Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue

Μάθημα 22ο (14-05-2015)

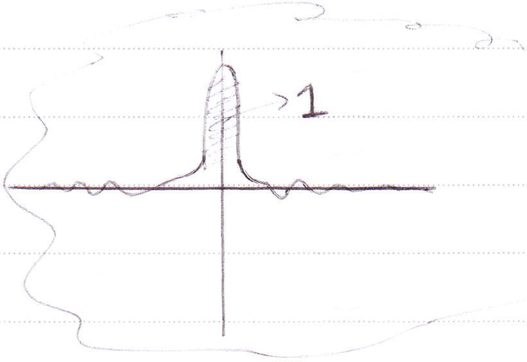
Καλός πυρήνας

$(K_\delta)_{\delta>0}$, $K_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

(α) $\forall \delta>0 \quad \int_{\mathbb{R}} K_\delta(y)\, d\lambda(y) = 1$

(β) $\exists M>0 : \forall \delta>0 \quad \int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \leq M$

(γ) $\forall \eta>0 \quad \lim\limits_{\delta\to 0} \int_{|y|>\eta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) = 0$



Προσέγγιση της μονάδας

$(K_\delta)_{\delta>0}$

(α) $\forall \delta>0 \quad \int_{\mathbb{R}} K_\delta(y)\, d\lambda(y) = 1$

(β) $\exists M>0 : \forall \delta>0 \quad$ (i) $\forall y\in\mathbb{R} \quad |K_\delta(y)| \leq \frac{M}{\delta}$

(ii) $\forall y\neq 0 \quad |K_\delta(y)| \leq \frac{M\delta}{y^2}$

Πρόταση

Κάθε προσέγγιση της μονάδας είναι καλός πυρήνας.

Θεώρημα 1

Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι φραγμένη και συνεχής σε κάποιο $x\in\mathbb{R}$ και αν $(K_\delta)_{\delta>0}$ είναι καλός πυρήνας, τότε: $|(f*K_\delta)(x) - f(x)| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$.

Θεώρημα 2

Έστω $f \in L_1(\mathbb{R})$.
Αν $(K_\delta)_{\delta>0}$ είναι προσέγγιση της μονάδας, τότε:

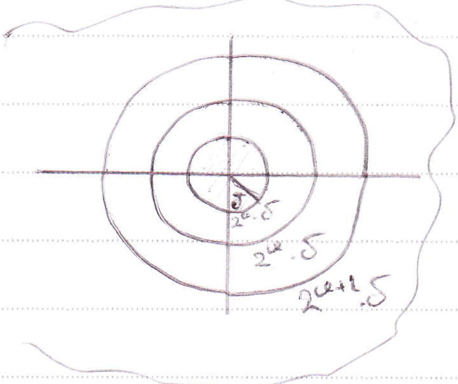
$$|(f*K_\delta)(x) - f(x)| \to 0$$

για κάθε $x \in Leb(f)$, δηλαδή σχεδόν παντού.

[$x\in Leb(f) \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{\delta\to 0} \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-y) - f(x)|\, dy = 0.$]

Απόδειξη

$$|(f*K_\delta)(x)-f(x)| \overset{(\alpha)}{=} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\cdot K_\delta(y)\,dy - \int_{\mathbb{R}} f(x)K_\delta(y)\,dy\right| \le$$



$$\le \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|\cdot|K_\delta(y)|\,dy =$$

$$= \int_{|y|\le\delta} |f(x-y)-f(x)|\cdot|K_\delta(y)|\,dy + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k\delta<|y|\le 2^{k+1}\delta} |f(x-y)-f(x)|\,|K_\delta(y)|\,dy$$

$$\le \int_{|y|\le\delta} |f(x-y)-f(x)|\,\frac{M}{\delta}\,dy + \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k\delta<|y|\le 2^{k+1}\delta} |f(x-y)-f(x)|\,\frac{M\delta}{y^2}\,dy$$

$$\le M\cdot\frac{1}{\delta}\int_{|y|\le\delta}|f(x-y)-f(x)|\,dy + M\delta\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+1}\delta}{(2^k\delta)^2}\cdot\frac{1}{2^{k+1}\delta}\int_{|y|\le 2^{k+1}\delta}|f(x-y)-f(x)|\,dy$$

Δηλαδή, αν ορίσουμε $A(r)=\frac{1}{r}\int_{|y|\le r}|f(x-y)-f(x)|\,dy$ έχουμε:

$$|(f*K_\delta)(x)-f(x)| \le M\cdot A(\delta) + 2M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}A(2^{k+1}\cdot\delta) \quad (*)$$

<u>Λήμμα (ιδιότητες της A)</u>

Αφού $x\in Leb(f)$, $\lim_{r\to 0}A(r)=0$

Επίσης, η A είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και, τελικά, φραγμένη στο $(0,+\infty)$

Απόδειξη

Για $r_0>0$, αρκεί να δείξουμε ότι η $r\cdot A(r)=\int_{|y|\le r}|f(x-y)-f(x)|\,dy$ είναι συνεχής στο r_0.

Αν $r_k\downarrow r_0$, τότε $r_kA(r_k)-r_0A(r_0)=\int_{r_0<|y|\le r_k}|f(x-y)-f(x)|\,dy$.

Η $y\mapsto|f(x-y)-f(x)|$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και αφού $\lambda(\{y: r_0<|y|\le r_k\})\to 0$, έχουμε: $\lim_{k\to\infty}\int_{r_0<|y|\le r_k}|f(x-y)-f(x)|\,dy=0$.

Δηλαδή $r_kA(r_k)\to r_0A(r_0)$

Έπεται ότι η A είναι φραγμένη π.χ στο $[0,1]$.

Για $r>1$, $A(r)=\frac{1}{r}\int_{|y|\le r}|f(x-y)-f(x)|\,dy \le \frac{1}{r}\int_{|y|\le r}|f(x-y)|\,dy+\frac{1}{r}|f(x)|\cdot 2r \le$

$$\le 1\cdot\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|\,dy+2|f(x)| = \|f\|_1+2|f(x)| \quad \blacksquare$$

Συνεχίζουμε από το ⊛:

Έστω $\varepsilon>0$.

$\exists N\in\mathbb{N}: \quad \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{4\|A\|_\infty M}$,

Οι συναρτήσεις $A(\delta), A(2\delta), A(4\delta), \ldots, A(2^{N+1}\delta) \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$

Άρα, υπάρχει $\delta_0>0$: $\forall\, 0<\delta<\delta_0$, $0\le A(2^j\delta) < \frac{\varepsilon}{4M(N+1)}$

Αν $0<\delta<\delta_0$, η ⊛ μας δίνει:

$$|(f*K_\delta)(x)-f(x)| \le M\cdot\frac{\varepsilon}{4M(N+1)} + 2M\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{\varepsilon}{4M(N+1)} + 2M\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\|A\|_\infty$$

$$\le \frac{\varepsilon}{4(N+1)} + N\frac{\varepsilon}{2(N+1)} + 2M\|A\|_\infty\frac{\varepsilon}{4M\|A\|_\infty} < \varepsilon.$$

Άρα, $\lim_{\delta\to 0}|(f*K_\delta)(x)-f(x)|=0$. ■

Θεώρημα 3

Έστω $f\in L_1(\mathbb{R})$.

Αν $(K_\delta)_{\delta>0}$ είναι καλός πυρήνας, τότε:

$$\|f*K_\delta - f\|_1 \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$$

Απόδειξη

$$\|f*K_\delta - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}}|(f*K_\delta)(x)-f(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)-f(x)|\cdot|K_\delta(y)|\,dy\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|\underbrace{f(x-y)}_{= f_{-y}(x)}-f(x)|\,dx\Big)K_\delta(y)\,dy.$$

Παρατήρηση: (1) $\forall y$, $\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)-f(x)|\,dx \le \int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|\,dx + \int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,dx = 2\|f\|_1$

(2) Αν $f_{-y}(x)=f(x-y)$, τότε $\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)-f(x)|\,dx = \|f_{-y}-f\|_1 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$

Έστω $\varepsilon>0$.

$\exists \eta>0: \forall\, 0<|y|<\eta$, $\|f_{-y}-f\|_1<\varepsilon$.

Γράφουμε: $\|f*K_\delta - f\|_1 = \int_{\mathbb{R}}\|f_{-y}-K_\delta\|_1\cdot|K_\delta(y)|\,dy \le$

$$\le \int_{|y|\le\eta}\underbrace{\|f_{-y}-f\|_1}_{<\varepsilon}\cdot|K_\delta(y)|\,dy + \int_{|y|>\eta}\|f_{-y}-f\|_1\cdot|K_\delta(y)|\,dy$$

$$\le \varepsilon \cdot \int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)|\,dy + 2\cdot\|f\|_1 \int_{|y|>\eta} |K_\delta(y)|\,dy \le$$

$$\le M\cdot\varepsilon + 2\|f\|_1 \int_{|y|>\eta}|K_\delta(y)|\,dy.$$

Αφήνοντας το $\delta\to 0$, έχουμε:
$\limsup_{\delta\to0}\|f*K_\delta - f\|_1 \le M\varepsilon + 0$ (γιατί $\int_{|y|>\eta}|K_\delta(y)|\,dy \xrightarrow[\delta\to0]{} 0$, από (γ)).
Το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, άρα $\|f*K_\delta-f\|_1\to 0$. ■

Ο πυρήνας του Fejér

Έστω $f\in L_1(\mathbb{T})$.
Έχουμε $S_m(f,x)=\sum_{k=-m}^{m} \hat f(k)e^{ikx}$.
Θεωρούμε τους Cesáro μέσους της $\{S_m(f,x)\}$:

$$\sigma_n = \frac{S_0(f,x)+S_1(f,x)+\dots+S_{n-1}(f,x)}{n} = \frac1n\sum_{m=0}^{n-1}S_m(f,x) = \frac1n\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=-m}^{m}\hat f(k)e^{ikx} \underset{|k|\le m\le n-1}{=} \frac1n\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\sum_{m=|k|}^{n-1}\hat f(k)e^{ikx} = \frac1n\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}(n-|k|)\hat f(k)e^{ikx}$$

Άσκηση (Απ. I): Αν $a_n\to a$, τότε: $\sigma_n=\frac{a_1+\dots+a_n}{n}\to a$. Το αντίστροφο δεν ισχύει, π.χ. $a_n=(-1)^n\not\to$ αλλά $\sigma_n\to 0$.

Δηλαδή, $\sigma_n(f,x)=\sum_{k=-m}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\hat f(k)e^{ikx}$ (1)
↳ (οι Cesáro μέσοι της σειράς Fourier της f).

Ξέρουμε ότι:
$S_m(f,x)=(f*D_m)(x)$.
Άρα, $\sigma(f,x)=\frac1n\sum_{m=0}^{n-1}(f*D_m)(x) \overset{\text{γραμμικότητα}}{\underset{\text{συνέλιξης}}{=}} \left(f*\frac{D_0+D_1+\dots+D_{n-1}}{n}\right)(x)$

Ο πυρήνας του Fejér είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο: $F_n(x)=\frac1n\sum_{m=0}^{n-1}D_m(x)=\frac1n\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=-m}^{m}e^{ikx}=\dots=\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ikx}$

Δηλαδή, αν $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} D_m(x)$, τότε:

(1) $F_n(x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ikx}$

(2) $\sigma_n(f,x) = (f*F_n)(x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\hat{f}(k)e^{ikx}$.

<u>Άλλη μορφή για την F_n:</u>

Ξέραμε ότι $D_m(x) = \frac{\sin(m+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$.

Άρα, $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin(m+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} =$

$$= \frac{1}{2n\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{m=0}^{n-1} 2\sin\frac{x}{2}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x =$$

$$= \frac{1}{2n\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{m=0}^{n-1}\left[\cos(mx)-\cos(m+1)x\right] =$$

$$= \frac{1}{2n\sin^2\frac{x}{2}}\left(1-\cos(nx)\right) = \frac{\cancel{2}\sin^2(\frac{nx}{2})}{\cancel{2}n\sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2.$$

<u>Πρόταση 1</u>

Ο πυρήνας του Fejér είναι θετικός.

$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$ και $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_m(x)dx$
$= 1$.

<u>Σημείωση</u>

Μπορούμε να βλέπουμε την $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ σαν "οικογένεια" $(K_{\delta_n})_{\delta_n\to 0}$, θέτοντας $\delta_n = \frac{1}{n}$, δηλαδή:

$$K_{1/n}(x) = \begin{cases} F_n(x), & -\pi \leq x < \pi \\ 0 & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Επίσης, τώρα $\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int|f|^p\right)^{1/p}$.

Είναι καλός πυρήνας η $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$; Είναι προσέγγιση της μονάδας;

(a) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)\,dx = 1$. ✓

(ΚΠ_β) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F_n(x)|dx \overset{F_n\geq 0}{=\!=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)dx \overset{(a)}{=} 1$ (άρα $\exists M>0:$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\|F_n\|_1 \leq M$).

(ΚΠ_γ) $(\text{ΠΜ}_{\beta_1}) + (\text{ΠΜ}_{\beta_2})$.

(ΠΜ_{β_1}) $|F_n(y)| \leq \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}|D_m(y)| \leq \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}(2m+1) = \frac{(n\cancel{-1})^2}{n} \cancel{\leq \frac{n^2}{n}} = n.$

(ΠΜ_{β_2}) $|F_n(y)| \leq \frac{M}{ny^2}$

Πράγματι, $|F_n(y)| = \frac{1}{n}\frac{|\sin(\frac{ny}{2})|^2}{|\sin\frac{y}{2}|^2} \leq \frac{1}{n|\sin\frac{y}{2}|^2} \leq \frac{\pi^2}{ny^2}$,

αφού: $0<y<\pi \Rightarrow 0<\frac{y}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{y}{2} \geq \frac{\cancel{2}}{\pi}\cdot\frac{y}{\cancel{2}}$.