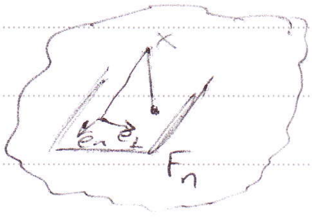
Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue

Μάθημα 27ο (28-05-2015)



Πρόταση

Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο, έστω $e_1, \dots, e_n$ ορθοκανονικά διανύσματα, $F_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$.
Τότε, $\forall x \in X$ $\text{dist}(x, F_n) = \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|$.

Απόδειξη

Δείχνουμε ότι για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ισχύει:

$$\|x - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k}_{\text{το τυχόν } y \in F_n}\| \geq \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|$$

Παρατήρηση: $\forall s$ $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \perp e_s$ γιατί $\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, e_s \rangle =$

$$= \langle x, e_s \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \underbrace{\langle e_k, e_s \rangle}_{\substack{= 0 \\ \text{εκτός αν} \\ k = s}}$$

$$= \langle x, e_s \rangle - \langle x, e_s \rangle = 0.$$

Άρα, $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \perp \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

Γράφουμε: $\|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\|^2 = \| \underbrace{x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k + \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k}_{\text{κάθετα}} \|^2 \overset{\text{Π.Θ.}}{=}$

$$= \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 + \underbrace{\|\sum_{k} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k\|^2}_{\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle - \lambda_k|^2} \geq$$

$$\geq \|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2.$$ και ισότητα έχουμε μόνο αν $\lambda_k = \langle x, e_k \rangle$ $\forall k = 1, \dots, n$. ∎

Θεώρημα

Έστω H χώρος Hilbert, (e_k) ορθοκανονική. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $\overline{\text{span}}\{e_k : k\ldots\} = H$

(β) Αν $x \in H$ και $x \perp e_k$ $\forall k$, τότε $x = 0$.

(γ) $\forall x \in H$, $x = \sum_k \langle x, e_k\rangle e_k$, δηλ. $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \longrightarrow x$.

(δ) (Parseval) $\forall x \in H$ $\|x\|^2 = \sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2$.

Απόδειξη

(α) ⇒ (β)

Αφού $x \perp e_k$ $\forall k$, έχουμε $x \perp y$ $\forall y \in \text{span}\{e_k, \ldots\} = M$
↳ πυκνός στον H.

$\exists y_n \in M : y_n \to x \Rightarrow \underbrace{\langle x, y_n\rangle}_{=0} \longrightarrow \langle x, x\rangle \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$.

(β) ⇒ (γ)

Δείχνουμε ότι $\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \|s_n(x)\|^2 =$
$= \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2$

Συνέπεια: $\forall n$ $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2 \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2}$ (Bessel).
↳ η σειρά συγκλίνει.

[Η $\{s_n(x)\}$ είναι βασική: αν $n > m$ τότε:
$\|s_n(x) - s_m(x)\|^2 = \|\sum_{k=m+1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$]

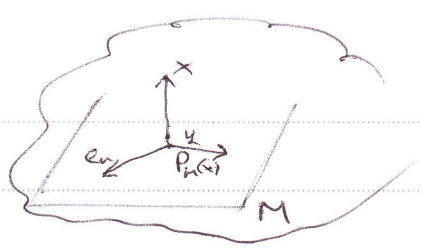
Ο H είναι πλήρης $\Rightarrow \exists y \in H : s_n(x) \to y$.

Όμως $\forall k$ $x - y \perp e_k \underset{(β)}{\Rightarrow} y = x$.

Έχουμε $\forall n > k$ $\left.\langle \underset{\downarrow \langle y, e_k\rangle}{s_n(x)}, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle\right\} \Rightarrow \boxed{\langle x - y, e_k\rangle = 0}$

(γ) ⇒ (δ)

$\|x\|^2 = \underset{\downarrow (γ)\ 0}{\|x - s_n(x)\|^2} + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|^2$.



(δ) ⇒ (α)

Έστω ότι $M=\overline{\text{span}\{e_n : \}} \neq H$.

Τότε $\exists x\in H$, $x\notin M \Rightarrow \underbrace{y = x - P_M(x)}_{\neq 0} \perp e_n \ \forall n$

Από την υπόθεση, το (δ),

$$0 \underset{y\neq 0}{<} \|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, e_n\rangle|^2 = 0.$$

άτοπο. ∎

$L_2(\mathbb{T})$

Βασικό πρόβλημα: $s_n(f,x) \longrightarrow f(x)$? (σε καθέναν από τους κλασικούς χώρους).

$C(\mathbb{T}) \subseteq L_2(\mathbb{T}) \subseteq L_1(\mathbb{T})$ — όχι

ΝΑΙ, ισχύει σ.π.
($L_p(\mathbb{T})$, $p>1$ ✓)

Αλλάζουμε το πρόβλημα:

Ισχύει $\|s_n(f)-f\|_p \longrightarrow 0 \quad \forall f\in L_p(\mathbb{T})$?

$$\|s_n(f)-f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |s_n(f,x)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

ΝΑΙ, για την $L_2(\mathbb{T})$

ΝΑΙ, για τον $L_p(\mathbb{T})$, $p>1$.

(α) Η $\{e^{ikx}, k\in\mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{T})$

(β) $s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \underbrace{\langle f, e_k\rangle}_{\hat f(k)} e_k$

Από το Θ. για τους χώρους Hilbert:

(1) $s_n(f) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ δηλ. $\|s_n(f)-f\|_2 \to 0$

(2) $\forall f\in L_2(\mathbb{T})$ $\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\langle f,e_k\rangle|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat f(k)|^2$.

Θεώρημα

Ο τελεστής $T: L_2(\mathbb{T}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$ με $T(f)=\{\hat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

Απόδειξη

▸ Ο T ορίζεται καλά:
$\forall f\in L_2(\mathbb{T})$ έχουμε: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 \overset{\text{Parseval}}{=\!=\!=} \|f\|_2^2 < \infty$.
άρα $T(f)\in \ell_2(\mathbb{Z})$.

▸ Επίσης, η Parseval δείχνει ότι $\forall f$ $\|T(f)\|_{\ell_2} = \|f\|_{L_2}$.
Η γραμμικότητα έπεται από την $\widehat{af+g}(k) = a\hat{f}(k)+\hat{g}(k) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall f,g$ $\|T(f)-T(g)\|_{\ell_2} = \|T(f-g)\|_{\ell_2} = \|f-g\|_{L_2}$.

▸ Ο T είναι επί:
Έστω $\{a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ με $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2<\infty$.
$\forall n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο:
$$s_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$$
Η $\{s_n\}$ είναι βασική στον $L_2(\mathbb{T})$:
αν $n>m$, τότε: $\|s_n-s_m\|_{L_2}^2 = \|\sum_{m<|k|\le n} a_k e^{ikx}\|^2 = \sum_{m<|k|\le n}|a_k|^2 \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$.
Ο $L_2(\mathbb{T})$ είναι πλήρης,
άρα $\exists f\in L_2(\mathbb{T})$: $s_n \to f \Rightarrow \forall k$ $\underbrace{\hat{s}_n(k)}_{\substack{\| \text{ αν } n\geq|k| \\ a_k}} \to \hat{f}(k)$

Άρα $\hat{f}(k)=a_k$ $\forall k$. ∎

Άσκηση: Αν $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f \Rightarrow \forall k$ $\hat{f}_n(k) \overset{\text{ομ}}{\to} \hat{f}(k)$

Λύση: $|\hat{f}_n(k)-\hat{f}(k)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f_n(x)-f(x)|\cdot|e^{-ikx}|\,dx = \|f_n-f\|_1 = \|f_n-f\|_2 \to 0$. □

Ασκήσεις

Άσκηση 1 (SOS)

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$, (β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

(Ⓐ Ανοιχτό για m περιττό: $\forall m \in \mathbb{N},\ m \geq 2\ \ \exists q_m \in \mathbb{Q}: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m} = \frac{\pi^m}{q_m}$)

(Ⓑ $\forall m \geq 2\ \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m} \notin \mathbb{Q}$. Ισχύει: 1970 Apéry: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \notin \mathbb{Q}$).

(Ισχύει: 2000+: $\exists$ άπειροι περιττοί m: $\sum \frac{1}{k^m}$ άρρητος).

Λύση

▸ Βρίσκω μια f για την οποία $f(x) = S(f,x)$ για κάποια (ή όλα τα) x.

Αν πάρω $f(x_0) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0)}_{\text{υπολογίζω το άθροισμα}}$

▸ Parseval: Παίρνω μια $f \in L_2(\mathbb{T})$

Ξέρω ότι $\underbrace{\sum |\hat{f}(k)|^2}_{\text{υπολογ. το άθροισμα.}} = \|f\|_2^2$

(α) $f(x) = |x|$ στο $[-\pi,\pi]$ (την επεκτείνω 2π-περιοδικά)

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Αν $k \neq 0$,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \underbrace{\cos kx}_{\left(\frac{\sin kx}{k}\right)'}\,dx = \frac{1}{\pi} \cancel{\frac{x \sin kx}{k}}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{k}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\cos kx}{k^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{\cos k\pi - 1}{\pi k^2} = \begin{cases} 0, & k \text{ άρτιος} \\ -\frac{2}{\pi k^2}, & k \text{ περιττός.} \end{cases}$$

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

Parseval: $\|f\|_2^2 = |\hat{f}(0)|^2 + 2\sum_{k=0}^{\infty} |\hat{f}(2k+1)|^2 \Rightarrow \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k+1)^4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{96} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots$$

Όμως $X=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}}_{X}$

Άρα $X=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}X \Rightarrow \frac{15}{16}X=\frac{\pi^4}{6\cdot 16} \Rightarrow \boxed{X=\frac{\pi^4}{90}}$

(β) $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x(\pi-x)$ στο $[0,\pi]$ και μετά περιττή επέκταση στο $[-\pi,0]$ και μετά 2π-περιοδική επέκταση.
Υπολογίζουμε $\hat{g}(0)=0$, $\hat{g}(k)=\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}$, $\|g\|_2^2=\frac{\pi^4}{30}$ και
Parseval $\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$ κλπ. ...

Άσκηση 4

$f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη ($\exists f'$ συνεχής)
Δείξτε ότι $\sqrt{n}\,\|f-s_n(f)\|_\infty\to 0$ ($\overset{\text{γνωστό}}{\Longrightarrow}$ $s_n(f)\overset{\text{ομ}}{\to} f$).

Λύση

▸ Ξέρω ότι $\forall x$ $s_n(f,x)\to f(x)$. (αυτό ισχύει σε κάθε x για το οποίο $\exists f'(x)$).
Άρα, $\forall x$ $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)e^{ikx}$

▸ Παίρνουμε το $|\underset{\text{το άθροισμα της σειράς}}{f(x)}-\underset{\text{μερ. αθρ.}}{s_n(f,x)}|=\left|\sum_{|k|>n}\hat{f}(k)e^{ikx}\right|=\left|\sum_{|k|>n}\frac{\hat{f'}(k)}{ik}e^{ikx}\right|$

$$\underset{C-S}{\le}\underbrace{\left(\sum_{|k|>n}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}}_{\text{διότι, } \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}\le\frac{C}{n}}\left(\sum_{|k|>n}|\hat{f'}(k)|^2\right)^{1/2}$$

$\downarrow n\to\infty$, $\|f'\|_2^2=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{f'}(k)|^2<\infty$,
0 άρα ουρά συγκλίνουσας.

Άρα, $\|s_n(f)-f\|_\infty\le\frac{C_1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{|k|>n}|\hat{f'}(k)|^2\right)^{1/2}\xrightarrow{\text{Parseval}}0$

Δηλαδή $\sqrt{n}\,\|s_n(f)-f\|_\infty\to 0$. □

Άσκηση 6 (ανισότητα του Würtinger)

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση, με $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0$ $(\Rightarrow \hat{f}(0)=0)$.

Δείξτε ότι:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx.$$

με ισότητα $\iff f(x)=a\cos x+b\sin x$.

Λύση

$AM=\|f\|_2^2 \overset{\text{Parseval}}{=} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(u)|^2 = \sum_{u\neq 0} |\hat{f}(u)|^2$ (γιατί $\hat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \overset{\text{υπόθ}}{=} 0$).

$\Delta M=\|f'\|_2^2 = |\hat{f'}(0)|^2+\sum_{u\neq 0} |\hat{f'}(u)|^2 = |\hat{f'}(0)|^2+\sum_{u\neq 0} u^2|\hat{f}(u)|^2 \geq \sum_{u\neq 0} u^2|\hat{f}(u)|^2$

$(\hat{f'}(u)=(iu)\hat{f}(u))$.

Αφού $|\hat{f}(u)|^2 \leq u^2|\hat{f}(u)|^2 \quad \forall u\neq 0 \Rightarrow \|f\|_2^2 \leq \sum_{u\neq 0} u^2|\hat{f}(u)|^2 \leq \|f'\|_2^2$. □