Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 29ο (04-06-2015)

Άσκηση 4.25

$f \in L_1(\mathbb{T})$, $g \in L_\infty(\mathbb{T})$

Δείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\cdot g(x)\,dx = \hat{f}(0)\,\hat{g}(0)$.

[$\hat{f}(0)=$ η μέση τιμή της $f = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx$, $f \in L_1(\mathbb{T})$]

Λύση

(1) Βρίσκουμε δύο ακολουθίες τριγ. πολυωνύμων:

$$p_k \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f, \quad q_k \xrightarrow{\|\cdot\|_1} g.$$

Μετά γράφουμε:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\,dx - \hat{f}(0)\cdot\hat{g}(0)\right| \le \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}(f(x)-p_k(x))g(nx)\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\int p_k(x)g(nx)\,dx - \hat{p}_k(0)\hat{g}(0)\right| + \left|\hat{p}_k(0)\hat{g}(0) - \hat{f}(0)\hat{g}(0)\right| \le$$

$$\le \underbrace{\|g\|_\infty \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)-p_k(x)|\,dx}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0} + \left|\frac{1}{2\pi}\int p_k(x)g(nx)\,dx - \hat{p}_k(0)\hat{g}(0)\right| +$$

$$+ \underbrace{|\hat{g}(0)|\cdot \underbrace{|\hat{p}_k(0)-\hat{f}(0)|}_{\le \|p_k - f\|_1}}_{\xrightarrow{k\to\infty} 0}.$$

Έστω $\varepsilon>0$.

Βρίσκω k_0: $\forall k \ge k_0$ $\|g\|_\infty \cdot \|f-p_k\|_1 < \varepsilon/3$, $|\hat{g}(0)|\cdot\|p_k - f\|_1 < \varepsilon/3$.

Δηλαδή $\underbrace{\exists k_0 : \cancel{\forall k \ge k_0}}_{\exists \text{ τριγ. πολ}}$ $\forall n$ $\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\,dx - \hat{f}(0)\hat{g}(0)\right| < \frac{2\varepsilon}{3} +$

$$+\left|\frac{1}{2\pi}\int p_k(x)g(nx)\,dx - \hat{p}_k(0)\hat{g}(0)\right|$$

(2) Αρκεί να δείξουμε ότι αν $p(x) = \sum\limits_{s=-N}^{N} c_s e^{isx}$ τριγ. πολ.,

τότε $\frac{1}{2\pi}\int p(x)g(nx)\,dx \longrightarrow \hat{p}(0)\hat{g}(0)$.

Αρκεί (λόγω γραμμικότητας) ότι $\forall s \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{isx} g(nx)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_{s,0}\cdot\hat{g}(0)$$

$$\delta_{s,0} = \begin{cases} 0 & s\neq 0 \\ 1 & s=0. \end{cases}$$

• $\underline{s=0}$: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(nx)\,dx \underset{y=nx}{=\!=} \frac{1}{2\pi n}\int_{-n\pi}^{n\pi} g(y)\,dy =$

$$= \frac{1}{2\pi \cancel{n}}\cdot \cancel{n}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\,dy = \hat{g}(0)$$

($[-n\pi, n\pi]$ = ένωση n-διαδοχικών διαστημάτων 2π)

• $\underline{s\neq 0}$ Θέλω $I_n = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{isx} g(nx)\,dx \to 0$.

Βρίσκω τριγ. πολυώνυμο q: $\|g-q\|_1 < \varepsilon$.

$\underline{\text{Τότε}}$: $|I_n| \le \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} |e^{ikx}|\cdot |g(\underset{y}{nx}) - q(\underset{y}{nx})|\,\underset{dy}{dx} + \left|\frac{1}{2\pi}\int e^{isx} q(nx)\,dx\right|$

$$\le \|g-q\|_1 + \left|\frac{1}{2\pi}\int e^{isx} q(nx)\,dx\right| < 2\varepsilon$$

γιατί:

αν $q(x) = \sum_{r=-N}^{N} c_r e^{irx}$, τότε:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{isx} \sum_{r=-N}^{N} c_r e^{irnx}\,dx =$$

$$= \sum_{r=-N}^{N} c_r \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s+rn)x}\,dx}_{0}$$

{εκτός αν $s=-rn \overset{s\neq 0}{\Longrightarrow} n = \frac{|s|}{|r|} \le |s|$}

Για $r=0$ έχουμε $\int e^{isx}\,dx = 0$

Για $1 \le |r| \le N$ αν $n > |s|$ δεν μπορώ να έχω $s+rn=0$ γιατί θα είχα $n = \left|\frac{s}{r}\right| \le |s| \Rightarrow \int e^{i(s+rn)x}\,dx = 0$

□

$\underline{\text{Άσκηση 5.7}}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, περιοδική με περίοδο 1 και με περίοδο $0<a\notin\mathbb{Q}$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

$\underline{\text{Ιδέα}}$: Αν δείξουμε ότι $\underset{\hat{g}}{\cancel{\hat{f}}}(k) = 0$ $\forall k\neq 0$, τότε $\underset{g}{\cancel{f}}$ σταθερή.

Λύση

Ορίζουμε: $g(x)=f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$

Η g είναι 2π-περιοδική: $g(x+2\pi)=f\left(\frac{x+2\pi}{2\pi}\right)=f\left(\frac{x}{2\pi}+1\right)=f\left(\frac{x}{2\pi}\right)=$
$=g(x)$.

Επίσης, αφού η f έχει περίοδο a η g είναι $2\pi a$-περιοδική:
$g(x+2\pi a)=f\left(\frac{x+2\pi a}{2\pi}\right)=f\left(\frac{x}{2\pi}+a\right)=f\left(\frac{x}{2\pi}\right)=g(x)$.

$$\hat{g}(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-iux}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\underbrace{x+2\pi a}_{y})e^{-iux}dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+2\pi a}^{\pi+2\pi a}g(y)e^{-iu(y-2\pi a)}dy=e^{iu2\pi a}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)e^{-iuy}dy=$$
$$=e^{iu2\pi a}\hat{g}(u).$$

Όμως: ο $2u\pi a$ δεν είναι ποτέ ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π (αν είχα $2u\pi a=m2\pi$, $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=\frac{m}{u}\in\mathbb{Q}$)
$\Rightarrow e^{iu2\pi a}\neq 1$

Έχω $\hat{g}(u)=\underset{\neq 1}{e^{iu2\pi a}}\hat{g}(u)\Rightarrow\boxed{\hat{g}(u)=0}$. □

Άσκηση 5.10

Έστω $g\in L_1(\mathbb{T})$.

Ορίζουμε $T:L_1(\mathbb{T})\longrightarrow L_1(\mathbb{T})$ με $T(f)=f*g$.

- Ο T είναι γραμμικός: $T(\lambda f_1+f_2)=(\lambda f_1+f_2)*g=$
$=\lambda f_1*g+f_2*g=$
$=\lambda T(f_1)+T(f_2)$.

- Ο T είναι φραγμένος: $\underset{\|f*g\|_1}{\|T(f)\|_1}\leq M\|f\|_1$

Ξέρουμε ότι $\|f*g\|_1\leq\|f\|_1\cdot\|g\|_1$, άρα μπορώ να πάρω όταν $M=\|f\|_1$.

Δείξτε ότι: $\|T\|_{op} \overset{\text{def}}{=} \sup\{\|Tf\|_1 : \|f\|_1 \leq 1\} \overset{!}{=} \|g\|_1$

"Αν $\|Tf\|_1 \leq M \cdot \|f\|_1$ για όλες τις $f \in L_1(\mathbb{T})$, τότε $M \geq \|g\|_1$".

<u>Λύση</u>

Αρκεί να βρούμε μια ακολουθία (f_n) στον $L_1(\mathbb{T})$: $\|f_n\|_1 \leq 1$ και $\lim_n \|Tf_n\| \geq \|g\|_1$.

Παρατηρούμε ότι: $\forall n$ $\|F_n\|_1 = 1$ και $\|T(F_n)\|_1 = \|F_n * g\|_1 = \|\sigma_n(g)\|_1 \to \|g\|_1$, αφού $\|\sigma_n(g) - g\|_1 \to 0$ □.

<u>Άσκηση 5.13</u>

Έστω $(f_n) \subseteq L_1(\mathbb{T})$: $\forall g \in L_1(\mathbb{T})$ $\|g - f_n * g\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Δείξτε ότι: $\forall u \in \mathbb{Z}$ $\hat{f}_n(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

<u>Λύση</u>

[⊙ $|\hat{h}(u)| \leq \|h\|_1$ ⊙ $\widehat{u * v}(u) = \hat{u}(u)\hat{w}(u)$ ⊙ $g(x) = e^{iux} \Rightarrow \hat{g}(u) = 1$]

Για <u>κάθε</u> $n \in \mathbb{N}$ και $\forall g \in L_1(\mathbb{T})$

$$|(g - f_n * g)^{\wedge}(u)| \leq \|g - f_n * g\|_1 \to 0$$
$$\| $$
$$|\hat{g}(u) - \widehat{f_n * g}(u)|$$
$$\| $$
$$|\hat{g}(u) - \hat{f}_n(u)\hat{g}(u)|$$

Άρα $\forall g \in L_1(\mathbb{T})$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|\hat{g}(u)|\,|1 - \hat{f}_n(u)| \leq \|g - f_n * g\|_1 \to 0$$

Για $g(x) = e^{iux}$ έχουμε:

$$1 \cdot |1 - \hat{f}_n(u)| \longrightarrow 0 \Rightarrow \hat{f}_n(u) \to 1.$$ □.

Άσκηση 5.15

Έστω $f:[-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ αύξουσα και φραγμένη.
Δείξτε ότι $\exists M>0: \forall u\in\mathbb{Z}\ \ |u\hat{f}(u)|\le M$ (δηλ. $\{u\hat{f}(u)\}$ φραγμ.)

Λύση

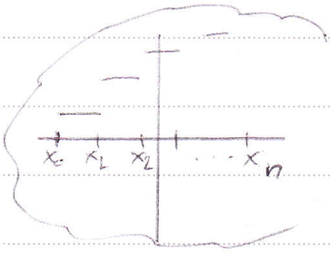
Υπάρχει ακολουθία (g_n) από αύξουσες κλιμακωτές συναρτήσεις $g_n:[-\pi,\pi)\to\mathbb{R}$ με $\|g_n\|_\infty\le\|f\|_\infty$ και $g_n \nearrow_{\sigma.\pi.} f$.

Τότε: $\hat{g}_n(u)\xrightarrow[\text{ΘΚΣ}]{} \hat{f}(u)$

Αν βρω $M>0: \forall u\ \forall n\ \ |\hat{g}_n(u)\cdot u|\le M$

$\downarrow$

$|\hat{f}(u)\cdot u|\le M.$



Έχουμε $g(x)=\sum_{s=0}^{n-1} t_s \chi_{[x_s,x_{s+1})}(x)$

Υποθέτουμε, επίσης, ότι $|g(x)|\le\|f\|_\infty$

Υπολογίζουμε το (για $u\neq 0$) $\hat{g}(u)=\sum_{s=0}^{n-1} t_s\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{[x_s,x_{s+1})}(x)\,e^{-iux}dx$

$$=\sum_{s=0}^{n-1} t_s\cdot \frac{1}{2\pi}\int_{x_s}^{x_{s+1}} e^{-iux}dx=$$

$$=\sum_{s=0}^{n-1} t_s\, \frac{e^{-iux_s}-e^{iux_{s+1}}}{2\pi i u}$$

Άρα, $|2\pi i u\, \hat{g}(u)|=\left|\sum_{s=0}^{n-1} t_s\left(e^{-iux_s}-e^{-iux_{s+1}}\right)\right|=$

$$=\left|t_0e^{-iux_0}+(t_1-t_0)e^{-iux_1}+\dots+(t_{n-1}-t_{n-2})e^{-iux_{n-1}}-t_{n-1}e^{-iux_n}\right|$$

$$\le|t_0|+|t_1-t_0|+\dots+|t_{n-1}-t_{n-2}|+|t_{n-1}|=$$

$$=|t_0|+(\cancel{t_1}-t_0+t_2-\cancel{t_1}+\dots+t_{n-1}-\cancel{t_{n-2}})+|t_{n-1}|\le$$

$$\le|t_0|+|t_0|+|t_{n-1}|+|t_{n-1}|\le 4\|f\|_\infty.$$ □

Άσκηση 5.19

$f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ περιττή, φραγμένη, $b_k(f)\geq 0$ $\forall k$.
Τότε, $\forall x$ $|s_n(f,x)|\leq 5\|f\|_\infty$

Λύση

⊙ $|s_n(f,x)|=|(f*D_n)(x)|\leq\|f\|_\infty\cdot\|D_n\|_1\leq C\cdot\log n\cdot\|f\|_\infty$, αν f φραγμένη.

⊙ $|\sigma_n(f,x)|=|(f*F_n)(x)|\leq\|f\|_\infty\cdot\|F_n\|_1$, αν f φραγμένη.

⊙ $s_n(f,x)-\sigma_{n+1}(f,x)=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikx}-\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\hat{f}(k)e^{ikx}=$

$$=\sum_{k=-n}^{n}\frac{|k|\cdot\hat{f}(k)e^{ikx}}{n+1}$$

⊙ $\hat{f}(k)=\frac{a_k+ib_k}{2}=\frac{i}{2}b_k$, $\hat{f}(-k)=\frac{a_k-ib_k}{2}=-\frac{i}{2}b_k$.

Γράφουμε: $|s_n(f,x)|\leq|s_n(f,x)-\sigma_{n+1}(f,x)|+|\sigma_{n+1}(f,x)|\leq$

$$\leq\|f\|_\infty+\sum_{k=-n}^{n}\frac{|k\hat{f}(k)|}{n+1}.$$

Μένει να δείξουμε ότι $\sum_{k=-n}^{n}\frac{|k\hat{f}(k)|}{n+1}\leq 4\|f\|_\infty$

Δηλαδή: $2\sum_{k=1}^{n}\frac{kb_k}{2(n+1)}\leq 4\|f\|_\infty\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{kb_k}{2(n+1)}\leq 2\|f\|_\infty$.

$$\|f\|_\infty\geq\left|\sigma_{2n+1}(f,x_n)\right|=\left|\sum_{k=-2n}^{2n}\left(1-\frac{|k|}{2n+1}\right)\hat{f}(k)e^{ikx_n}\right|=$$

$x_n=\frac{\pi}{4n}\in[0,\frac{\pi}{2})$

$\sin y\geq\frac{2}{\pi}y$

$$=\left|\sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{|k|}{2n+1}\right)\cdot\underbrace{\hat{f}(k)}_{\frac{ib_k}{2}}\cdot\underbrace{\left(e^{ikx_n}-e^{-ikx_n}\right)}_{2i\sin(kx_n)}\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{|k|}{2n+1}\right)\frac{ib_k}{2}\cdot 2i\sin\frac{k\pi}{4n}\right|$$

$$\geq\sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{|k|}{2n+1}\right)\frac{b_k}{2}\cdot\cancel{2}\,\frac{\cancel{2}}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{k\cancel{\pi}}{\cancel{4}n}\geq$$

$$\geq\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(1-\frac{|k|}{2n+1}\right)}_{\geq 1-\frac{n}{2n+1}>1/2}\frac{b_k}{2}\cdot\frac{k}{n}\geq\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{n}kb_k\qquad\square$$