Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 14ο (23-04-2015)

Αρχικές παρατηρήσεις

(1) $f \in L_1(\mathbb{T})$

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\,dx$

Ισχύει: $|\hat{f}(k)| \leq \|f\|_1$, δηλ. η $\{\hat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη.

Επίσης, για $k \geq 0$ ορίζουμε: $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$

και για $k \geq 1$ — // — $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$

Έχουμε: $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx - i\sin kx)\,dx = \frac{a_k - ib_k}{2}$

και $\hat{f}(-k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx + i\sin kx)\,dx = \frac{a_k + ib_k}{2}$

Άρα: $\boxed{a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k)}$, $-ib_k = \hat{f}(k) - \hat{f}(-k) \Rightarrow \boxed{b_k = i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k))}$

και $\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\right) = \frac{1}{2}a_0 = \frac{a_0}{2}$.

Για κάθε $n \geq 0$ ορίζουμε $S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} =$

$$= \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{n}\left(\hat{f}(k)e^{ikx} + \hat{f}(-k)e^{-ikx}\right) =$$

$$= \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{n}\Big[\underbrace{(\hat{f}(k)+\hat{f}(-k))}\cos kx + \underbrace{i(\hat{f}(k)-\hat{f}(-k))}\sin kx\Big]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cdot\cos kx + b_k\cdot\sin kx\right).$$

Αν $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε:

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\,dx$$

Αν η f είναι άρτια όλα τα $b_k = 0$ (σειρά συνημιτόνων)

Αν η f είναι περιττή όλα τα $a_k = 0$ (σειρά ημιτόνων).

(2) Παρατήρηση για τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Θεωρούμε τον $C(\mathbb{T})$ = ας συνεχείς $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε: $A = \{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx\}$

$B = \{1, \cos x, \cos^2 x, \ldots, \cos^n x, \sin x, \sin x\cdot\cos x, \ldots, \sin x\cdot\cos^{n-1} x\}$

Λήμμα

$\mathcal{U} \underset{\sigma\varphi}{=} span(A) = span(B) \underset{\sigma\varphi}{=} V$

Απόδειξη:

Δείχνουμε πρώτα ότι:

(1) $\forall n \geq 2 \quad \cos(nx) = 2^{n-1}\cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{n,j}\cos^j x$.

(2) $\forall n \geq 2 \quad \sin(nx) = \sin x\left[2^{n-1}\cos^{n-1}x + \sum_{j=0}^{n-2} b_{n,j}\cos^j x\right]$.

Κατόπιν δείχνω το εξής:

(3) Το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(\mathcal{U}) = 2n+1$.

(4) Όλες οι $\cos kx, \sin kx$ $(1 \leq k \leq n)$ είναι στον $V = span(B)$ (από (1), (2)) $\Rightarrow \mathcal{U} \leq V \Rightarrow$

$\Rightarrow 2n+1 \overset{(3)}{=} \dim(\mathcal{U}) \leq \dim(V) \leq 2n+1 \Rightarrow \mathcal{U} = V$.

Για το (1):

Επαγωγικά: Για $n=2$ έχουμε $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για το n.

Γράφουμε

$$\left.\begin{aligned} \cos(nx+x) &= \cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x \\ \cos((n-1)x) = \cos(nx-x) &= \cos(nx)\cos x + \sin(nx)\sin x \end{aligned}\right\} \oplus \Longrightarrow$$

$\Rightarrow \cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos x\cos nx \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(n+1)x = 2\cos x\left[2^{n-1}\cos^n x + \ldots\right] - \left[2^{n-2}\cos^{n-1}x + \ldots\right] =$

$= 2^n\cos^{n+1}x + \ldots$

Για το (2):

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ και $\sin(n+1)x + \sin(n-1)x = 2\sin nx\cos x$.

Για το (3):

Έστω ότι $\underbrace{a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)}_{f(x)} \equiv 0$.

Θα δείξουμε ότι $a_k = 0$, $b_k = 0$.

π.χ. $a_3 = 0$ Αφού $f \equiv 0 \Rightarrow f(x)\cos 3x \equiv 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_0\cos 3x + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx\cos 3x + \sum_{k=1}^{n} b_k\sin kx\cos 3x = 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow a_0\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos 3x\,dx}_{0} + \sum_{k=1}^{n} a_k\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\cos kx\cdot\cos 3x}_{\cos kx - \cos tx}\,dx + \sum_{k=1}^{n} b_k\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\sin kx\cdot\cos 3x}_{\sin kx - \sin tx}\,dx}_{0} = 0$

$\Rightarrow \quad a_3\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 3x\,dx = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad a_3\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 6x}{2}\,dx = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \pi a_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \boxed{a_3 = 0}$

$\int\cos mx\cdot\cos lx\,dx = 0$ αν $m\neq l$

$\int\sin mx\cdot\sin lx\,dx = 0$ αν $m\neq l$

$\int\sin mx\cdot\cos lx\,dx = 0$

Ομοίως $\forall a_n$. ■

Θεώρημα

Έστω $f: T\to\mathbb{R}$ συνεχής.
Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο T: $\|f-T\|_\infty<\varepsilon$.

Απόδειξη

(i) Έστω ότι η f είναι και άρτια.
Ορίζουμε $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με $g(y)=f(\underset{[0,\pi]}{\arccos} y)$
Η g είναι συνεχής, άρα υπάρχει $p(y)=a_0+a_1y+\dots+a_ny^n$ τέτοιο ώστε $\forall y\in[-1,1]$ $|g(y)-p(y)|<\varepsilon$.
Ορίζουμε $T(x)=p(\cos x)=a_0+a_1\cos x+\dots+a_n\cos^n x$ δηλ. $p\in V=\mathcal{U}$, άρα το T είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο και άρτια συνάρτηση.
Για κάθε $x\in[0,\pi]$ $\exists y\in[-1,1]: \cos x=y$ $|f(x)-T(x)|=|g(y)-p(y)|<\varepsilon$.
Το ίδιο ισχύει για $x\in[-\pi,0]$ γιατί f, T άρτιες.

(ii) Έστω $f:T\to\mathbb{R}$ συνεχής $\left(\underbrace{f_1(x)=f(x)+f(-x)}_{\text{άρτια}},\ \underbrace{f_2(x)=f(x)-f(-x)}_{\text{περιττή}},\ f=\frac{f_1}{2}+\frac{f_2}{2}\right)$
Υπάρχουν άρτια f_1, περιττή f_2 (συνεχείς) ώστε $f=f_1+f_2$
Έστω $\varepsilon>0$.
Ξέρω ότι $\exists T_1: \|f_1-T_1\|_\infty<\varepsilon/2$

Αν βρω $T_2 : \|f_2 - T_2\|_\infty < \varepsilon/2$, τότε:
$\|f - (\underbrace{T_1 + T_2}_{\text{τριγ.πολ.}})\|_\infty \le \|f_1 - T_1\|_\infty + \|f_2 - T_2\|_\infty < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

(iii) $f : T \to \mathbb{R}$ συνεχής, περιττή.
Δείχνουμε ότι $\left.\begin{array}{l} \exists T_1 : \|f \sin^2 x - T_1\|_\infty < \varepsilon/2 \\ \text{και } \exists T_2 : \|f \cdot \cos^2 x - T_2\|_\infty < \varepsilon/2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f - (T_1 + T_2)\|_\infty = \|f\sin^2 x + f\cos^2 x - (T_1 + T_2)\|_\infty \le \ldots < \varepsilon$.
Θεωρούμε την $f(x)\sin x$
Αυτή είναι άρτια, άρα $\exists T_1' : \forall x \ |f(x)\sin x - T_1'(x)| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x \ |f(x)\sin^2 x - \underbrace{T_1'(x)\sin x}_{T_1}| = |\sin x| \cdot |f(x)\sin x - T_1'(x)| < \varepsilon$.

Για την $f(x)\cos^2 x$:
Γράφουμε: $f(x)\cos^2 x = f(x)\sin^2(\frac{\pi}{2} - x)$ (Θέτουμε $y = \frac{\pi}{2} - x$, οπότε $f(x)\sin^2(\frac{\pi}{2} - x) = f(\frac{\pi}{2} - y)\sin^2 y$).
Θεωρούμε την $f(\frac{\pi}{2} - y)\sin^2 y$ και βρίσκουμε T_2':
$\forall y \ |f(\frac{\pi}{2} - y)\sin^2 y - T_2'(y)| < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x \ |f(x)\cos^2 x - \underbrace{T_2'(\frac{\pi}{2} - x)}_{T_2(x)}| < \varepsilon$. ∎

(3) <u>Μιγαδική μορφή</u>
Έστω $f : T \to \mathbb{C}$ συνεχής.
Για κάθε $\varepsilon > 0$ $\exists p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ τ.ω. $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$.
<u>Απόδειξη:</u>
Η f γράφεται $f = u + iv$, όπου $u, v : T \to \mathbb{R}$ συνεχείς.
Μπορούμε να βρούμε: $t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$
$s(x) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\gamma_k \cos kx + \delta_k \sin kx)$.
τέτοια ώστε: $\forall x \ |u(x) - t(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $|v(x) - s(x)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$
Ορίζουμε $p(x) = t(x) + is(x)$

Τότε, $\forall x$ $|f(x)-p(x)| = \sqrt{|u(x)-t(x)|^2+|v(x)-s(x)|^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$.

Έχουμε $p(x) = t(x)+is(x) = \frac{a_0+i\gamma_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}((a_k+i\gamma_k)\cos kx + (b_k+i\delta_k)\sin kx)$

$= \frac{d_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(d_k \cos kx + \mu_k \sin kx) =$

$= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, όπου $c_k = \frac{d_k - i\mu_k}{2}$ ■

(A) Αν $p: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι τριγ. πολυώνυμο, τότε:
$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{p}(k) e^{ikx}$, όπου $\hat{p}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x) e^{-ikx} dx$

(B) Αν $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχής τότε $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ τριγ. πολ. $p: \|f-p\|_2 < \varepsilon$.
Αν $f \in L_1(\mathbb{T})$, τότε $\forall \varepsilon>0$ $\exists g$ συνεχής: $\|f-g\|_1 < \varepsilon/2$ και
$\exists$ τριγ. πολ. p: $\|g-p\|_1 \leq \|g-p\|_\infty < \varepsilon/2 \Rightarrow \exists p: \|f-p\|_1 < \varepsilon$

<u>Θεώρημα 1</u> (μοναδικότητα)
Έστω $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ <u>συνεχής</u> με $\hat{f}(k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.
Τότε $f \equiv 0$.

<u>Απόδειξη</u>
Θα αποδείξουμε ότι $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0$ ($\Rightarrow f(x)=0$ παντού).
Γράφουμε: $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{f(x)} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\overline{f(x)}-\overline{p(x)}) dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{p(x)} dx$
$\forall$ τριγ. πολ. p
[Παρατήρηση: $\forall$ τριγ. πολ. $p(x) = \sum c_k e^{ikx}$, έχουμε:
$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{p(x)} = \sum \overline{c_k} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = 0$]

Άρα: $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \cdot |f(x)-p(x)| dx \leq$
$\leq \|f-p\|_\infty \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \|f-p\|_\infty \cdot 2\pi \|f\|_1$

Παίρνω $p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ και έχω $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \|f-p_n\|_\infty \cdot 2\pi\|f\|_1 \to 0$

Άρα $\int |f|^2 = 0 \Rightarrow f \equiv 0$. ■

__Πόρισμα__

Αν $f,g: \mathbb{T}\to\mathbb{C}$ συνεχείς και $\hat{f}(k)=\hat{g}(k)$ $\forall k\in\mathbb{Z}$, τότε $f\equiv g$.

__Απόδειξη__

$\widehat{f-g}(k) \overset{(Άσκ)}{=} \hat{f}(k)-\hat{g}(k)=0 \Rightarrow f-g\equiv 0$. ∎

__Θεώρημα 2__ (Λήμμα Riemann-Lebesgue)

Έστω $f\in L_1(\mathbb{T})$.

Τότε: $\lim_{|k|\to\infty}|\hat{f}(k)|=0$ (Δηλ. $\forall\varepsilon>0$ $\exists n\in\mathbb{N}$: αν $|k|\geq n$ τότε $|\hat{f}(k)|<\varepsilon$).

__Απόδειξη__

Έστω $\varepsilon>0$.

Υπάρχει τριγ. πολυώνυμο p βαθμού n, ώστε:

$$\|f-p\|_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-p(x)|dx<\varepsilon$$

Έστω $k\in\mathbb{Z}$ με $|k|>n$.

Τότε,
$$\hat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-p(x))e^{-ikx}dx+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}p(x)e^{-ikx}dx.$$

Παρατηρούμε ότι:
$$\int_{-\pi}^{\pi}p(x)e^{-ikx}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{s=-n}^{n}c_se^{isx}\right)e^{-ikx}dx=$$
$$=\sum_{s=-n}^{n}c_s\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(s-k)x}dx}_{=0}=0 \quad \begin{matrix} s\neq k \\ |s|\leq n<|k| \end{matrix}$$

Τότε, $$|\hat{f}(k)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-p(x)|\cdot\overset{1}{|e^{-ikx}|}dx=\|f-p\|_1<\varepsilon.$$ ∎

__Παρατήρηση__

Έστω $f\in C^1(\mathbb{T})$ (έχει συνεχή 1η παράγωγο)

Έχουμε
$$\hat{f'}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)e^{-ikx}dx=$$
$$=\cancel{\frac{1}{2\pi}f(x)e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi}}+(ik)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx=(ik)\hat{f}(k)$$

0 γιατί $f(x)e^{-ikx}$ είναι 2π-περιοδική.

Συμπέρασμα: $\hat{f'}(k) = (ik)\hat{f}(k) \quad \forall k$

Πόρισμα

Αφού $\lim_{|k|\to+\infty} |\hat{f'}(k)| = 0$ από Riemann-Lebesgue, έχουμε:

$$|k\hat{f}(k)| \xrightarrow[|k|\to+\infty]{} 0.$$

Έστω $f \in C^2(\mathbb{T})$ (f'' συνεχής)

Όπως πριν, $\hat{f''}(k) = (ik)\hat{f'}(k) = (ik)^2 \hat{f}(k)$.

Όμως, $\forall k \quad |\hat{f''}(k)| \leq \|f''\|_1$

Άρα: $|\hat{f}(k)| \leq \frac{\|f''\|_1}{k^2}$

Άρα, $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)| < \infty$.