Ασκήσεις Γραμμικού Προγραμματισμού

1.15 Παραγωγή φαρμάκων ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Κέρδος/kg
ϕ_1	0.2	0.3	0.4	0.1	30
ϕ_2	0.3	0.2	0.3	0.2	26
ϕ_3	0.4	0.3	0.2	0.1	28
	10	18	20	12	→ Διαθέσιμες ποσότητες

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3: Ανάγκες για παραγωγή 1kg

Στόχος: μεγιστοποίηση συνολικού κέρδους από παραγωγή ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3

Διαμόρφωση σε ΠΓΠ

- Έστω x_1, x_2, x_3 ποσότητες παραγωγής σε kg από τα ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 αντίστοιχα.
- $\max(30x_1 + 26x_2 + 28x_3)$ Κανονική μορφή: $\max(30x_1+26x_2+28x_3)$
- υπό τους περιορισμούς:

$$\left.\begin{array}{l} 0.2x_1+0.3x_2+0.4x_3 \le 16 \\ 0.3x_1+0.2x_2+0.3x_3 \le 18 \\ 0.4x_1+0.3x_2+0.2x_3 \le 20 \\ 0.1x_1+0.2x_2+0.1x_3 \le 12 \\ x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x_1+3x_2+4x_3+x_4 = 160 \\ 3x_1+2x_2+3x_3+x_5 = 180 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_6 = 200 \\ x_1+2x_2+x_3+x_7 = 120 \\ x_i \ge 0,\ i=1,2,\dots,7 \end{array}\right.$$

Εισάγω περιθώριες μεταβλητές x_4, x_5, x_6, x_7 και πολλαπλασιάζω με 10 για να διώξω τα δεκαδικά.

$I = [P_4\ P_5\ P_6\ P_7] = B$ → αρχική βελ. $x_0 = (0,0,0,160,180,200,120)^t$ με $z=0$.

			30	26	28	0	0	0	0	
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ
P_4	0	160	2	3	4	1	0	0	0	80
P_5	0	180	3	2	3	0	1	0	0	60
P_6	0	200	$\boxed{4}$	3	2	0	0	1	0	50
P_7	0	120	1	2	1	0	0	0	1	120
		0	-30	-26	-28	0	0	0	0	
P_4	0	60	0	$\frac{3}{2}$	3	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	20
P_5	0	30	0	$-\frac{1}{4}$	$\boxed{\frac{3}{2}}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	0	20
P_1	30	50	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0	100
P_7	0	70	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	1	140
		1500	0	$-\frac{7}{2}$	-13	0	0	$\frac{15}{2}$	0	

B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	θ
P_4	0	0	0	$\boxed{2}$	0	1	-2	1	0	0
P_3	28	20	0	$-\frac{1}{6}$	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	-
P_1	30	40	1	$\frac{5}{6}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	48
P_7	0	60	0	$\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	45
		1760	0	$-\frac{17}{3}$	0	0	$\frac{26}{3}$	1	0	
P_2	26	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	
P_3	28	20	0	0	1				0	
P_1	30	40	1	0	0				0	
P_7	0	60	0	0	0				1	
		1760	0	0	0	$\frac{17}{6}$	3	$\frac{23}{6}$	0	

$z_j - c_j \geq 0, \forall j$. Άρα κατέληξα στην άριστη λύση $x^* = (40, 0, 20, 0, 0, 0, 60)^t$ με $z^* = 1760$

ΘΕΜΑ! Έστω το ηγπ: $\min(x_1 - 2x_2 + 3x_3)$, υπό τους περιορισμούς:

$$\left.\begin{aligned} & x_2 - \frac{1}{2}x_3 \leq \frac{1}{2} \\ & -x_2 - 2x_4 \geq -8 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}\right\} (\Pi)$$

α) Να επιλυθεί με Simplex και να εξεταστεί αν υπάρχει εναλλακτική λύση

β) Να διατυπωθεί το δυϊκό και να βρεθεί η άριστη λύση του.

Κανονική μορφή $-\max(-x_1 + 2x_2 - 3x_3)$

$$\left.\begin{aligned} & x_2 - \frac{1}{2}x_3 + x_5 = \frac{1}{2} \\ & x_2 + 2x_4 + x_6 = 8 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 10 \\ & x_1, x_2, \dots, x_6 \geq 0 \end{aligned}\right\}$$

			-1	2	-3	0	0	0	
B	C_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_5	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	-
P_6	0	8	0	1	0	2	0	1	4
P_1	-1	10	1	-1	1	2	0	0	5
		-10	0	-1	2	-2	0	0	
P_5	0	$\frac{1}{2}$	0	$\boxed{1}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$
P_4	0	4	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	8
P_1	-1	2	1	-2	1	0	0	-1	-
		-2	0	0	2	0	0	1	-

Άρα έχω άριστη λύση την $x^* = (2, 0, 0, 4, \frac{1}{2}, 0)^t$ με $z^* = -(-2) = 2$. Παρατηρούμε ότι $z_2 - c_2 = 0$, άρα $\exists$ εναλλακτική άριστη λύση.

B	c_B	b	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	θ
P_2	2	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	
P_4	0	$\frac{15}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
P_1	-1	3	1	0	0	0	2	-1	
		-2	0	0	2	0	0	1	

Άρα $x_2^* = (3, \frac{1}{2}, 0, \frac{15}{4}, 0, 0)^t$ άριστη λύση με $z^* = 2$. Όλες οι άριστες λύσεις του πγπ γράφονται ως κυρτός συνδυασμός των x_1^*, x_2^*:
$x^* = \lambda x_1^* + (1-\lambda)x_2^*,\ \lambda \in [0,1]$

Το δυϊκό πγπ (Δ) του (Π) είναι: $\max(\frac{1}{2}w_1 - 8w_2 - 10w_3)$, υπό τους περιορισμούς

$$\begin{cases} -w_3 \le 1 \\ w_1 - w_2 + w_3 \le -2 \\ -\frac{1}{2}w_1 - w_3 \le 3 \\ -2w_2 - 2w_3 \le 0 \\ w_1 \le 0,\ w_2 \ge 0,\ w_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Μέγιστη τιμή του δυϊκού $w^* = z^* = 2$.
Άριστη λύση του (Δ) από το τελικό tableau simplex:
$w_j = (z_j - c_j) + c_j$, j αντιστοιχεί στις στήλες του I_3
$w_1 = (z_5 - c_5) + c_5 = 0$
$w_2 = (z_4 - c_4) + c_4 = 1$
$w_3 = (z_1 - c_1) + c_1 = -1$

121 $\max(-3x_1 + 12x_2)$

$$(\Pi) \begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 1 \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 6 \\ -x_1 + 3x_2 \le 0 \\ -x_1 + 6x_2 \le 12 \\ 4x_1 - 9x_2 \le 27 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Η άριστη λύση του (Π) είναι $x_1^* = 12$, $x_2^* = 4$. Να βρεθεί η άριστη λύση του δυϊκού.

$$(\Pi) \Rightarrow \begin{cases} \min(w_1 + 6w_2 + 12w_4 + 27w_5) \\ w_1 + 2w_2 - w_3 - w_4 + 4w_5 \ge -3 \\ -2w_1 - 3w_2 + 3w_3 + 6w_4 - 9w_5 \ge 12 \\ w_1, w_2 \le 0,\ w_3, w_4, w_5 \ge 0 \end{cases} (\Delta)$$

Για τις άριστες λύσεις x^*, w^* των (Π) και (Δ) αντίστοιχα ισχύει το θεώρημα συμπληρωματικότητας
$w_i^*(a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + \dots + a_{in}x_n^*) = 0 \to$ ο i περιορισμός του (Π)
$x_j^*(a_{1j}w_1^* + a_{2j}w_2^* + \dots + a_{mj}w_m^*) = 0 \to$ ο j περιορισμός του (Δ)
Αφού για το συγκεκριμένο πρόβλημα έχω $x_1^*, x_2^* > 0$, οι αντίστοιχοι περιορισμοί του (Δ) είναι ισότητες:
$w_1^* + 2w_2^* - w_3^* - w_4^* + 4w_5^* = -3$
$-2w_1^* - 3w_2^* + 3w_3^* + 6w_4^* - 9w_5^* = 12$
Επίσης αφού η λύση x^* δεν κάνει ισότητες τους περιορισμούς 1, 2 και 5 του (Π), έχουμε $w_1^* = w_2^* = w_5^* = 0$. Άρα προκύπτει αμέσως ότι η άριστη λύση του δυϊκού είναι $w_3^* = 2$, $w_4^* = 1$.
Η άριστη τιμή των α.σ. των 2 προβλημάτων είναι $z^* = -3 \cdot 12 + 12 \cdot 4 = 12$.

1) Εταιρεία διανέμει προϊόν σε πελάτες 1, 2, 3
με απαιτούμενες ποσότητες 400, 400, 200

2 αποθήκες $\begin{cases} A \to 360 \text{ διαθέσιμη ποσότητα} \\ B \to 340 \quad -//- \end{cases}$

Κόστη μεταφοράς:

	1	2	3
A	8	3	6
B	9	12	6

Αδιάθετο προϊόν στις αποθήκες: κόστος μηδέν

Κόστος ελλείψεων πελατών/μονάδα $\begin{cases} 4, \text{ πελάτης } 1 \\ 2, \quad -//- \quad 2 \\ 5, \quad -//- \quad 3 \end{cases}$

$a_1 = 360$	$b_1 = 400$
$a_2 = 340$	$b_2 = 400$
	$b_3 = 200$

700 < 1000 → έλλειμα στους πελάτες

Προσθέτουμε τεχνητή πηγή: $a_3 = 300 \Rightarrow m = 3, n = 3 \Rightarrow m+n-1 = 5$

	1	2	3	a_i
A	60 ^{8}	100 ^{5}	200 ^{6}	~~360~~ ~~260~~ 60
B	340 ^{9}	– ^{12}	– ^{6}	340
Τ	– ^{4}	300 ^{2}	– ^{5}	300
b_j	400	~~400~~ ~~100~~	~~200~~	1000

(A) Μέθοδος ελάχιστου στοιχείου:
Μη-εκφυλισμένη ΒΕΛ
(B) Μέθοδος δυναμικών
→ Προσθέτουμε στη φανταστική πηγή τα κόστη ελλείψεων

	$v_1 = 8$	$v_2 = 5$	$v_3 = 6$	a_i
$u_1 = 0$	$\boxed{0}$ + 60 ^{8}	$\boxed{0}$ 100 ^{5}	$\boxed{0}$ – 200 ^{6}	360
$u_2 = 1$	$\boxed{0}$ – 340 ^{9}	$\boxed{-6}$ ^{12}	$\boxed{1}$ + ^{6}	340
$u_3 = -3$	$\boxed{1}$ ^{4}	$\boxed{0}$ 300 ^{2}	$\boxed{-2}$ ^{5}	300
b_j	400	400	200	1000

$u_i, v_j,\ u_i + v_j = c_{ij},\ \forall x_{ij} > 0$

$d_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \leq 0,\ \forall ij$

$d_{23} = 1 > 0,\ d_{31} = 1 > 0 \Rightarrow$ μη-βέλτιστη λύση

↳ Επιλέγουμε αυθαίρετα αυτό και προσθέτω θ

$\theta = \min\{340, 200\} = 200$

	$v_1 = 8$	$v_2 = 5$	$v_3 = 5$	a_i
$u_1 = 0$	– 260 ^{8}	+ 100 ^{5}	$\boxed{-1}$ ^{6}	360
$u_2 = 1$	140 ^{9}	$\boxed{-6}$ ^{12}	200 ^{6}	340
$u_3 = -3$	$\boxed{1}$ + ^{4}	– 300 ^{2}	$\boxed{-3}$ ^{5}	300
b_j	400	400	200	1000

Παραμένει $d_{31} = 1 > 0$

$\theta = \min\{260, 300\} = 260$

	$v_1=7$	$v_2=5$	$v_3=4$	
$u_1=0$	-1 ⁸	⁵ 360	-5 ⁶	360
$u_2=2$	⁹ 140	-5 ¹²	⁶ 200	340
$u_3=-3$	⁴ 260	² 40	-4 ⁵	300
	400	400	200	1000

$\delta_{ij} \le 0,\ \forall i,j \Rightarrow$ βέλτιστη λύση

→ ελλείψεις (260 στον πελάτη 1 και 40 στον πελάτη 2)

Παρατηρήσεις: 1) Σε μια ΒΕΛ σε όλα τα βασικά τετράγωνα, δηλαδή αυτά με $x_{ij}>0$, βγαίνει $\delta_{ij}=0$.

2) Αν σε μια ΒΕΛ, $\delta_{ij}\le 0\ \forall i,j$ (δηλαδή βέλτιστη) και σε ένα μη-βασικό τετράγωνο ισχύει $\delta_{ij}=0$, τότε υπάρχουν εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις

3) Εκφυλισμένες λύσεις

	1	2	3	a_i
1	250	250		500
2			500	500
3	+3ε		200	200
b_j	250	250	700	1200 → 1200+3ε

$m=3, n=3 \Rightarrow m+n-1=5$

+ε Εκφυλισμένη ΒΕΛ

→ Υπάρχουν εξισορροπήσεις μεταξύ υποσυνόλων των πηγών και των προορισμών

αυθαίρετος μικρός θετικός αριθμός

Αντιμετωπίζεται με τη μέθοδο διαταραχής: Δηλαδή προσθέτω ε σε όλες τις πηγές και μόνο σε έναν προορισμό, ώστε να παραμένει το πρόβλημα ισορροπημένο.

Θα μπορούσαμε να προσθέσουμε σε όλους τους προορισμούς και μόνο μια πηγή ή κατ' αναλογία.

Πρόβλημα 2: Διαμερισμα αξίας 250.000.

Εξόφληση σε 4 μήνες
- 100.000
- 80.000
- 50.000
- 20.000

3 είδη καταθέσεων/ομολόγων:
- Προθεσμιακή: 150.000
- τραπεζικά ομόλογα: 40.000
- ιδιωτικά ομόλογα: 60.000

Ποινές προεξόφλησης/μήνα (€/1000€)

	1	2	3	4	
ΠΚ	25	20	15	10	150
ΤΟ	20	15	12	8	40
ΙΟ	20	10	8	5	60
	100	80	50	20	250 → ισορροπημένο

	$v_1=25$	$v_2=20$	$v_3=17$	$v_4=14$	a_i
$u_1=0$	25 100	− 20 50	$\boxed{2}$ 15 −	$\boxed{4}$ + 10 −	150
$u_2=-5$	$\boxed{0}$ 20 −	+ 15 30	− 12 10	$\boxed{1}$ 8 −	~~40~~ ~~30~~
$u_3=-9$	$\boxed{-4}$ 20 −	$\boxed{1}$ 10 −	+ 8 40	− 5 20	~~60~~ ~~40~~
b_j	100	~~80~~ 50	~~50~~ ~~10~~	~~20~~	250

$m=3, n=4 \Rightarrow m+n-1=6$

$d_{14}=4>0$: επιλέγω αυτό

$\theta=\min\{30,10,20\}=10$

Μονοπάτι με περισσότερα βήματα