Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 10ο (26-03-2015)

Θεώρημα

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση.
Τότε, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνον αν $\lambda(\{x\in[a,b]: \text{η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\})=0$.

Απόδειξη

($\Leftarrow$) Θεωρούμε ακολουθία διαμερίσεων $\{P_n\}$ με $P_n\subseteq P_{n+1}$ και $\|P_n\|\to 0$.

Θα δείξουμε ότι $U(f,P_n)-L(f,P_n)\to 0$ (τότε, ικανοποιείται το κριτήριο του Riemann, άρα η f είναι R-ολοκληρώσιμη).

Ορίζουμε απλές ℓ_n, u_n με $\int \ell_n = L(f,P_n)$, $\int u_n = U(f,P_n)$.

Επειδή, $P_n\subseteq P_{n+1}$ έχουμε: $\ell_n\le \ell_{n+1}$ και $u_n\ge u_{n+1}$.

Άρα, ορίζονται οι συναρτήσεις $\ell=\lim \ell_n$, $u=\lim u_n$.

Επίσης, $L(f,P_n)=\int \ell_n \to \int \ell$ και $U(f,P_n)=\int u_n\to\int u$.

Ζητάμε, $\int \ell = \int u$ ($\Leftrightarrow \lim[U(f,P_n)-L(f,P_n)]=0$).

Αφού, $\ell_n\le f\le u_n \Rightarrow \ell\le f\le u\Rightarrow u-\ell\ge 0$, αρκεί να δείξουμε ότι $u=\ell$ σχεδόν παντού.

Έχουμε ότι f συνεχής σχεδόν παντού.

Θα δείξουμε ότι αν f συνεχής στο x τότε $u(x)=\ell(x)$.

Έστω $\varepsilon>0$.

Υπάρχει $\delta(\varepsilon,x)>0$, ώστε $\forall y\in(x-\delta,x+\delta)$ ισχύει $f(x)-\varepsilon<f(y)<f(x)+\varepsilon$.

Υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$: $\|P_{n_0}\|<\delta$.

Τότε, $x\in[x_i,x_{i+1}]$ και $x_{i+1}-x_i\le\|P_{n_0}\|<\delta\Rightarrow[x_i,x_{i+1}]\subseteq(x-\delta,x+\delta)$

↳ υποδιάστημα της P_{n_0}

$\Rightarrow m_i\ge f(x)-\varepsilon$ και $M_i\le f(x)+\varepsilon\Rightarrow \underbrace{M_i}_{u_{n_0}(x)}-\underbrace{m_i}_{\ell_{n_0}(x)}\le 2\varepsilon\Rightarrow u(x)-\ell(x)\le u_{n_0}(x)-\ell_{n_0}(x)\le 2\varepsilon$.

Αφού ε τυχαίο, $u(x)-\ell(x)=0$.

(⇒) Θεωρούμε $P_n \subseteq P_{n+1}$, $\|P_n\| \to 0$.

Τότε $U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$.

Παίρνουμε τις $\ell_n \uparrow \ell$, $u_n \downarrow u$ όπως πριν.

Τότε
$$\left.\begin{array}{l}\int u = \lim \int u_n = \lim U(f,P_n) = \int f \\ \int \ell = \lim \int \ell_n = \lim L(f,P_n) = \int f\end{array}\right\} \Rightarrow \int u = \int \ell \Rightarrow \int (u-\ell) = 0 \Rightarrow$$
$$\overset{u \geq \ell}{\Rightarrow} u = \ell \text{ σχεδόν παντού.}$$

Ορίζουμε $A = \underbrace{\{x : u(x) \neq \ell(x)\}}_{\text{μέτρο } 0} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right)}_{\text{αριθμήσιμο}}$.

Τότε $\lambda(A) = 0$.

Θα δείξουμε ότι: αν $x \in [\alpha,\beta] \setminus A$, τότε f συνεχής στο x.

Έστω $\varepsilon > 0$.

Ζητάμε $\delta > 0$: $\forall y \in (x-\delta, x+\delta)$ $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.

Έχουμε $u(x) = \ell(x) \Rightarrow u_n(x) - \ell_n(x) \longrightarrow u(x) - \ell(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) < \varepsilon$.

Υπάρχει "υποδιάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ της P_{n_0}" ώστε

$x_i < x < x_{i+1}$ (γιατί $x \notin P_{n_0}$).

Παίρνουμε $\delta > 0$: $(x-\delta, x+\delta) \subseteq [x_i, x_{i+1}]$.

Έστω $y \in (x-\delta, x+\delta) \Rightarrow \underset{u_{n_0}(x)}{\underset{\shortparallel}{m_i}} \leq f(y) \leq \underset{\ell_{n_0}(x)}{\underset{\shortparallel}{M_i}}$

και για το $f(x)$

Άρα, $|f(y) - f(x)| \leq u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) < \varepsilon$. ∎

Χώροι L_p

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και $1 \leq p < \infty$.

Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{L}_p(E)$ όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : E \to [-\infty, +\infty]$ για τις οποίες $\int_E |f(x)|^p \, d\lambda(x) < \infty$.

Σημείωση (1) Τότε, $|f(x)|^p < \infty$ σ.π. $\Rightarrow |f(x)| < \infty$ σ.π.

(2) Αν $f, g \in \mathcal{L}_p(E)$, τότε $f+g \in \mathcal{L}_p(E)$ (και αν $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot f \in \mathcal{L}_p(E)$).

Διότι, $|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq (2\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p = 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leq$

$\leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \Rightarrow \int_E |f+g|^p \, d\lambda \leq 2^p \int_E (|f|^p + |g|^p) \, d\lambda = 2^p \left(\int_E |f|^p d\lambda + \int_E |g|^p d\lambda \right) < \infty$.

Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον $\mathcal{L}_p(E)$, θέτοντας $f\sim g \Leftrightarrow f=g$ σχεδόν παντού στο E.

Θεωρούμε τις κλάσεις ισοδυναμίας $[f]=\{g\in\mathcal{L}_p(E) : g=f \text{ σ.π.}\}$.

Παρατηρούμε ότι αν $f\sim g$, τότε $|f|^p=|g|^p$ σ.π. $\Rightarrow \int|f|^p=\int|g|^p$.

Ο χώρος $L_p(E)$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\{[f] : f\in\mathcal{L}_p(E)\}$.

Γίνεται γραμμικός χώρος, αν ορίσουμε $\alpha[f]+\beta[g]=[\alpha f+\beta g]$.

Στη συνέχεια γράφουμε f αντί για $[f]$ για τα στοιχεία του $L_p(E)$ (με την έννοια ότι οποιαδήποτε $g=f$ σ.π. αντιπροσωπεύει το ίδιο καλά την $[f]$).

Ορίζουμε: $\|f\|_p=\|f\|_{L_p(E)}=\left(\int_E |f(x)|^p\,d\lambda(x)\right)^{1/p}$.

<u>Πρόταση</u>

Ο $(L_p(E),\|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα.

<u>Απόδειξη</u>

(i) $\forall f\in L_p(E)$ $\quad \|f\|_p > 0$ και αν $\|f\|_p=0 \Rightarrow \int_E |f|^p\,d\lambda=0 \Rightarrow f=0$ σ.π. $\Rightarrow$
$\Rightarrow [f]=[0]$.

(ii) $\|\alpha f\|_p=|\alpha|\cdot\|f\|_p$.

(iii) <u>Τριγωνική ανισότητα</u>:

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p+\|g\|_p$$

Δηλαδή:

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p\,d\lambda(x)\right)^{1/p} \leq \left(\int_E |f(x)|^p\,d\lambda(x)\right)^{1/p} + \left(\int_E |g(x)|^p\,d\lambda(x)\right)^{1/p}.$$

Ανισότητα Minkowski

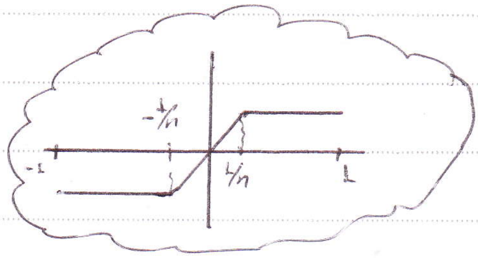
Hölder $\left(xy \leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\right)$

Θεώρημα (Riez-Fischer)

Για κάθε $p \geq 1$ ο $(L_p(E), \|\cdot\|_p)$ είναι πλήρης.

Άσκηση (Πραγματικής Ανάλυσης)

Ο $(C[-1,1], \|\cdot\|_1)$ δεν είναι πλήρης.



Λύση

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$.

Δείχνουμε ότι αν $m > n$, τότε $\int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\,dx \leq \frac{4}{n}$

Άρα, η (f_n) είναι βασική στον $(C[-1,1], \|\cdot\|_1)$.

Αν, όμως, υπήρχε $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, ώστε:

$\int_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)|\,dx \to 0$, τότε θα είχαμε: $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ ?, & x = 0 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$

άρα η f δεν θα ήταν συνεχής. □

Απόδειξη:

Χρησιμοποιούμε ένα χαρακτηρισμό χώρων Banach:

Λήμμα

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X είναι πλήρης

(β) Αν (x_n) ακολουθία στον X με $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει (δηλαδή $\exists x \in X : S_N = x_1 + \dots + x_N \xrightarrow{\|\cdot\|} x$).

Με βάση το λήμμα, αρκεί να πάρουμε μια ακολουθία $f_k \in L_p(E)$ με την ιδιότητα ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p = M < \infty$ και να δείξουμε ότι $\exists\, s \in L_p(E) : S_n = f_1 + \dots + f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} s$ (δηλαδή $\int_E |s - S_n|^p d\lambda \to 0$)

Ορίζουμε $g_n = |f_1|+|f_2|+\dots+|f_n|$ και $s_n = f_1+f_2+\dots+f_n$.

(α) $\forall n\in\mathbb{N}$ έχουμε $\|g_n\|_p \le \|f_1\|_p+\dots+\|f_n\|_p \le M \Rightarrow \int_E g_n^p\,d\lambda \le M^p$

(β) $g_n \nearrow g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$

Από Θ.Μ.Σ. $\int g^p = \lim \int g_n^p \le M^p < \infty$

Άρα, η g^p είναι ολοκληρώσιμη $\Rightarrow g(x)<\infty$ σχεδόν παντού στο E, δηλαδή $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|<\infty$ σ.π.

(γ) Έπεται ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει σ.π. στο E.

Ορίζουμε $s(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ σ.π. στο E.

Τότε, $s_n(x) = f_1(x)+\dots+f_n(x) \longrightarrow s(x)$ σ.π. στο E.

(δ) Η s ανήκει στον $L_p(E)$.

Έχουμε $\int_E |s|^p d\lambda = \int_E \lim_{n\to\infty}|s_n|^p d\lambda \underset{Fatou}{\le} \liminf_n \int_E |s_n|^p d\lambda \le$

$\le \liminf_n \int_E g_n^p\, d\lambda \le M^p<\infty$.

Τέλος, έχουμε $|s-s_n|^p \le 2^p(|s|^p+|s_n|^p) \le 2^p(g^p+g^p) = 2^{p+1} g^p$,

γιατί $|s_n|\le g \xrightarrow[n\to\infty]{} |s|\le g$.

Η g^p είναι ολοκληρώσιμη και $|s-s_n|^p \xrightarrow{\text{σ.π.}} 0$ γιατί $s_n\to s$.

Από Θ.Κ.Σ. $\int |s-s_n|^p\, d\lambda \longrightarrow 0$. ∎

Απόδειξη (Λήμματος)

(α)⇒(β): Έστω ότι ο X είναι πλήρης και έστω ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|<\infty$.

Θα δείξουμε ότι η $s_n = x_1+\dots+x_n$ είναι $\|\cdot\|$-βασική.

Αν $m>n$ έχουμε: $\|s_m-s_n\| = \|x_{n+1}+\dots+x_m\| \le \|x_{n+1}\|+\dots+\|x_m\|$.

Έστω $\varepsilon>0$.

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ συγκλίνει, $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall m>n\ge n_0$ $\|x_{n+1}\|+\dots+\|x_m\| <\varepsilon$

Τότε, $\forall m>n\ge n_0$ $\|s_m-s_n\|\le \|x_{n+1}\|+\dots+\|x_m\|<\varepsilon$.

(β)⇒(α): Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X.

Επαγωγικά βρίσκουμε $k_1<k_2<\dots<k_n<k_{n+1}<\dots$ ώστε

$\|x_{k_{n+1}}-x_{k_n}\|<\frac{1}{2^n}$ (Παίρνω $\varepsilon=1/2$ και βρίσκω $k_1: \forall n>m\ge k_1$ $\|x_n-x_m\|<\frac{1}{2}$,

$\left.\begin{matrix} n=k_2 \\ m=k_1 \end{matrix}\right\}$ $\|x_{k_2}-x_{k_1}\|<\frac{1}{2}$

$\left.\begin{matrix} n=\kappa_3 \\ m=\kappa_2 \end{matrix}\right\} \|x_{\kappa_3}-x_{\kappa_2}\|<\frac{1}{2^2}$

Θ παίρνω $\varepsilon=\frac{1}{2^2}$ και βρίσκω $\kappa_2>\kappa_1$ $\forall n>m\geq\kappa_2$ $\|x_n-x_m\|<\frac{1}{2^2}$, κ.ο.κ.).

Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_{\kappa_{n+1}}-x_{\kappa_n}\|<\infty \xRightarrow{\text{Υπόθεση}} \exists x\in X:$ $S_N=(\cancel{x_{\kappa_2}}-x_{\kappa_1})+(\cancel{x_{\kappa_3}}-\cancel{x_{\kappa_2}})+\dots+(x_{\kappa_n}-\cancel{x_{\kappa_{n-1}}})$
$\longrightarrow x \Rightarrow x_{\kappa_n}-x_{\kappa_1}\to x \Rightarrow x_{\kappa_n}\to x+x_{\kappa_1}$.

Δηλαδή, (x_n) βασική και έχει την $x_{\kappa_n}\to x+x_{\kappa_1}$.

Άρα, η (x_n) συγκλίνει. ∎