Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 16º (29-04-2015)

Κεφάλαιο I (Μέτρο Lebesgue)

Άσκηση 1

(α) A φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}^d \Rightarrow \lambda^*(A) < \infty$

(β) Αν το A έχει εσ. σημείο, τότε $\lambda^*(A) > 0$.

Λύση

(α) $\exists a>0: \ A \subseteq (-a,a)^d \Rightarrow \lambda^*(A) \leq \lambda^*((-a,a)^d) = \lambda((-a,a)^d) = (2a)^d < \infty$.

(β) Έστω $x \in int(A)$.

$\exists \delta>0: \ \underbrace{Q(x,\delta)}_{\text{κύβος με κέντρο } x\text{, ακτίνα } \delta.} \subseteq A \Rightarrow \lambda^*(A) \geq \lambda^*(Q(x,\delta)) = \delta^d > 0$. □

Ερώτηση: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής

- $\|f\|_\infty \xrightarrow{} M = \max\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$
- $\|f\|_\infty = \min\{\underbrace{\gamma \geq 0 : \lambda(\{t \in [a,b] : |f(t)| > \gamma\}) = 0}_{T_f}\}$.

Απάντηση: $\forall \gamma > M$ το $\{t : |f(t)| > \gamma\} = \emptyset \to$ έχει λ-μέτρο 0.

Άρα $T_f \supseteq (M, \infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f\|_\infty = \min T_f \leq \inf (M, \infty) = M$.

Έστω ότι $\|f\|_\infty < M \Rightarrow \exists \gamma < M : \gamma \in T_f$.

Δηλαδή, $\lambda(\{t : |f(t)| > \gamma\}) = 0 \Rightarrow$ το $\{|f| > \gamma\}$ δεν έχει εσωτερικό σημείο, άτοπο:

Βρίσκουμε $t_0 \in [a,b] : |f(t_0)| = M > \gamma$.

Αφού η f είναι συνεχής στο t_0 $\exists \delta > 0$:

$\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq \{|f| > \gamma\}$

Ερώτηση 2: Έστω $Z \subseteq [0,1]$ με $\lambda(Z) = 0$.

Τότε, το $[0,1] \setminus Z$ είναι πυκνό στο $[0,1]$.

Απάντηση: Αν αυτό δεν ισχύει, τότε

υπάρχει $x \in [0,1]$: $x \notin [0,1] \setminus Z \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$: $(x-\delta, x+\delta) \cap ([0,1]\setminus Z) \overset{=\emptyset}{\Rightarrow} (x-\delta, x+\delta) \subseteq Z$.

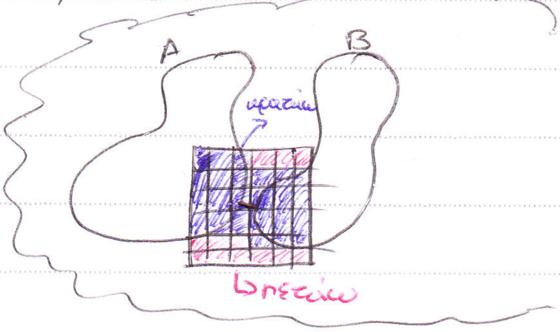
Άρα $\mathrm{int}(Z) \neq \emptyset \xrightarrow[(\beta)]{} \lambda(Z) > 0$, άτοπο.

Άσκηση 6

$A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\delta = \mathrm{dist}(A,B) = \inf\{|a-b| : a \in A, b \in B\} > 0$

(δηλ. $\forall a \in A \ \forall b \in B \ |a-b| \geq \delta > 0$).

Τότε, $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$.



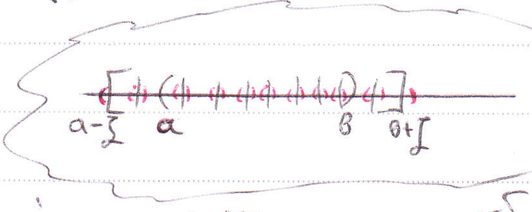
Λύση

$\leq$ $\lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$.

$\geq$ Αρκεί να δείξουμε: αν $A \cup B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, τότε:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} l(I_j)}_{\lambda^*(A\cup B)} \geq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$$

inf ως προς $\{I_j\}$.



Για κάθε j βρίσκουμε διαστήματα $I_{j,s}$ μήκους $< \frac{\delta}{2}$:

$$I_j \subseteq \bigcup_{s=1}^{m_j} I_{j,s}, \quad l(I_{j,s}) < \frac{\delta}{2} \quad \forall s$$

και $\sum_{s=1}^{m_j} l(I_{j,s}) < l(I_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}$.

Χωρίζω το $[a-\zeta, b+\zeta]$ σε m_s διαδοχικά κλειστά $K_{j,s}$ μήκους $< \frac{\delta}{3}$ και $\forall s$ βρίσκουμε ανοιχτό $I_{j,s} \supseteq K_{j,s}$: $l(I_{j,s}) < l(K_{j,s}) + \eta < \frac{\delta}{2}$

Τότε, $\bigcup I_{j,s} \supseteq \bigcup K_{j,s} = [a-\zeta, b+\zeta] \supseteq \underset{= I_j}{(a,b)}$

και $\sum l(I_{j,s}) < \sum l(K_{j,s}) + m_s \cdot \eta = l([a-\zeta, b+\zeta]) + m_s \eta =$

$= l((a,b)) + \underbrace{2\zeta + m_s \eta}_{< \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}}$

Θεωρούμε όλα τα $I_{j,s}$, $j=1,2,\dots$, $s=1,\dots,m_j$
Ένα $I_{j,s}$ δεν μπορεί να τέμνει και το A και το B: αν υπήρχε $x\in I_{j,s}\cap A$ και $y\in I_{j,s}\cap B$ τότε $dist(A,B)\le |x-y|\le \ell(I_{j,s})<\frac{\delta}{2}<\delta$.
Έχουμε: $A\cup B\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{s=1}^{m_j} I_{j,s}$.
Θεωρώ τα $I_{j,s}$ που καλύπτουν και τέμνουν το A:
$\bigcup_{I_{j,s}\cap A\neq\emptyset} I_{j,s}$ και $\bigcup_{I_{j,s}\cap B\neq\emptyset} I_{j,s}$, τα αντίστοιχα του B.

Τώρα, $A\cup B\subseteq \bigcup_{I_{j,s}\cap(A\cup B)\neq\emptyset} I_{j,s}$

Άρα:
$$\left.\begin{array}{l} A\subseteq \bigcup_{I_{j,s}\cap A\neq\emptyset} I_{j,s} \Rightarrow \lambda^*(A)\le \sum_{I_{j,s}\cap A\neq\emptyset}\ell(I_{j,s}) \\ B\subseteq \bigcup_{I_{j,s}\cap B\neq\emptyset} I_{j,s} \Rightarrow \lambda^*(B)\le \sum_{I_{j,s}\cap B\neq\emptyset}\ell(I_{j,s}) \end{array}\right\} \lambda^*(A)+\lambda^*(B)\le \sum+\sum\le \sum_j\sum_s \ell(I_{j,s})\le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}\left(\ell(I_j)+\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right)=\sum \ell(I_j)+\varepsilon. \quad \square$$

Άσκηση 10

(E_n) μετρήσιμα,
$$\begin{cases} \liminf E_n \overset{\text{ορ.}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k}_{B_n\uparrow}\Big) = \text{τα } x \text{ που ανήκουν σε όλα τελικά τα } E_n \\ \limsup E_n \overset{\text{ορ.}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k}_{\Gamma_n\downarrow}\Big) = \text{τα } x \text{ που ανήκουν σε άπειρα το πλήθος } E_n \end{cases}$$
είναι μετρήσιμα;

Λήμμα Borel-Cantelli

Αν $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E_n)<+\infty$, τότε $\lambda(\limsup E_n)=0$.
"Αν τα E_n είναι μικρά, $\exists Z:\lambda(Z)=0$ ώστε $\forall x\notin Z$, το x ανήκει σε πεπερασμένα το πλήθος E_n".

Απόδειξη λήμματος:

$\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$\limsup E_n \subseteq \Gamma_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$

$\Rightarrow \lambda(\limsup E_n) \leq \lambda(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k) \leq \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \lambda(E_k)}_{\text{ουρά συγκλίνουσας σειράς}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ∎

Άσκηση 19

(α) $A_n \subseteq [0,1]$ μετρήσιμα, $\limsup \lambda(A_n) = 1$.

Τότε, $\forall\, 0<a<1$ $\exists (A_{k_n}) : \lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}) > a$.

Λύση (α):

Ζητάμε (k_n) γν. αύξουσα: $\lambda\left((\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n})^c\right) < 1-a$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c)$

Αφού $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{k_n}^c)$ ζητάμε k_n:

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{k_n}^c) < 1-a$

$$\begin{cases} \lambda(A_{k_1}^c) < \frac{1-a}{2^2} \\ k_2 > k_1 : \lambda(A_{k_2}^c) < \frac{1-a}{2^3} \\ \vdots \\ k_n > k_{n-1} : \lambda(A_{k_n}^c) < \frac{1-a}{2^{n+1}} \end{cases}$$

Τότε $\sum \lambda(A_{k_n}^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-a}{2^{n+1}} + \frac{1-a}{2} < 1-a$.

Βρίσκω k_1: $\lambda(A_{k_1}) > 1 - \frac{1-a}{2^2} \Rightarrow \lambda(A_{k_1}^c) < \frac{1-a}{2^2}$.

Υπάρχουν άπειρα s: $\lambda(A_s) > 1 - \frac{1-a}{2^3} \Rightarrow \exists k_2 > k_1$:

$\lambda(A_{k_2}) > 1 - \frac{1-a}{2^2} \Rightarrow \lambda(A_{k_2}^c) < \frac{1-a}{2^3}$.

(β) $\lambda(E) < \infty$, A_n μετρήσιμα $\subseteq E$ και $\exists c>0$: $\forall n$ $\lambda(A_n) \geq c$.

N.S.o.: $\supset \lambda(\limsup A_n) > 0$ (1)

$\qquad \supset \exists (k_n)\uparrow : \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$ (2)

Λύση (β)

Αν δείξουμε το (1) λέμε το εξής:

Αφού $\lambda(\limsup A_n)>0 \Rightarrow \limsup A_n \neq \emptyset \Rightarrow \exists x\in\limsup A_n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ υπάρχουν άπειροι n: $x\in A_n \Rightarrow \exists k_1<k_2<\dots<k_n<\dots$ ώστε

$x\in A_{k_n}$ $\forall n \Rightarrow \bigcap A_{k_n}\neq\emptyset$.

Για το (1):

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{\Gamma_n}\Big) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\Gamma_n$$

Έχουμε: •) $(\Gamma_n)\downarrow$

•) Αφού $\Gamma_n\subseteq E$, $\infty>\lambda(E)\geq\lambda(\Gamma_n)$ $\forall n$

Από συνέχεια του μέτρου $\lambda(\limsup A_n)=\lim_{n\to\infty}\lambda(\Gamma_n)$

Τέλος, $\forall n$ $\Gamma_n\supseteq A_n \Rightarrow \lambda(\Gamma_n)\geq\lambda(A_n)\underset{\text{υπόθ}}{\geq} c \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\lambda(\Gamma_n)\geq c>0$. □

Άσκηση 11

(δ) Έστω $A\subseteq[a,b]$.

Τότε, $\lambda^*(A)=0 \Leftrightarrow$ υπάρχει κάλυψη του A με $\sum \ell(I_n)<\infty$ και κάθε $x\in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα I_n.

Λύση

($\Rightarrow$) Για κάθε $m\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $(I_{m,s})$: $A\subseteq\bigcup_s I_{m,s}$ και $\sum \ell(I_{m,s})<\frac{1}{2^m}$ (οποιοδήποτε $\varepsilon>0$)

Παίρνουμε την $(I_{m,s})_{m=1,\, s=1}^{\infty\quad ?}$

Τότε, $A\subseteq\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{s=1}^{?} I_{m,s}$ και $\sum_{m=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{s=1}^{?}\ell(I_{m,s})}_{<\frac{1}{2^m}}<\infty$

Έστω $x\in A$. Το x ανήκει σε άπειρα $I_{m,s}$.

$\exists s: x\in I_{1,s}$

$\exists s: x\in I_{2,s}$

$\vdots$

Έχουμε $x\in I_{1,s_1}, I_{2,s_2}, \dots, I_{m,s_m}$

Αν υπήρχε J: $J=I_{m,s}$ για άπειρα $m \Rightarrow \sum_m\sum_s \ell(I_{m,s}) \geq \ell(J)+\ell(J)+\dots = +\infty$.

(⇐) Έχουμε $\sum \ell(I_n)<\infty \Rightarrow \lambda(\limsup I_n)=0$

Έστω $x\in A$. Το x ανήκει σε άπειρα $I_n \iff x\in\limsup I_n$

Δηλαδή $A\subseteq \limsup I_n \Rightarrow \lambda(A)\le\lambda(\limsup I_n)=0 \Rightarrow \lambda(A)=0$. ■

Άσκηση 7

(α) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ μετρήσιμο, $\lambda(A)<+\infty$. (ισχύει και για $\lambda(A)=+\infty$)

Θεωρία: $\exists G\supseteq A$ ανοιχτό : $\lambda(G\setminus A)<\varepsilon$.

Επίσης, $\exists F\subseteq A$, κλειστό : $\lambda(A\setminus F)<\varepsilon$.

(β) $\lambda(A)=\underbrace{\sup\{\lambda(K): K\subseteq A,\ K \text{ συμπαγές}\}}_{M}$.

Λύση

(α) $\exists I_n: A\subseteq \underbrace{\bigcup I_n}_{G \text{ ανοιχτό}}$ και $\sum \ell(I_n) < \lambda(A)+\varepsilon$

$\lambda(G)=\lambda(\bigcup I_n)\le\sum\lambda(I_n)<\lambda(A)+\varepsilon$

$\lambda(G\setminus A)=\lambda(G)-\lambda(A)<\varepsilon$.

Εφαρμόζω το Θεώρημα για το A^c:
υπάρχει G ανοιχτό, $G\supseteq A^c$ και $\lambda(G\setminus A^c)<\varepsilon$

Όμως, αν $\underbrace{F=G^c}_{\subseteq A \text{ κλειστό}}$ τότε $G\setminus A^c = A\setminus F$ και
$\lambda(A\setminus F)=\lambda(G\setminus A^c)<\varepsilon$.

(β) Αν A φραγμένο βρίσκω κλειστό $\subseteq A$ για τυχόν $\varepsilon>0$:
$\lambda(A\setminus F)<\varepsilon \Rightarrow \lambda(A)\le\lambda(F)+\varepsilon\le M+\varepsilon$, γιατί F συμπαγές $\xRightarrow{\varepsilon \text{ τυχόν}} \lambda(A)\le M$.

Γενική περίπτωση: Έστω $\varepsilon>0$. $\exists n\in\mathbb{N}: \lambda(A)<\lambda(\underbrace{A\cap(-n,n)}_{\text{φραγμένο}})+\varepsilon$

Υπάρχει συμπαγές $K\subseteq A\cap(-n,n)$: $\lambda(A\cap(-n,n))<\lambda(K)+\varepsilon$ $\Rightarrow \lambda(A)<\lambda(K)+2\varepsilon$ □

$\Downarrow$

$K\subseteq A$