Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 19ο (06-05-2015).

Άσκηση 11

f μετρήσιμη, $f>0$ ~~σ.π.~~ το αγνοούμε

Αν $\int_E f = 0 \Rightarrow \lambda(E)=0$.

Λύση

$\left(\{f>0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ f > \frac{1}{n} \} \right.$ Βασική ιδέα$\left. \right)$.

$E_n = \{ x\in E : f(x) > \frac{1}{n} \}$

$E_n \nearrow E \quad (E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$

$\Downarrow$

$\lambda(E_n) \to \lambda(E)$.

Αν δείξω ότι $\lambda(E_n)=0$ $\forall n$, τότε $\lambda(E)=0$.

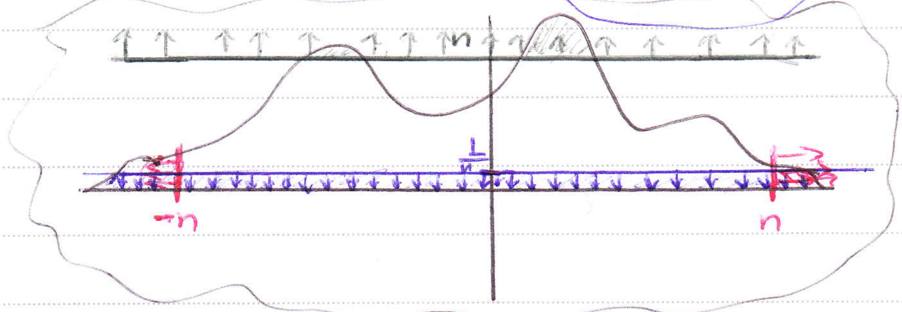
$\odot$ $0 = \int_E f = \int_{E_n} f + \underbrace{\int_{E\setminus E_n} f}_{f\geq 0} \geq \int_{E_n} f \geq 0 \Rightarrow \int_{E_n} f = 0$.

Όμως, $0 = \int_{E_n} f \geq \int_{E_n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\lambda(E_n) \Rightarrow \lambda(E_n)=0$. $\square$

Άσκηση 12

$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\geq \frac{1}{n}\}} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leq n\}} f$, $f\geq 0$, μετρήσιμη.

αν είναι ολοκλ. (Άσκ. 13).



Λύση

Θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

$\odot$ $\int_{-n}^{n} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x)\cdot \chi_{[-n,n]}(x)}_{g_n}\, d\lambda(x)$

• $\int_{\{f\geq \frac{1}{n}\}} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x)\chi_{E_n}(x)}_{h_n} \, d\lambda(x)$, $E_n = \{f \geq \frac{1}{n}\}$.

• $\int_{\{f\leq n\}} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x)\chi_{B_n}(x)}_{u_n(x)} \, d\lambda(x)$, $B_n = \{x : f(x) \leq n\}$

Έχουμε: $g_n \nearrow f \Rightarrow \int g_n \to \int f$
$h_n \nearrow f \Rightarrow \int h_n \to \int f$
$u_n \nearrow f \Rightarrow \int u_n \to \int f$.

Τώρα: $u_n(x) \to f(x) \quad \forall x$.
• Αν $f(x) < \infty \xrightarrow{\sigma.\pi.}$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}: f(x) \leq n_0$
Τότε, $\forall n \geq n_0 \quad f(x) \leq n_0 \leq n \Rightarrow x \in B_n \Rightarrow u_n(x) = f(x)\chi_{B_n}(x) =$
$= f(x) \to f(x)$.
• Αν $f(x) = \infty$, το $f(x) < \infty$ ισχύει σ.π. $\square$.

Άσκηση 15

$f \geq 0$, μετρήσιμη.
Η f είναι ολοκληρώσιμη $\Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k \lambda(\{f > 2^k\}) < \infty$.

Λύση

α' τρόπος (πολύ χρήσιμος τύπος):
• Αν $f \geq 0$ ολοκληρώσιμη, τότε:
$$\int f \, d\lambda = \int_0^\infty \lambda(f \geq t) \, dt. \qquad (1)$$
• Γενικότερα: $\int |f|^p d\lambda = \int_0^\infty p t^{p-1} \cdot \lambda(\{|f| \geq t\}) dt \quad (2)$.

Για το (1) γράφουμε:
$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{f(x)} 1 \, dt \right) d\lambda(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty}_{\text{ορθογώνιο}} \chi_{\{f(x)\geq t\}}(t) \, dt \cdot d\lambda(x) =$$
$$= \int_0^\infty \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f(x)\geq t\}}(x) \, d\lambda(x)}_{=1 \text{ για } x \text{ για τα οποία } f(x)\geq t.} \, dt = \int_0^\infty \lambda(\{x : f(x) \geq t\}) \, dt.$$

Για το (2) γράφουμε:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{|f(x)|} p t^{p-1} \, dt \right) d\lambda(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{\infty} p t^{p-1} \cdot \chi_{\{|f(x)| \ge t\}}(t,x) \, dt \right) d\lambda(x) =$$

$$= \int_0^{\infty} p t^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{|f| \ge t\}}(x,t) \, d\lambda(x) \right) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} p t^{p-1} \lambda(\{ |f| \ge t \}) \, dt .$$

Τώρα, για την (15):

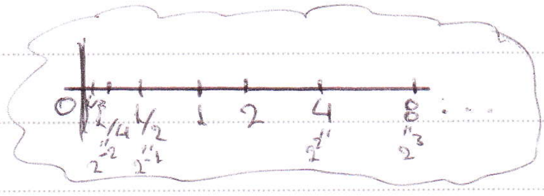
Η f είναι ολοκληρώσιμη $\Rightarrow \int f < \infty \Rightarrow \int_0^{\infty} \lambda(\{f \ge t\}) dt < \infty$.

Ισχύει:

$$\boxed{(2^{k+1} - 2^k) \cdot \lambda(\{f \ge 2^{k+1}\}) \le \int_{2^k}^{2^{k+1}} \underbrace{\lambda(\{f \ge t\})}_{\text{φθίνουσα}} dt} \le \lambda(\{f \ge 2^k\})(2^{k+1} - 2^k)$$

Άρα $\forall k$ $\quad \frac{1}{2} \cdot 2^{k+1} \lambda(\{f \ge 2^{k+1}\}) \le \int_{2^k}^{2^{k+1}} \lambda(\{f \ge t\}) \, dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{k+1} \cdot \lambda(\{f \ge 2^{k+1}\}) \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \lambda(\{f \ge t\}) dt =$$



$$= \int_{\cup [2^k, 2^{k+1}]} \lambda(\{f \ge t\}) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \lambda(\{f \ge t\}) dt .$$

Β' τρόπος:

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\underbrace{\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{2^k \le f \le 2^{k+1}\}}_{\text{ξένα}}} f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\{2^k \le f \le 2^{k+1}\}} f$$

Για κάθε k:

$$\int_{\{2^k \le f \le 2^{k+1}\}} f \le 2^{k+1} \cdot \lambda(\{2^k \le f \le 2^{k+1}\}) \le 2 \cdot 2^k \cdot \lambda(\{f \ge 2^k\}) \quad \square$$

Άσκηση 16

$f \geq 0$ ολοκληρώσιμη.

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει E → φραγμένο → πεπ. μέτρο → f φραγμένη στο E :

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Λύση

$$\int_{\{\frac{1}{n} \leq f \leq n\} \cap [-n,n]} f = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x) \cdot \chi_{\{f \geq \frac{1}{n}\}}(x) \cdot \chi_{\{f \leq n\}}(x) \cdot \chi_{[-n,n]}(x)}_{g_n(x)} \, d\lambda(x)$$

Εξηγούμε ότι $g_n \nearrow f$ σ.π.

Από Θ. Μονότονης Σύγκλισης: $\int g_n \to \int f$.

Άρα, $\exists N \in \mathbb{N}$: $\int g_N > \int f - \varepsilon$, όπου ⊙ $E_n = [-N,N] \cap \{f \geq \frac{1}{N}\} \cap \{f \leq N\}$

$\int g_N = \int_{E_N} f$.

⊙ $E_n \subseteq [-n,n] \Rightarrow E_n$ φραγμένο.

⊙ Η f είναι φραγμένη από N στο E_N. □

Άσκηση 18 (απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος).

Έστω $f \geq 0$, ολοκληρώσιμη.

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$: "αν E μετρήσιμο, $\lambda(E) < \delta$, τότε $\int_E f d\lambda < \varepsilon$".

Λύση

Ειδική περίπτωση: Έστω ότι $f(x) \leq M$ παντού.

Αν $\varepsilon > 0$ παίρνουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$.

Τότε, αν $\lambda(E) < \delta \Rightarrow \int_E f \leq \int_E M = M \cdot \lambda(E) < M \cdot \delta = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Γενική περίπτωση: Έστω $\varepsilon > 0$.

Μπορούμε να βρούμε σύνολο B και $M > 0$:

(i) $f \leq M$ στο B

(ii) $\int_B f > \int f - \frac{\varepsilon}{2}$

Τότε, για κάθε σύνολο E γράφουμε:

$$\int_E f = \int_{\substack{E\cap B \\ (f\le M)}} f + \int_{\substack{E\setminus B \\ \left(E\setminus B \subseteq B^c \\ \Downarrow \\ \int_{E\setminus B} f \le \int_{B^c} f = \int f - \int_B f\right)}} f \le \int_{E\cap B} M + \left(\int f - \int_B f\right) < M\cdot\lambda(E\cap B) + \frac{\varepsilon}{2} \le$$

$$\le M\cdot\lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

αν $M\cdot\lambda(E) < \varepsilon/2$, δηλαδή $\lambda(E) < \delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. □

Πορίσματα

(i) Αν f ολοκληρώσιμη, τότε $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$: "$\lambda(E)<\delta \Rightarrow \left|\int_E f\right|<\varepsilon$"

($|f|$ ολοκληρώσιμη $\xRightarrow{(18)}$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: "$\lambda(E)<\delta \Rightarrow \varepsilon > \int_E |f| \ge \left|\int_E f\right|$")

(ii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη $\Rightarrow x \mapsto \overbrace{\int_{-\infty}^{x} f\, d\lambda}^{=F(x)}$

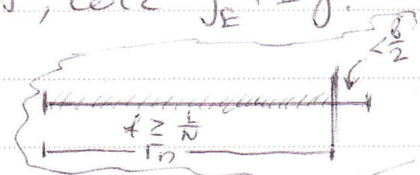
(Έστω $\varepsilon>0$. Παίρνω το δ από τα προηγούμενα $\Rightarrow$ συνεχής.
Αν $x>y$ και $|x-y|<\delta$, τότε $|F(x)-F(y)| = \left|\int_y^x f\right| = \left|\int_{[y,x]} f\right| < \varepsilon$, γιατί $\lambda([y,x])<\delta$.)

Άσκηση 49

$f>0$ στο $[0,1]$.

Δείξτε ότι:

$\forall \beta\in(0,1)\ \exists \gamma=\gamma(\beta)>0$: αν $E\subseteq[0,1]$ με $\lambda(E)\ge\beta$, τότε $\int_E f \ge \gamma$.



Λύση

• Ορίζουμε $\Gamma_n = \{f \ge \frac{1}{n}\} \nearrow [0,1] \Rightarrow \lambda(\Gamma_n)\to 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}: \lambda(\Gamma_N) > 1-\frac{\beta}{2}$

Έστω $E\subseteq[0,1]$ με $\lambda(E)\ge\beta$.

Γράφουμε $\int_E f = \int_{E\cap\Gamma_N} f + \underbrace{\int_{E\setminus\Gamma_n} f}_{\ge 0} \ge \int_{E\cap\Gamma_n} f \ge \frac{1}{N}\cdot\lambda(E\cap\Gamma_n)$.

Έχουμε $E\setminus\Gamma_n \subseteq [0,1]\setminus\Gamma_n \Rightarrow \lambda(E\setminus\Gamma_n) \le 1-\lambda(\Gamma_n) < \frac{\beta}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(E\cap\Gamma_n) = \lambda(E)-\lambda(E\setminus\Gamma_n) \ge \beta-\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{2}$

Θέτω $\gamma = \frac{\beta}{2n}$ και δείχνω το ζητούμενο. □

Άσκηση 28

f_n, f ολοκληρώσιμες και $\int |f_n - f| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Δείξτε ότι: (α) $\forall E \quad \int_E f_n \longrightarrow \int_E f$.

(β) $\int f_n^+ \longrightarrow \int f^+ \qquad (g^+ = \max\{g, 0\})$

Λύση

(α) $\left| \int_E f_n - \int_E f \right| \leq \int_E |f_n - f| \leq \int |f_n - f| \to 0$.

(β) Ξέρω ότι $\left| \int f_n - \int f \right| \leq \int |f_n - f| \to 0$. Άρα $\int f_n \to \int f$.

Γράφουμε: $f_n^+ = \frac{f_n + |f_n|}{2}$.

Επίσης:

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leq \int \big| |f_n| - |f| \big| \leq \int |f_n - f| \longrightarrow 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int |f_n| \to \int |f|.$$

Άρα, $\int f_n^+ = \frac{1}{2}\int f_n + \frac{1}{2}\int |f_n| \longrightarrow \frac{1}{2}\int f + \frac{1}{2}\int |f| = \int f^+$.

αλλιώς: $|f_n^+ - f^+| \leq |f_n - f| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left| \int f_n^+ - \int f^+ \right| \leq \int |f_n^+ - f^+| \leq \int |f_n - f| \to 0. \qquad \square$$

Άσκηση 31

f_n, f ολοκληρώσιμες και $f_n \to f$.

Τότε, $\int |f_n - f| \to 0 \iff \int |f_n| \to \int |f|$.

Λύση

($\Rightarrow$) $\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leq \int \big| |f_n| - |f| \big| \leq \int |f_n - f| \to 0$.

($\Leftarrow$) $f_n \to f$, $\int |f_n| \to \int |f|$ και f_n, f ολοκληρώσιμες.

$|f_n - f| \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$.

$\big| \underbrace{|f_n - f| - |f_n|}_{\text{κ.σ.}\downarrow\, 0 - |f| = -|f|} \big| \leq |f|$

Από Θ.Κ.Σ. $\int (|f_n - f| - |f_n|) \to -\int |f|$ και $\int |f_n| \to \int |f|$ $\overset{\oplus}{\Longrightarrow} \int |f_n - f| \to 0 = -\int |f| + \int |f|$. $\square$

Άσκηση 36

$E_1, \dots, E_n$ μετρήσιμα $\subseteq [0,1]$ με την εξής ιδιότητα:
"κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα E_i".
Τότε $\exists\, i \le n : \lambda(E_i) \ge \frac{k}{n}$.

Λύση

υπόθεση

"Το πλήθος των i για τα οποία $x \in E_i$" $= \boxed{\sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \ge k. \quad \forall x \in [0,1]}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sum \chi_{E_i} \ge \int_0^1 k \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \int \chi_{E_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i) \ge k.$$

Άρα, $n \cdot \max \lambda(E_i) \ge k \Rightarrow \max \lambda(E_i) \ge \frac{k}{n}$. □