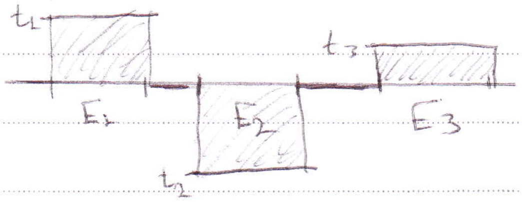
# Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue

## Μάθημα 8ο (19-03-2015)

(1) Αν $\phi = \sum_{i=0}^{n} t_i \chi_{E_i}$, όπου $E_i$ ξένα μετρήσιμα $\subseteq \mathbb{R}^d$, $\cup E_i = \mathbb{R}^d$,
$t_0 = 0$, $t_i$ διακεκριμένα, $\lambda(E_i) < \infty$ για $i=1,\dots,n$
τότε ορίζουμε $\int \phi \, d\lambda = \sum_{i=0}^{n} t_i \lambda(E_i)$ (συμφωνούμε ότι $t_0 \lambda(E_0) = 0$).
(Αυτή η σχέση ισχύει ακόμα κι αν τα $E_i$ δεν είναι ξένα).




(2) Προσέγγιση μετρήσιμων από απλές:

(i) Αν $f : E \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη, τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία $(\phi_n)$ απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\phi_n : E \to [0,+\infty)$ με $\phi_n \nearrow f$ κατά σημείο.

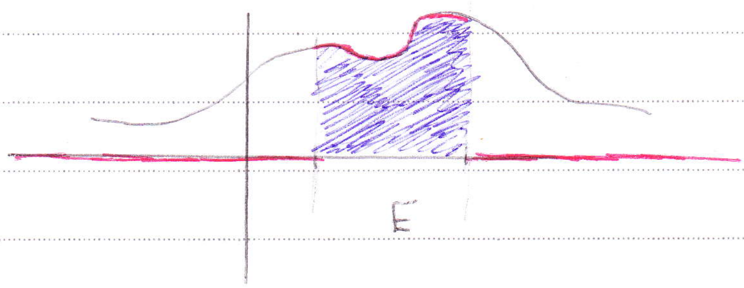
(ii) ... $f : E \to [-\infty,+\infty]$

## Ολοκλήρωμα μη αρνητικής μετρήσιμης συνάρτησης

Ορισμός

(α) Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη.
Ορίζουμε:
$$\int f \, d\lambda = \sup\{\int \phi \, d\lambda : \phi \text{ απλή ολοκληρώσιμη}, 0 \le \phi \le f\}.$$
Λέμε ότι η $f$ είναι ολοκληρώσιμη αν $\int f \, d\lambda < \infty$.

(β) Αν $E \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο, τότε ορίζουμε:
$$\int_E f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \chi_E \, d\lambda$$



(γ) Αν $f: A \to [0,+\infty]$, ορίζουμε $\tilde{f}: \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ ως εξής:
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Ορίζουμε: $\int_A f\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}\cdot\chi_A\,d\lambda = \int_A \tilde{f}\,d\lambda$.

Παρατηρήσεις

(1) Η $\underset{=t_0\cdot\chi_{\mathbb{R}^d}}{\phi\equiv 0}$ είναι απλή ολοκληρώσιμη και $\int \phi\,d\lambda = 0$ και $0\le\phi\le f$.

Άρα, το δεξιό σύνολο του ορισμού του $\int f\,d\lambda$ είναι μη-κενό (περιέχει το 0) $\Rightarrow \int f\,d\lambda \ge 0$.

(2) Αν $f=\psi$ απλή ολοκληρώσιμη, τότε ο ορισμός του $\int d\lambda$ που δώσαμε συμφωνεί με τον προηγούμενο.
$0\le\psi\le\psi \Rightarrow \int'\psi\,d\lambda \ge \int\psi\,d\lambda$ και $\forall\, 0\le\phi\le\psi \xRightarrow{\text{μονοτονία}} \int\phi\le\int\psi \Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{\sup\{\int\phi : 0\le\phi\le\psi\}}_{\int'\psi} \le \int\psi$

Άλλες ιδιότητες:

(α) Μονοτονία: $f\le g \Rightarrow \int f\,d\lambda \le \int g\,d\lambda$ (έχω περισσότερες $\phi$ κάτω από την $g$ απ'ότι κάτω από την $f$)

(β) $\int tf\,d\lambda = t\int f\,d\lambda \quad \forall\, t\ge 0$

(γ) Αν $\lambda(E)=0$, τότε $\int_E f\,d\lambda = 0$.

Απόδειξη:

Έχουμε: $\int_E f\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f\cdot\chi_E\,d\lambda$

Έστω $\phi = \sum_{i=0} t_i\chi_{A_i}$ απλή ολοκληρώσιμη $\le f\cdot\chi_E$

Παρατηρούμε ότι: $\forall i=1,\dots,n \quad A_i\subseteq E$ (γιατί: αν $x\in A_i$, τότε $\phi(x)=t_i>0 \Rightarrow f(x)\chi_E(x)\ge\phi(x)>0 \Rightarrow x\in E$ - αλλιώς θα είχαμε $\chi_E(x)=0\ge\phi(x)>0$)

Αφού $\lambda(E)=0 \Rightarrow \lambda(A_i)=0,\ i=1,\dots,n$.

Τότε, $\int \phi \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} t_i \, \underset{0}{\underbrace{\lambda(A_i)}} = 0$

Άρα, $\int_{\mathbb{R}^d} f \chi_E \, d\lambda = \sup\{\int \phi \, d\lambda : 0 \le \phi \le f\chi_E\} = 0$. ∎

(δ) Αν $E \subseteq F$, τότε $\int_E f \le \int_F f$

Απόδειξη:

Έχουμε: $\int_E f = \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \underbrace{\chi_E \le \int_{\mathbb{R}^d} f \chi_F}_{=} = \int_F f$ ∎

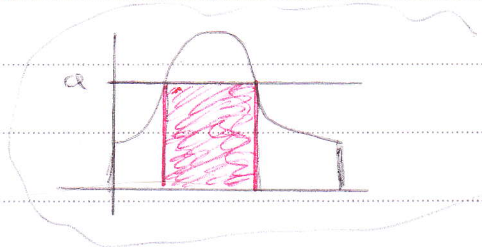
(ε) Αν $0 \le f \le A$ στο $E$ και $\lambda(E) < \infty$, τότε $\int_E f \, d\lambda \le A \cdot \lambda(E)$.

Απόδειξη:

Πράγματι: $\int_E f = \int f \chi_E \le \int A \cdot \chi_E = A \cdot \lambda(E)$. ∎

(στ) Ανισότητα Markov: $\forall a > 0$ $\int f \ge a \cdot \lambda(\{x : f(x) > a\})$.

Απόδειξη:




Στο $\{f \ge a\}$ έχουμε $f \ge a \Rightarrow$

$\Rightarrow f \cdot \chi_{\{f \ge a\}} \ge a \cdot \chi_{\{f \ge a\}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int f \ge \int_{\{f \ge a\}} f = \int f \cdot \chi_{\{f \ge a\}} \ge \int a \chi_{\{f \ge a\}} = a \cdot \lambda(\{f \ge a\})$. ∎

(ζ) Αν η $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ είναι ολοκληρώσιμη (δηλαδή $\int f \, d\lambda < \infty$), τότε: $\lambda(\{f = +\infty\}) = 0$ (η $f$ είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού).

Απόδειξη:

Γράφουμε $\{f = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \ge n\}$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε: $0 \le \lambda(\{f = +\infty\}) \le \lambda(\{f \ge n\}) \underset{\text{Markov}}{\le} \frac{1}{n} \int f \, d\lambda \to 0$. ∎

## Θεώρημα μονότονης σύγκλισης

Έστω $f, f_n : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ με $f_n \nearrow f$ ($0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$, $\forall x\ f_n(x) \to f(x)$)
Τότε, $\int f_n\, d\lambda \nearrow \int f\, d\lambda$.

**Απόδειξη**

Παρατηρούμε ότι: $f_n \le f_{n+1} \Rightarrow \int f_n \le \int f_{n+1} \Rightarrow \left(\int f_n\right)\uparrow$ και άρα υπάρχει το $\lim_n \int f_n$.

Επίσης, αφού $f_n \nearrow f$ έχουμε $f_n \le f \Rightarrow \int f_n \le \int f\ \ \forall n \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_n \int f_n \le \int f$.

Θα δείξουμε ότι $\lim_n \int f_n \overset{(*)}{\ge} \int f = \sup\{\int \phi : 0 \le \phi \le f\}$

Ιδέα: Θα δείξουμε ότι $\forall\, 0<\varepsilon<1$ και για κάθε απλή ολοκληρώσιμη $0 \le \phi \le f$ ισχύει: $\lim_n \int f_n \ge (1-\varepsilon)\int \phi$
(Έπεται ότι $\lim_n \int f_n \ge (1-\varepsilon)\sup\{\int\phi : 0\le\phi\le f\} = (1-\varepsilon)\int f$ και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ έχουμε την $(*)$).

**Λήμμα**

Έστω $\phi$ απλή ολοκληρώσιμη και έστω $E_n \nearrow E$ ($E = \cup E_n$).
Τότε $\int_E \phi = \lim_n \int_{E_n} \phi$.

**Απόδειξη:**

Έχουμε $\phi = \sum_{i=0}^{m} t_i \chi_{A_i}$, $\lambda(A_i) < \infty$, $i=1,\dots,m$ και
$$\int_{E_n}\phi = \int_{\mathbb{R}^d}\phi\,\chi_{E_n} = \sum_{i=0}^{m} t_i \int \chi_{A_i}\chi_{E_n} = \sum_{i=0}^{m} t_i \int \chi_{A_i\cap E_n} = \sum_{i=1}^{m}\lambda(A_i\cap E_n)$$
Έχουμε:
$$E_n \nearrow E \Rightarrow A_i\cap E_n \nearrow A_i \cap E \Rightarrow \lambda(A_i\cap E_n)\nearrow \lambda(A_i\cap E)$$
Άρα $\sum_{i=1}^{m}\lambda(A_i\cap E_n) \xrightarrow[\text{συνέχεια της } \lambda]{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} t_i\,\lambda(A_i\cap E) = \dots = \int \phi\,\chi_E = \int_E \phi$. ∎

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε:
$$E_n = \{x : f_n(x) \ge (1-\varepsilon)\phi(x)\}.$$
Ισχυρισμός: $E_n \nearrow \mathbb{R}^d = E$. (Έστω $x \in \mathbb{R}^d$, με $\phi(x)>0$. Έχουμε $f_n(x) \to f(x) \ge \phi(x) > (1-\varepsilon)\phi(x)$
Άρα $\exists n_0 : \forall n \ge n_0\ f_n(x) > (1-\varepsilon)\phi(x) \Rightarrow \forall n\ge n_0\ x \in E_n \Rightarrow x \in \cup E_n$
Αν $\phi(x)=0$, τότε $\forall n\ f_n(x) \ge 0 = (1-\varepsilon)\phi(x) \Rightarrow x\in E_n\ \forall n \Rightarrow x \in \cup E_n$.
Επίσης, $E_n \subseteq E_{n+1}$ γιατί αν $f_n(x) \ge (1-\varepsilon)\phi(x) \Rightarrow f_{n+1}(x) \ge f_n(x) \ge (1-\varepsilon)\phi(x)$. )

Τότε, $\int f_n \geq \int_{E_n} f_n \geq \int_{E_n} (1-\varepsilon)\phi = (1-\varepsilon)\int_{E_n} \phi \xrightarrow{\text{ΛΗΜΜΑ}} (1-\varepsilon)\int_{\mathbb{R}^d} \phi \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_n \int f_n \geq (1-\varepsilon)\int \phi.$ ■

<u>Πρώτη βασική συνέπεια:</u> Γραμμικότητα

Έστω $f: \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη.
Υπάρχει $(\phi_n)$ ακολουθία απλών ολοκληρώσιμων με $\phi_n \nearrow f$.

<u>Απόδειξη:</u>

Ξέρουμε ότι υπάρχουν απλές μετρήσιμες $\psi_n \geq 0$ με $\psi_n \nearrow f$.
Ορίζουμε $\phi_n = \underbrace{\psi_n \cdot \chi_{[-n,n]^d}}_{\text{απλές ολοκλ.}} \nearrow f$

Έστω $x \in \mathbb{R}^d$.
$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad x \in [-n,n]^d$.
Τότε $\forall n \geq n_0 \quad \phi_n(x) = \psi_n(x)\chi_{[-n,n]^d}(x) = \psi_n(x) \to f(x)$. ■

Έστω $f, g: \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ ολοκληρώσιμες και έστω $a, b \geq 0$.
Υπάρχουν απλές ολοκληρώσιμες $\phi_n \nearrow f$ και $\psi_n \nearrow g$.
Τότε: $a\phi_n + b\psi_n \nearrow af + bg$.
Από Θ.Μ.Σ.: $\int (a\phi_n + b\psi_n) \longrightarrow \int (af+bg)$

$$\begin{array}{c} \| \\ a\int\phi_n + b\int\psi_n \\ \downarrow \text{ΘΜΣ} \\ a\int f + b\int g \end{array}$$

Άρα: $a\int f + b\int g = \int (af+bg)$.

## Θεώρημα Beppo-Levi

Αν $f_n : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ μετρήσιμες, τότε:

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\lambda.$$

**Απόδειξη:**

Γράφουμε: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_n S_n$, όπου $S_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$.

Έχουμε: $S_n \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \xRightarrow{\text{ΘΜΣ}} \int \left(\sum_n f_n\right) = \lim_n \int S_n \xlongequal{\text{γραμμικότητα}} \lim_n \left(\int f_1 + \ldots + \int f_n\right) =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$ ∎

## Λήμμα του Fatou

Έστω $f_n : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ μετρήσιμες.

Τότε $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$.

**Απόδειξη:**

Έχουμε: $\liminf f_n = \lim \underbrace{\left(\inf_{k \geq n} f_k\right)}_{g_n}$.

Παρατηρούμε ότι: $g_n = \inf_{k \geq n} f_k \leq \inf_{k \geq n+1} f_k = g_{n+1}$

Άρα $(g_n) \nearrow$ και $g_n \to \liminf f_n$

Από ΘΜΣ $\int \liminf f_n = \lim_n \int g_n$

Επίσης, $g_n \leq f_n \Rightarrow \int g_n \leq \int f_n \Rightarrow \liminf \int g_n \leq \liminf \int f_n$

Άρα $\lim \int g_n \leq \liminf \int f_n$. ∎

## Θεώρημα προσθετικότητας

Αν $f : \mathbb{R}^d \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη και $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ ξένα ανά δύο $\subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμα, τότε:

$$\int_{\cup E_n} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f$$

Απόδειξη:

Για ξένα σύνολα: $\chi_{\bigcup_n E_n} = \sum_n \chi_{E_n}$

Τώρα:

$$\int_{\cup E_n} f = \int f \cdot \chi_{\cup E_n} = \int f \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} = \int \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{f \cdot \chi_{E_n}}_{f_n} \overset{\text{Beppo Levi}}{=\!=\!=} \sum_{n=1}^{\infty} \int f \cdot \chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f. \blacksquare$$