Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 30º (09-06-2015)

Άσκηση 113

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Δείξτε ότι το $A=\{x\in\mathbb{R}: f \text{ συνεχής στο } x\}$ είναι σύνολο Borel.

Λύση

Θα δείξουμε ότι είναι G_δ-σύνολο. ($\Rightarrow$ Borel).

Ισχύει: $A=\bigcap_{m=1}^{\infty}\underbrace{\{x\in\mathbb{R}: \text{υπάρχει } \delta>0: \forall y,z\in(x-\delta,x+\delta)\ |f(y)-f(z)|<\tfrac{1}{m}\}}_{A_m \text{ (Θ.Δ.Ο. ανοιχτό)}}$

• Το A_m είναι ανοιχτό:

Έστω $x\in A_m$.

Υπάρχει $\delta>0$: $\forall y,z\in(x-\delta,x+\delta)$ $|f(y)-f(z)|<\frac{1}{m}$

Τότε, $(x-\delta,x+\delta)\subseteq A_m$ (έστω $u\in(x-\delta,x+\delta)$, υπάρχει $\delta'>0$: $(u-\delta',u+\delta')\subseteq(x-\delta,x+\delta)$. Τότε, αν $y,z\in(u-\delta',u+\delta')$ έχουμε $y,z\in(x-\delta,x+\delta)\Rightarrow|f(y)-f(z)|<\frac{1}{m}$. Άρα $u\in A_m$).

Άρα x εσωτ. σημείο του A_m $\Rightarrow$ A_m ανοιχτό.

• $A=\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m$:

Αν $x\in A$ και $m\in\mathbb{N}$, τότε αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta>0$: $\forall y\in(x-\delta,x+\delta)$

$$|f(y)-f(x)|<\frac{1}{2m}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\forall y,z\in(x-\delta,x+\delta)$ $|f(y)-f(z)|\le|f(y)-f(x)|+|f(x)-f(z)|<\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}=\frac{1}{m}$

Αν $x\in\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m$, τότε για τυχόν $\varepsilon>0$ βρίσκω m: $\frac{1}{m}<\varepsilon\Rightarrow$

$\xRightarrow{x\in A_m}$ βρίσκω $\delta>0$: $\forall y,z\in(x-\delta,x+\delta)$ $|f(y)-f(z)|<\frac{1}{m}<\varepsilon\Longrightarrow$

$\Rightarrow\forall y\in(x-\delta,x+\delta)$ $|f(y)-f(x)|<\frac{1}{m}<\varepsilon$. $x\in(x-\delta,x+\delta)$

$\square$

Άσκηση 1.18

Έστω $\{q_n, n\in\mathbb{N}\}$ αρίθμηση του $\mathbb{Q}\cap[0,1]$

Για κάθε $\varepsilon>0$ ορίζουμε:

$$A(\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},\ q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Θέτουμε $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A\left(\frac{1}{j}\right)$

(α) $\lambda(A(\varepsilon))\leq 2\varepsilon$

(β) Αν $\varepsilon<\frac{1}{2}$, τότε $[0,1]\setminus A(\varepsilon)\neq\emptyset$.

(γ) $A\subseteq[0,1]$, $\lambda(A)=0$. (δ_1) $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq A$ (δ_2) A υπεραριθμήσιμο.

Λύση

(α) $$\lambda(A(\varepsilon))\leq\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left(\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},\ q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\frac{\varepsilon}{2^n}=2\varepsilon.$$

(β) Έχουμε $$\lambda([0,1]\setminus A(\varepsilon))\geq\lambda([0,1])-\lambda(A(\varepsilon))\overset{(\alpha)}{\geq}1-2\varepsilon>0.$$

(γ) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε:

$$\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},\ q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\subseteq\left(-\frac{\varepsilon}{2^n},\ 1+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\subseteq\left(-\frac{\varepsilon}{2},\ 1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A(\varepsilon)\subseteq\left(-\frac{\varepsilon}{2},\ 1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Άρα, $A\subseteq A\left(\frac{1}{j}\right)\subseteq\left(-\frac{1}{2j},\ 1+\frac{1}{2j}\right)\ \forall j\in\mathbb{N}\Rightarrow$

$$\Rightarrow A\subseteq\bigcap_{j=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2j},\ 1+\frac{1}{2j}\right)=[0,1]$$

Επίσης, $\forall j$ $\lambda(A)\leq\lambda\left(A\left(\frac{1}{j}\right)\right)\leq\frac{2}{j}\xrightarrow[j\to\infty]{}0.$

(δ_1) Για κάθε $\varepsilon>0$ το $A(\varepsilon)$ περιέχει το $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ (έχει όλα τα q_n) $\Rightarrow A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A\left(\frac{1}{j}\right)\supseteq\mathbb{Q}\cap[0,1].$

(δ_2) Έστω ότι το $A=\{a_m: m\in\mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμο.

Αν θέσουμε $F_j=[0,1]\setminus A\left(\frac{1}{j}\right)$ και $H_m=\{a_m\}$, τότε αυτά είναι κλειστά, $\bigcup H_m\cup\left(\bigcup F_j\right)=A\cup\underbrace{\left([0,1]\setminus\bigcap A\left(\frac{1}{j}\right)\right)}_{[0,1]\setminus A}=[0,1]$

Το $[0,1]$ είναι πλήρες, άρα κάποιο H_m ή κάποιο F_j έχει μη κενό εσωτερικό.

Άτοπο: H_m μονοσύνολα

F_j δεν περιέχουν κανένα ρητό. □

<u>Άσκηση 2.43</u>

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, χωριστά συνεχής:

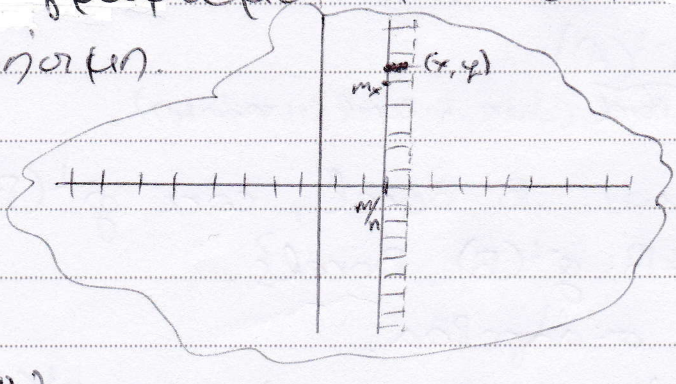
$\Rightarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}$, η $f_x(y)=f(x,y)$ $(f_x:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ είναι συνεχής.

$\Rightarrow$ $\forall y\in\mathbb{R}$, η $f^y(x)=f(x,y)$ $(f^y:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$ είναι συνεχής.

Δείξτε ότι η f είναι <u>μετρήσιμη</u>.

<u>Λύση</u>

<u>Ιδέα:</u> Θα γράψουμε $f \overset{κ.σ.}{=} \lim f^{(n)}$ όπου κάθε $f^{(n)}$ μετρήσιμη.



Έστω $n\in\mathbb{N}$.

$$\mathbb{R}^2=\bigcup_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}\right)\times\mathbb{R}$$

Ορίζουμε $f^{(n)}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ως εξής:

αν $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\exists m_x\in\mathbb{Z}: \frac{m_x}{n}\le x\le\frac{m_x+1}{n}$

Θέτουμε: $f^{(n)}(x,y)=f\left(\frac{m_x}{n},y\right)$

$\Rightarrow$ Κάθε $f^{(n)}$ είναι μετρήσιμη.

Έστω $a\in\mathbb{R}$

Τότε, $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: f^{(n)}(x,y)>a\}=\bigcup_{m=-\infty}^{+\infty}\left\{(x,y): \frac{m}{n}\le x<\frac{m+1}{n}, f\left(\frac{m}{n},y\right)>a\right\}$

$$=\bigcup_{m=-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left[\underbrace{\left[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}\right)}_{\text{ΔΙΑΣΤΗΜΑ}}\times\underbrace{\left\{y\in\mathbb{R}: f_{\frac{m}{n}}(y)>a\right\}}_{\text{ΑΝΟΙΧΤΟ}}\right]}_{\text{μετρήσιμο}}$$

• $f^{(n)}(x,y) \longrightarrow f(x,y)$

Έχουμε: $|f(x,y) - f^{(n)}(x,y)| = |f(x,y) - f(\frac{m_x}{n}, y)| = |f^y(x) - f^y(\frac{m}{n})| \to 0$.

Όμως: $|x - \frac{m_x}{n}| < \frac{1}{n}$, δηλαδή $\frac{m_x}{n} \to x$.

Αφού η f^y είναι συνεχής, $f^y(\frac{m_x}{n}) \to f^y(x)$. □

Άσκηση 2.37

(α) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη $\Rightarrow$ $\Rightarrow h \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη.

(β) Βρείτε $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή και $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη, ώστε η $h \circ g$ να μην είναι μετρήσιμη.

Λύση

(α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό.

$(h \circ g)^{-1}(A) = g^{-1}(\underbrace{h^{-1}(A)}_{\text{Borel}})$ (διότι h: Borel μετρήσιμη).

Αν g συνεχής και B Borel, τότε $g^{-1}(B)$ Borel:

Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} : g^{-1}(B) \text{ Borel}\}$.

Δείχνουμε ότι $\mathcal{A}$ σ-άλγεβρα.

Περιέχει τα ανοιχτά: αν B ανοιχτό, τότε $g^{-1}(B)$ ανοιχτό $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Borel, διότι g συνεχής.

(β) Χρειάζεται η συνάρτηση Cantor-Lebesgue.

Υπάρχει $f: [0,1] \to [0,1]$, αύξουσα, συνεχής, με $f(0)=0$, $f(1)=1$ και $f(C) = [0,1]$.

Την επεκτείνω: $f(x) = 1$, αν $x > 1$, $f(x) = 0$, αν $x < 0$.

Ορίζω $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x + f(x)$

Τότε $\lambda(g(C)) = 1$

Το $g(C)$ περιέχει ένα μη μετρήσιμο σύνολο A

και $A = g(B)$ για κάποιο $B \subseteq C$ $(\Rightarrow \lambda(B)=0 \Rightarrow B$ μετρ.$)$.

Ορίζουμε $h = \chi_B \rightsquigarrow$ μετρήσιμη, γιατί το B είναι μετρήσιμο. ορίζεται και είναι συνεχής γιατί g συνεχής, 1-1, επί.

Η $h \circ g^{-1}$ δεν είναι μετρήσιμη:

Έχουμε $\{x \in \mathbb{R} : \underset{\chi_B}{\overset{\|}{h}}(g^{-1}(x)) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : g^{-1}(x) \in B\} = g(B) = A$ όχι μετρήσιμο.

□

Άσκηση 2.51

$f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμη.

Δείξτε ότι $\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\,dx \to \lambda(\underbrace{\{f>0\}}_{A})$.

Λύση

$\boxed{\forall a > 0 \quad \sqrt[n]{a} \to 1}$

Εξετάζουμε την $f_n(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ ως προς την αυτή σημειακή σύγκλιση:

Αν $x \in A$ (δηλ. $f(x)>0$), τότε $\sqrt[n]{f(x)} \to 1 = \chi_A(x)$

Αν $x \in [0,1] \setminus A$ (δηλ. $f(x)=0$), τότε $\sqrt[n]{f(x)} = 0 \to 0 = \chi_A(x)$.

Δηλαδή, $f_n(x) = \sqrt[n]{f(x)} \longrightarrow \chi_A(x) \overset{??}{\Longrightarrow} \int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\,dx \to \int_0^1 \chi_A(x)\,dx = \lambda(A)$.

Για το ??:

Ισχύει $|f_n(x)| = \sqrt[n]{f(x)} \le \begin{cases} f(x), & \text{αν } f(x) > 1 \\ 1, & \text{αν } f(x) \le 1 \end{cases} \le \underbrace{f(x)+1}_{g(x)}$ και η g είναι ολοκληρώσιμη.

Κατόπιν, εφαρμόζουμε το ΘΚΣ. □

Άσκηση 2.22

$f_n, f \ge 0$ μετρήσιμες, $f_n \xrightarrow{\text{σ.π.}} f$ και $\int f_n \to \int f < \infty$.

Δείξτε ότι: για κάθε μετρήσιμο E, $\int_E f_n \to \int_E f$.

$a_n \to a$
$\liminf(a_n - b_n) =$
$= a - \limsup b_n$

Λύση

• Fatou: $\int_E f \leq \liminf \int_E f_n$

$\cancel{\int f} - \int_E f = \int_{E^c} f \leq \liminf \int_{E^c} f_n = \liminf\left(\underbrace{\int f_n}_{\to \int f} - \int_E f_n\right) =$

$= \cancel{\int f} - \limsup \int_E f_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \limsup \int_E f_n \leq \int_E f.$ $\square$

Άσκηση 2.39

(β) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμη, $\varepsilon_n \to 0^+$

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\underbrace{\{x : f_n(x) \geq \varepsilon_n\}}_{A_n}) < \infty$, τότε $f_n \to 0$ σ.π.

Λύση

Από Borel-Cantelli,

$\lambda(\underbrace{\limsup_n A_n}_{Z}) = 0$

Δείχνουμε ότι αν $x \notin Z$, τότε $f_n(x) \to 0$

$\Downarrow$

$x \notin \limsup A_n$

$\Updownarrow$

x ανήκει σε πεπ. το πλήθος $A_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \; x \notin A_n \Rightarrow \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq f_n(x) < \varepsilon_n \to 0$

$\Rightarrow f_n(x) \to 0.$ $\square$