Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 21ο (12-05-2015).

Συνέλιξη

Έστω $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$.
Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε $\varphi(x,y) = f(x-y)\cdot g(y)$ (ορισμένη στο $\mathbb{R}^{2d}$)

- Η $\varphi(x)$ μετρήσιμη (άσκηση).
- Επίσης $\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x,y)|\,d\lambda(x) = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,d\lambda(x) = |g(y)|\cdot \|f\|_1 < \infty$.

Άρα, $\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x,y)|\,d\lambda(x)\right) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\cdot \|f\|_1\, d\lambda(y) = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty \Rightarrow$
$\underset{\text{Tonelli}}{\Longrightarrow}$ η $|\varphi(x,y)| \in L_1(\mathbb{R}^{2d}) \Rightarrow \varphi \in L_1(\mathbb{R}^{2d})$.

Από Fubini, σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ ορίζεται το
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\cdot g(y)\,d\lambda(y)$$
και επιπλέον η $x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y)\,d\lambda(y)$ είναι ολοκληρώσιμη.

Ορισμός

Έστω $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$.
Η συνέλιξη των f και g είναι η συνάρτηση
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\cdot g(y)\,d\lambda(y).$$
Η $f * g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Ιδιότητες της συνέλιξης

(1) Αν $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$, τότε $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

Απόδειξη

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\cdot g(y)\,dy \right| dx \leq$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\cdot|g(y)|\,dx \right| dy = \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,dx \right) dy =$$
$$= \|f\|_1 \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\,dy = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \quad \blacksquare$$

(2) Αν $\|f_k - f\|_1 \to 0$ και $\|g_k - g\|_1 \to 0$ $(f_k, g_k, f, g \in L_1)$, τότε $\|f_k * g_k - f*g\| \to 0$.

Απόδειξη

Σημείωση: $[(f+h)*g](x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y)+h(x-y))\cdot g(y)\,dy =$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^d} h(x-y)g(y)\,dy =$$

$$= (f*g + h*g)(x).$$

Όμοια: $f*(g+h) = f*g + f*h$.

Γράφουμε:

$$\|f_k * g_k - f*g\|_1 = \|(f_k - f)*g_k + f*(g-g_k)\|_1 \underset{(1)}{\leq} \underbrace{\underbrace{\|f_k - f\|_1}_{\to 0} \cdot \|g_k\|_1 + \|f\|_1 \cdot \underbrace{\|g - g_k\|_1}_{\to 0}}_{\to 0}.$$

($\exists M>0$: $\forall k$ $\|g_k\|_1 < M$ γιατί η $\{g_k\}$ είναι συγκλίνουσα στον L_1). ∎

(3) Η συνέλιξη είναι:

(α) επιμεριστική: $(f+h)*g = f*g + h*g$, $f*(g+h) = f*g + f*h$.

(β) μεταθετική: $f*g = g*f$

$\left((f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy \overset{u=x-y}{\underset{y=x-u}{=\!=}} \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\,g(x-u)\,du = (g*f)(x)\right)$.

(γ) προσεταιριστική: $f*(g*h) = (f*g)*h$

(4) Έστω $1<p<\infty$.

Αν $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ και $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$, τότε:

$$f*g \in L_p(\mathbb{R}^d)$$

και

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_1.$$

Λήμμα

Αν $f\in L_p(\mathbb{R}^d)$, τότε $\|f\|_p = \underbrace{\max\left\{\left|\int f\cdot h\,d\lambda\right| : h\in L_q, \|h\|_q\le 1\right\}}_{J}$.

(Δηλαδή, αντί για $\|f\|_p = \left(\int |f|^p\,d\lambda\right)^{1/p}$, $\exists h\in L_q, \|h\|_q\le 1$: $\|f\|_p = \left|\int f\cdot h\right|$.)

Απόδειξη

Για κάθε $h\in L_q$, με $\|h\|_q\le 1$ έχουμε (από Hölder):

$$\left|\int f\cdot h\,d\lambda\right| \underset{\text{Hölder}}{\le} \|f\|_p \underbrace{\|h\|_q}_{\le 1} \le \|f\|_p \Rightarrow J\le \|f\|_p$$

Θεωρούμε την $h(x) = \dfrac{|f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p/q}}\, sign(f(x))$

Τότε:

$$\int |h(x)|^q = \int \frac{(|f(x)|^{p-1})^q}{\left(\|f\|_p^{p/q}\right)^q} = \int |f(x)|^{\overset{p}{(p-1)q}}\cdot\frac{1}{\|f\|_p^p} = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} = 1.$$

Άρα,

$$J\ge \int f\cdot h = \int \frac{f(x)|f(x)|^{p-1}\, sign f(x)}{\|f\|_p^{p/q}} = \frac{\int |f(x)|\cdot|f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p/q}} = \frac{\int|f(x)|^p}{\|f\|_p^{p/q}} =$$

$$= \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{p/q}} = \|f\|_p^{\overset{=1}{p-\frac{p}{q}}}. \qquad \blacksquare$$

Απόδειξη (του 4)

Θεωρούμε τυχαία $h\in L_p$ με $\|h\|_q\le 1$.

Φράσσουμε το:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}(f*g)(x)h(x)\,dx\right| \le \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\cdot|g(y)|\cdot h(x)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\cdot|h(x)|\,dx}_{\text{Hölder}}\Big)dy \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\Big[\underbrace{\left(\int|f(x-y)|^p dx\right)^{1/p}}_{\|f\|_p}\underbrace{\|h\|_q}_{\le 1}\Big]dy$$

$$\le \|f\|_p\int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\,dy = \|f\|_p\,\|g\|_1.$$

Άρα, (αφού η h ήταν τυχαία) $\underbrace{\sup_{\|h\|_q \le 1} \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f*g)(x) h(x) dx \right|}_{\substack{\| \text{ λήμμα} \\ \|f*g\|_p}} \le \|f\|_q \cdot \|g\|_1$ ∎

(5) Αν $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ και $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, τότε $f*g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ και $\|f*g\|_\infty \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Επίσης, η $f*g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $\lim_{|x|\to\infty} |(f*g)(x)| = 0$.

Απόδειξη

Για κάθε x,

$$|(f*g)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{f(x-y)}_{\in L_p} \cdot \underbrace{g(y)}_{\in L_q} dy \right| \underset{\text{Hölder}}{\le} \Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p dy}_{\substack{\| \forall x \\ \|f\|_p}} \Big)^{1/p} \|g\|_q.$$

Άρα, $\|f*g\|_\infty = \sup_x |(f*g)(x)| \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Έστω $\varepsilon > 0$.

Υπάρχουν u, v συνεχείς με συμπαγή φορέα, ώστε:

$$\|f-u\|_p < \varepsilon \quad \text{και} \quad \|g-v\|_q < \varepsilon.$$

Έχουμε: $\|f*g - u*v\|_\infty = \|(f-u)*g + u*(g-v)\|_\infty \le$

$$\le \|(f-u)*g\|_\infty + \|u*(g-v)\|_\infty \underset{(5)}{\le}$$

$$\le \|f-u\|_p \cdot \|g\|_q + \|u\|_p \cdot \|g-v\|_q <$$

$$< (\|g\|_q + \|u\|_p) \cdot \varepsilon$$

Αν υποθέσω ότι $\varepsilon < 1$, τότε $\|u\|_p \le \|u-f\|_p + \|f\|_p \le \varepsilon + \|f\|_p < 1 + \|f\|_p$.

Τελικά, $\|(f*g) - (u*v)\|_\infty \le \underbrace{(\|g\|_q + \|f\|_p + 1)}_{M} \cdot \varepsilon$

Υπάρχει $A > 0$: αν $|x| > A$, τότε $u(x) = 0$.

και $B > 0$: αν $|x| > B$, τότε $v(x) = 0$.

Έπεται ότι αν $|x|>A+B$, τότε $(u*v)(x)=0$.
(Πράγματι, $(u*v)(x)=\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{u(x-y)v(y)}_{=0}dy=0$) $\quad \forall y$ είτε $|x-y|>A$ ή $|y|>B$.

Τότε, αν $|x|>A+B$

$$|(f*g)(x)|=|(f*g)(x)-\underbrace{(u*v)(x)}_{0}|\leq \|f*g-u*v\|_\infty < M\varepsilon$$

Άρα, $\lim\limits_{|x|\to\infty}(f*g)(x)=0$.

Για την ομ. συνέχεια:

$$|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)|=\left|\int_{\mathbb{R}^d}(f(x+h-y)-f(x-y))\cdot g(y)\,dy\right|\leq$$

$$\leq\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+h-y)-f(x-y)|^p\,dy\right)^{1/p}\cdot\|g\|_q=$$

$$=\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(u+h)-f(u)|^p\,du\right)^{1/p}\|g\|_q$$

$$\downarrow \text{(Άσκηση)}.$$
$$0$$

[Άσκηση: Έστω $f\in L_p$. Ορίζουμε $f_h(x)=f(x+h)$. Τότε $\|f_h-f\|_p\xrightarrow[h\to 0]{}0$.] ■

Καλοί πυρήνες και προσεγγίσεις της μονάδας (στο $\mathbb{R}$).

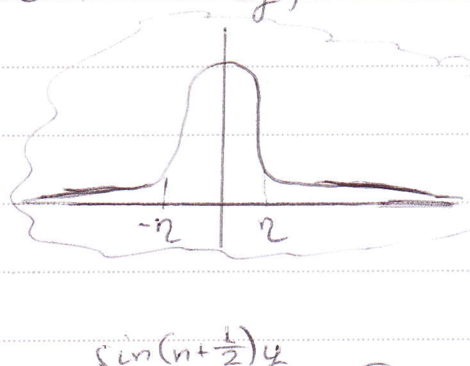
Ορισμός (καλός πυρήνας)

Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ συναρτήσεων, $K_\delta:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, λέγεται οικογένεια καλών πυρήνων, αν ισχύουν τα εξής:

(α) $\forall \delta>0 \quad \int_{\mathbb{R}} K_\delta(y)\,dy=1$

(β) $\exists M>0: \ \forall\delta>0 \quad \int_{\mathbb{R}}|K_\delta(y)|\,dy\leq M$

(γ) $\forall \eta>0$ ισχύει: $\int_{|y|>\eta}|K_\delta(y)|\,dy\xrightarrow[\delta\to 0]{}0$.



Παράδειγμα

Ο πυρήνας του Dirichlet $D_n(y)=\sum_{k=-n}^{n}e^{iky}=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})y}{\sin\frac{y}{2}}$, δεν είναι καλός πυρήνας (παραμετρίζοντας την $K_{1/n}=D_n$ $\quad K_{\delta_n},\ \delta_n\searrow 0$).
Ξέρουμε ότι (α) $\int D_n(y)\,dy=1$, αλλά (β) $\int|D_n(y)|\,dy\geq c\log n\to\infty$.

Θεώρημα

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και έστω ότι η f είναι συνεχής στο x.
Αν $(K_\delta)_{\delta>0}$ είναι ένας καλός πυρήνας, τότε:
$$|(f*K_\delta)(x)-f(x)| \xrightarrow[\delta\to 0]{} 0.$$

Απόδειξη

$$|(f*K_\delta)(x)-f(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-y)K_\delta(y)\,dy - f(x)\underbrace{\int_{\mathbb{R}}K_\delta(y)\,dy}_{1\ (a)}\right| =$$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x-y)-f(x))K_\delta(y)\,dy\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-f(x)|\cdot|K_\delta(y)|\,dy.$$

Έστω $\varepsilon>0$.
Υπάρχει $\eta>0$: αν $|y|\le\eta$, τότε $|f(x-y)-f(x)|<\varepsilon$.
Συνεχίζοντας τις ανισότητες, έχουμε:

$$|(f*K_\delta)(x)-f(x)| \le \int_{|y|\le\eta} \underbrace{|f(x-y)-f(x)|}_{<\varepsilon}\cdot|K_\delta(y)|\,dy + \int_{|y|>\eta} \underbrace{(|f(x-y)|+|f(x)|)}_{\le 2\|f\|_\infty}|K_\delta(y)|\,dy \le$$

$$\le \varepsilon\cdot\int_{|y|\le\eta}|K_\delta(y)|\,dy + 2\|f\|_\infty\int_{|y|>\eta}|K_\delta(y)|\,dy \le$$

$$\underset{(\beta)}{\le} M\varepsilon + 2\|f\|_\infty\int_{|y|>\eta=\eta(\varepsilon)}|K_\delta(y)|\,dy \xrightarrow[(\gamma)]{\delta\to 0^+} 0.$$

Άρα, $0\le \limsup_{\delta\to 0^+}|(f*K_\delta)(x)-f(x)|\le M\varepsilon$.
Το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, άρα $\exists \lim_{\delta\to 0}|(f*K_\delta)(x)-f(x)|=0$.

Ορισμός (προσέγγιση της μονάδας)

Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ συναρτήσεων $K_\delta:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ λέγεται προσέγγιση της μονάδας αν:

(a) $\forall\delta>0$ $\int_{\mathbb{R}}K_\delta(y)\,dy=1$

(β) $\exists M>0: \forall\delta>0$ (i) $\forall y\in\mathbb{R}$ $|K_\delta(y)|\le\frac{M}{\delta}$

(ii) $\forall y\neq 0$ $|K_\delta(y)|\le\frac{M\delta}{y^2}$

Σημείωση:

Έχουμε: $\frac{1}{\delta} \le \frac{\delta}{y^2}$ αν $|y| \le \delta$

Άρα, θα προτιμάμε το φράγμα $\frac{M}{\delta}$, όταν $|y| \le \delta$ και το φράγμα $\frac{M\delta}{y^2}$ όταν $|y| > \delta$.

Σύγκριση των ορισμών

Προσέγγιση της μονάδας $\Longrightarrow$ Καλός πυρήνας.

(α) $\forall \delta > 0 \ \int K_\delta(y)\,dy = 1$. (ΝΑΙ, είναι το (α) και στον ορισμό της προσέγγισης της μονάδας).

(β) Έστω $\delta > 0$.

Έχουμε $\int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)|\,dy = \int_{|y|\le\delta} |K_\delta(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta} |K_\delta(y)|\,dy \le$

$$\le \int_{-\delta}^{\delta} \frac{M}{\delta}\,dy + 2\int_{\delta}^{\infty} \frac{M\delta}{y^2}\,dy = \frac{M}{\cancel{\delta}} \cdot 2\cancel{\delta} + 2M\cancel{\delta} \cdot \frac{1}{\cancel{\delta}} =$$

$$= 4M.$$

(γ) Έστω $\eta > 0$.

Έχουμε: $\int_{|y|\ge\eta} |K_\delta(y)|\,dy \le \int_{|y|\ge\eta} \frac{M\delta}{y^2}\,dy = M\delta \cdot 2\int_{\eta}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{2M\delta}{\eta} \xrightarrow{\delta \to 0} 0.$