεις. Μπορεί σε οποιοδήποτε σημείο των πράξεων μας να προκύψει εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση, είτε εξαρχής με την μέθοδο ελάχιστου στοιχείου γιατί μηδενίστηκε ταυτόχρονα και γραμμή και στήλη, είτε κατά την εφαρμογή του αλγόριθμου επίλυσης του προβλήματος μεταφοράς. Σε κάθε περίπτωση αντιμετωπίζονται τοποθετώντας αστερίσκους σε τετράγωνα με 0 για να τα αντιμετωπίζουμε ως βασικά τετράγωνα. Η επίλογη του μηδενικού τετραγώνου που θα γίνει βασικό είναι αυθαίρετη αν και προτείνεται να επιλέγεται αυτό με το μικρότερο κόστος. Αν θέλουμε να αποφύγουμε την εμφάνιση των μηδενικών βασικών τετραγώνων κατά την εφαρμογή του αλγόριθμου μπορούμε να ακολουθήσουμε την μέθοδο της διαταραχής.

Δημιουργούμε ένα νεο πρόβλημα μεταφοράς θέτοντας

$$\alpha_i' = \alpha_i + \epsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{και} \quad \beta_j = \begin{cases} \beta_j, & j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \beta_n + m\epsilon, & j = n \end{cases}$$

όπου $\epsilon > 0$ αυθαίρετα μικρό. Λύνοντας το νεο πρόβλημα, για το οποίο δεν υπάρχουν εκφυλισμένες λύσεις, και θέτοντας στο τελικό tableau $\epsilon = 0$, πάιρνουμε την άριστη λύση του αρχικού προβλήματος.

2.4 Ασκήσεις–Λύσεις

2.4.1 Άσκηση 1^{η}

Μια εταιρία παράγει και διανέμει ένα προϊόν στους πελάτες της μέσω πραγγελιών. Για την τρέχουσα εβδομάδα έχει πάρει παραγγελίες από τους πελάτες 1, 2 και 3 για ποσότητες 180, 170 και 150 μονάδες προϊόντος, αντίστοιχα. Το προϊόν μπορεί να σταλεί στους πελάτες από δυο αποθήκες A και B που έχουν διαθέσιμες ποσότητες 200 μονάδες προϊόντος η κάθε μια. Το κόστος μεταφοράς από κάθε αποθήκη πρός κάθε πελάτη δίνεται στον παρακάτω πίνακα

	Πελάτης		
Αποθήκη	1	2	3
A	8	9	4
B	5	12	2

Αν μείνει αδιάθετο προϊόν στις αποθήκες έχει μηδενικό κόστος, ενώ το κόστος ανά μονάδα ελλείψεων για τους πελάτες 1, 2 και 3 είναι ίσο με 6, 6 και 5, αντίστοιχα.
Να βρεθεί ο τρόπος μεταφοράς των προϊόντων από τις αποθήκες στους πελάτες που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος.

Λύση
Παρατηρούμε ότι $\sum_{j=1}^{3} b_j = 180 + 170 + 150 = 500 > 400 = 200 + 200 = \sum_{i=1}^{2} a_i$, Δηλαδή η ζήτηση είναι μεγαλύτερη από την παραγωγή. Συνεπώς εισάγουμε υποθετικό σταθμό παραγωγής, έστω αποθήκη Γ με δυνατότητα παραγωγής $a_3 = 500 - 400 = 100$.

	1	2	3	
A	8	9	4	200
B	5	12	2	200
Γ	6	6	5	100
	180	170	150	

Συμπληρώνουμε τον πίνακα με την μέθοδο του ελάχιστου στοιχείου

	1	2	3		
A	8 30	9 170	4 0	~~200~~	~~170~~
B	5 50	12 0	2 150	~~200~~	~~50~~
Γ	6 100	6 0	5 0	~~100~~	
	~~180~~ ~~130~~ ~~30~~	~~170~~	~~150~~		

Παρατηρούμε ότι η βασική εφικτή λύση που έχει βρεθεί με την μέθοδο ελαχίστου στοιχείου είναι μη εκφυλισμένη καθώς έχει $m + n - 1 = 5$ θετικά στοιχεία. Το αντίστοιχο συνολικό κόστος είναι $R_0 = 30 \cdot 8 + 170 \cdot 9 + 50 \cdot 5 + 150 \cdot 2 + 100 \cdot 6 = 2920$. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο των δυναμικών θα ελέγξουμε αν η λύση που έχει προκύψει είναι άριστη.

$u \backslash v$	8	9	5	
0	8 - 30	9 170	1 / 4 + 0	~~200~~
−3	5 + 50	-6 / 12 0	2 - 150	~~200~~
−2	6 100	-1 / 6 0	-2 / 5 0	~~100~~
	~~180~~	~~170~~	~~150~~	

Εφόσον υπάρχουν θετικές διαφορές δ_{ij}, συγκεκριμένα $\delta_{13} = 1$, η παραπάνω λύση δεν είναι άριστη. Βρίσκουμε μια καλύτερη λύση κάνοντας βασική τη μεταβλητή που αντιστοιχεί στην θετική διαφορά, άρα κάνουμε βασικά την μεταβλητή x_{13}. Είναι $\theta_0 = min\{30, 150\} = 30$ και άρα η νέα βασική εφικτή λύση δίνεται από το επόμενο tableau.

$u \backslash v$	7	9	4	
0	-1 / 8 0	9 170	1 / 4 30	~~200~~
−2	5 80	-5 / 12 0	2 120	~~200~~
−1	6 100	-2 / 6 0	-2 / 5 0	~~100~~
	~~180~~	~~170~~	~~150~~	

Εφόσον $\delta_{ij} < 0$ για όλα τα μη βασικά τετράγωνα το τελευταίο tableau είναι το μοναδικό άριστο tableau σχεδίου μεταφοράς. Το συνολικό κόστος μεταφοράς είναι $R_1 = R_0 - \theta_0 \delta_{13} = 2920 - 30 \cdot 1 = 2890$.

Συνεπώς ο βέλτιστος τρόπος μεταφοράς των προϊόντων από τις αποθήκες είναι:

από την αποθήκη A θα μεταφερθούν ποσότητες 170 και 30 πρός τους πελάτες 2 και 3 αντίστοιχα.

από την αποθήκη B θα μεταφερθούν ποσότητες 80 και 120 πρός τους πελάτες 1 και 3 αντίστοιχα.

από την αποθήκη Γ θα μεταφερθεί ποσότητα 100 πρός τον πελάτη 1, δηλαδή ο πελάτης 1 θα παρουσιάσει έλλειψη 100 μονάδων προϊόντος.

2.4.2 Άσκηση 2$^{\eta}$

Μία τράπεζα έχει 3 γραφεία στα οποία γίνεται η επεξεργασία των επιταγών. Το γραφείο 1 μπορεί να διεκπεραιώσει 10.000 επιταγές την εβδομάδα, το γραφείο 2 9000 και το γραφείο 3 6.000. Η τράπεζα έχει 4 τύπους επιταγών: Προσωπικές(Π), Εμπορικές(Ε), Δημοσίου(Δμ) και Διεθνείς(Δθ). Κατά μέσο όρο ο εβδομαδιαίος αριθμός επιταγών προς διεκπεραίωση είναι 1000 διεθνείς και 8000 για καθένα από τους άλλους τρεις τύπους. Το κόστος διεκπεραίωσης ανά επιταγή εξαρτάται τόσο από το γραφείο όσο και από τον τύπο της επιταγής και δίνεται από τον παρακάτω πίνακα (σε λεπτά του ευρώ)

	Τύπος επιταγής			
Γραφείο	Προσωπική	Εμπορική	Δημοσίου	Διεθνής
1	25	12	14	38
2	29	15	9	37
3	26	18	12	40

Να βρεθεί με ποιο τρόπο πρέπει να γίνει η κατανομή των επιταγών στα γραφεία ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό εβδομαδιαίο κόστος διεκπεραίωσης.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $10000 + 9000 + 6000 = 1000 + 8000 + 8000 + 8000 = 25000$.

	Π	Ε	Δμ	Δθ	
1	25	12	14	38	10000
2	29	15	9	37	9000
3	26	18	12	40	6000
	8000	8000	8000	1000	

Συμπληρώνουμε τον πίνακα με την μέθοδο του ελάχιστου στοιχείου.

	Π	Ε	Δμ	Δθ		
1	^{25} 2000	^{12} 8000	^{14} 0	^{38} 0	~~10000~~	~~2000~~
2	^{29} 0*	^{15} 0	^{9} 8000	^{37} 1000	~~9000~~	~~1000~~
3	^{26} 6000	^{18} 0	^{12} 0	^{40} 0	~~6000~~	
	~~8000~~	~~8000~~	~~8000~~	~~1000~~		
	~~6000~~					

Παρατηρούμε ότι κατά τη συμπλήρωση του πίνακα μηδενίζεται ταυτόχρονα η αντίστοιχη γραμμή και στήλη. Για το λόγο αυτό η λύση που προκύπτει είναι εκφυλισμένη, δηλαδή έχει λιγότερες από $m+n-1=3+4-1=6$ βασικές μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή βάζουμε ένα αστερίσκο σε κάποιο από τα μηδενικά που δημιουργούνται όταν μηδενίσουμε τη γραμμή και τη στήλη (συνήθως προτιμούμε αυτό με το ελάχιστο κόστος).

Για τη λύση αυτή το συνολικό κόστος είναι $R_0 = 25\cdot 2000 + 12\cdot 8000 + 29\cdot 0 + 9\cdot 8000 + 37\cdot 1000 + 26\cdot 6000 = 411.000$λεπτά του ευρώ ή 4110 ευρώ. Θα ελέγξουμε με τη μέθοδο των δυναμικών αν η λύση αυτή είναι άριστη.

$u \backslash v$	25	12	5	33	
0	^{25} 2000	^{12} 8000	-9 / ^{14} 0	-5 / ^{38} 0	10000
4	^{29} 0*	1 / ^{15} 0	^{9} 8000	^{37} 1000	9000
1	^{26} 6000	-5 / ^{18} 0	-6 / ^{12} 0	-6 / ^{40} 0	6000
	8000	8000	8000	1000	

Η λύση αυτή δεν είναι άριστη αφού υπάρχει $\delta_{ij} > 0$ ($\delta_{22} = 1$). Έτσι η μεταβλητή x_{22} που αντιστοιχεί στη θετική διαφορά θα γίνει τώρα βασική.

$u \backslash v$	25	12	5	33	
0	+ ^{25} 2000	- ^{12} 8000	-9 / ^{14} 0	-5 / ^{38} 0	10000
4	- ^{29} 0*	1 / + ^{15} 0	^{9} 8000	^{37} 1000	9000
1	^{26} 6000	-5 / ^{18} 0	-6 / ^{12} 0	-6 / ^{40} 0	6000
	8000	8000	8000	1000	

Είναι $\theta_0 = \min\{0, 8000\} = 0$. Εφόσον η x_{22} έγινε τώρα βασική και είναι 0 η τιμή της, βάζουμε εκεί αστερίσκο και υπολογίζουμε και πάλι τα δυναμικά για να ελέγξουμε αν η λύση αυτή είναι άριστη.

u \ v	25	12	6	34	
0	25 2000	12 8000	-8 14 0	-4 38 0	10000
3	-1 29 0	15 0*	9 8000	37 1000	9000
1	26 6000	-5 18 0	-5 12 0	-5 40 0	6000
	8000	8000	8000	1000	

Αυτό το tableau είναι άριστο εφόσον όλα τα $\delta_{ij} < 0$. Σύμφωνα με αυτή, το πρώτο γραφείο θα διεκπεραιώσει 2000 Προσωπικές και 8000 Εμπορικές επιταγές, το δεύτερο γραφείο 8000 Δημοσίου και 1000 Διεθνείς ενώ το τρίτο γραφείο 6000 Προσωπικές. Το συνολικό κόστος, εφόσον $\theta_0 = 0$ δεν μεταβάλλεται και είναι ίσο με το R_0.

2.4.3 Άσκηση $3^η$

Ένας εκπαιδευτικός οργανισμός έχει σχολεία σε τρεις τοποθεσίες με δυναμικότητα μαθητών 200, 400 και 400 αντίστοιχα. Οι μαθητές προέρχονται από 4 διαφορετικές περιοχές. Συγκεκριμένα, 120 μαθητές προέρχονται από την περιοχή 1, 240 από την περιοχή 2, 450 από την περιοχή 3 και 190 από την περιοχή 4. Οι μαθητές μετακινούνται με λεωφορεία του οργανισμού. Το κόστος μεταφοράς ανά μαθητή από κάθε περιοχή σε κάθε σχολείο φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	Σχολείο		
Περιοχή	1	2	3
1	5	2	1
2	4	3	4
3	2	4	7
4	3	3	6

Να βρεθεί η κατανομή των μαθητών από κάθε περιοχή σε κάθε σχολείο έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $200 + 400 + 400 = 120 + 240 + 450 + 190 = 1000$.

	1	2	3	
1	^{5}	^{2}	^{1}	120
2	^{4}	^{3}	^{4}	240
3	^{2}	^{4}	^{7}	450
4	^{3}	^{3}	^{6}	190
	200	400	400	

Συμπληρώνουμε τον πίνακα με την μέθοδο του ελάχιστου στοιχείου.

	1	2	3		
1	(5) 0	(2) 0	(1) 120	~~120~~	
2	(4) 0	(3) 210	(4) 30	~~240~~	~~30~~
3	(2) 200	(4) 0	(7) 250	~~450~~	~~250~~
4	(3) 0	(3) 190	(6) 0	~~190~~	
	~~200~~	~~400~~	~~400~~		
		~~210~~	~~280~~		

Για τη λύση αυτή το συνολικό κόστος είναι $R_0 = 1{\cdot}120{+}3{\cdot}210{+}4{\cdot}30{+}2{\cdot}200{+}7{\cdot}250{+}3{\cdot}190 = 3590$. Ελέγχουμε με τη μέθοδο των δυναμικών αν η λύση αυτή είναι άριστη.

$u \backslash v$	-4	0	1	
0	[-9] (5) 0	[-2] (2) 0	(1) 120	120
3	[-5] (4) 0	(3) − 210	(4) + 30	240
6	(2) 200	[2] (4) + 0	(7) − 250	450
3	[-4] (3) 0	(3) 190	[-2] (6) 0	190
	200	400	400	

Η λύση αυτή δεν είναι άριστη αφού υπάρχει $\delta_{ij} > 0$ ($\delta_{32} = 2$). Είναι $\theta_0 = \min\{210, 250\} = 210$. Έτσι, συνεχίζουμε στο επόμενο tableau στο οποίο η μεταβλητή x_{32} γίνεται τώρα βασική.

$u \backslash v$	-4	-2	1	
0	[-9] (5) 0	[-4] (2) 0	(1) 120	120
3	[-5] (4) 0	[-2] (3) 0	(4) 240	240
6	(2) 200	(4) 210	(7) 40	450
5	[-4] (3) 0	(3) 190	[0] (6) 0	190
	200	400	400	

Η λύση είναι άριστη αφού όλα τα $\delta_{ij} \leq 0$. Το κόστος για αυτή τη λύση είναι $R_1 = R_0 - \delta_{32} \cdot \theta_0 = 3590 - 2 \cdot 210 = 3170$. Σύμφωνα με τη λύση 120 παιδιά της περιοχής 1 θα πάνε στο σχολείο 3, 210 παιδιά της περιοχής 2 θα πάνε στο σχολείο 2 και τα υπόλοιπα 30 στο σχολείο 3, 200 παιδιά από την περιοχή 3 θα πάνε στο σχολείο 1 και 250 στο σχολείο 3 ενώ και τα 190 παιδιά της περιοχής 4 θα πάνε στο σχολείο 2.

Επειδή υπάρχει ένα $\delta_{ij} = 0$ ($\delta_{43} = 0$) αυτό συνεπάγεται ότι υπάρχει εναλλακτική άριστη λύση η οποία υπολογίζεται κάνοντας βασική μεταβλητή αυτή για την οποία $\delta_{ij} = 0$. Στην περίπτωσή μας η μεταβλητή x_{43} θα γίνει τώρα βασική, ακολουθώντας διαδικασία ανάλογη της περίπτωσης που $\delta_{ij} > 0$, όπως φαίνεται στο παρακάτω tableau. Προφανώς αλλάζει ο τρόπος κατανομής των παιδιών στα σχολεία αλλά το κόστος μεταφοράς τους παραμένει το ίδιο με το R_1.

$u \backslash v$	-4	-2	1	
0	-9 ^{5} 0	-4 ^{2} 0	^{1} 120	120
3	-5 ^{4} 0	-2 ^{3} 0	^{4} 240	240
6	^{2} 200	+ ^{4} 210	- ^{7} 40	450
5	-4 ^{3} 0	- ^{3} 190	0 ^{6} + 0	190
	200	400	400	

	^{5} 0	^{2} 0	^{1} 120	120
	^{4} 0	^{3} 0	^{4} 240	240
	^{2} 200	^{4} 250	^{7} 0	450
	^{3} 0	^{3} 150	^{6} 40	190
	200	400	400	