Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue
Μάθημα 7ο (17-03-2015)

Ολοκλήρωμα Lebesgue

1. Προσέγγιση μετρήσιμης συνάρτησης από απλές μετρήσιμες συναρτήσεις

Η $\varphi : E \to \mathbb{R}$ λέγεται απλή αν παίρνει πεπερασμένες το πλήθος τιμές.

Αν $t_1, \ldots, t_m$ οι τιμές της φ, αν ορίσουμε $A_i = \varphi^{-1}(\{t_i\}) = \{x \in E : \varphi(x) = t_i\}$, τότε έχουμε: $E = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ (A_i ξένα) και αν θεωρήσουμε την $\chi_{A_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_i \\ 0, & x \notin A_i \end{cases}$, τότε:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} t_i \chi_{A_i}(x)$$

Γενικότερα, απλή λέμε κάθε συνάρτηση της μορφής:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m} t_i \chi_{A_i}$$

ακόμα και αν τα A_i δεν είναι ξένα.

Παρατήρηση

Η χ_E είναι μετρήσιμη αν και μόνον αν το E είναι μετρήσιμο:

$$\{\chi_E > a\} = \begin{cases} \mathbb{R}^d, & a < 0 \\ E, & 0 \le a < 1 \\ \emptyset, & a \ge 1 \end{cases}$$

Θεώρημα

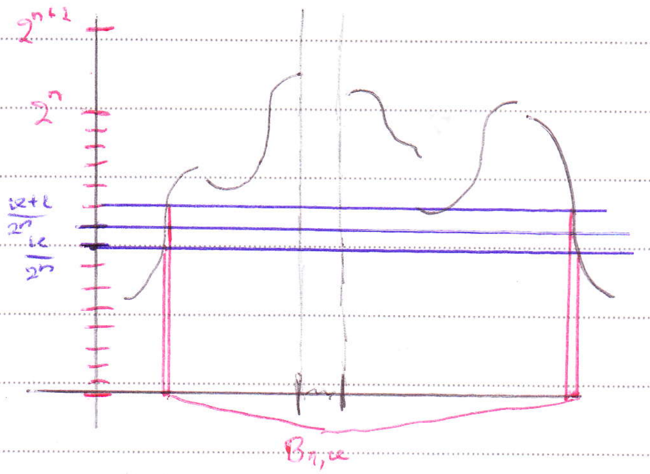
Έστω $f : E \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη, $E \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο.

Υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων $\varphi_n : E \to [0, +\infty)$ με $\varphi_n \nearrow f$ κατά σημείο.

Αν επιπλέον η f είναι φραγμένη, τότε $\varphi_n \overset{\text{ομ.}}{\nearrow} f$

Απόδειξη:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ χωρίζουμε το διάστημα $[0, 2^n]$ σε ίσα διαστήματα μήκους $\frac{1}{2^n}$ (το πλήθος τους είναι 2^{2n}).



Για κάθε $k = 0, 1, \dots, 2^{2n}-1$ ορίζουμε:

$$B_{n,k} = \left\{x \in E : \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)$$

Άρα, $\underset{\text{ξένα}}{\bigcup_{k=0}^{2^{2n}-1} B_{n,k}} = \{x \in E : 0 \le f(x) < 2^n\}$.

Ορίζουμε: $\varphi_n : E \to \mathbb{R}$ ως εξής: $\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & x \in B_{n,k} \\ 2^n, & x \in E \setminus \bigcup B_{n,k} \end{cases}$

Αν η f είναι μετρήσιμη, τότε κάθε $B_{n,k}$ είναι μετρήσιμο, άρα η $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{B_{n,k}}(x) + 2^n \chi_{\underbrace{E \setminus \bigcup B_{n,k}}_{B_0}}(x)$ είναι μετρήσιμη.

Ιδιότητες της (φ_n):

(1) $\forall x \in E \quad \varphi_n(x) \to f(x)$

(α) Αν $f(x) = +\infty$, τότε $\forall n$ έχουμε $f(x) = +\infty \ge 2^n \Rightarrow \varphi_n(x) = 2^n \to +\infty = f(x)$

(β) Αν $f(x) < \infty$, τότε $\exists n_0 : \forall n \ge n_0$ ισχύει $f(x) < 2^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, 0 \le k \le 2^{2n}-1 : \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n} \Rightarrow x \in B_{n,k} \Rightarrow \varphi_n(x) = \frac{k}{2^n}$.

Δηλαδή, $\forall n \ge n_0 \quad \underset{\frac{k}{2^n}}{\underset{\shortparallel}{\varphi_n(x)}} \le f(x) < \varphi_n(x) + \frac{1}{2^n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n \ge n_0 \quad |f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^n} \to 0 \Rightarrow \varphi_n(x) \longrightarrow f(x)$

Σημείωση:

Αν $f(x) \le M \ \forall x \in E$, βρίσκω $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \ge n_0 \quad 2^n > M$.

Τότε, $\forall n \geq n_0$ κάθε $x \in E$ ανήκει σε κάποιο $B_{n,\kappa}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x \in E \quad |f(x) - \varphi_n(x)| < \frac{1}{2^n}$

Άρα, $\forall n \geq n_0 \quad \|f - \varphi_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \to 0 \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$.

(2) Η (φ_n) είναι αύξουσα: $\forall x \in E \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$

Έστω $x \in E$ και έστω ότι $x \in B_{n,\kappa}$ για κάποιο $0 \leq \kappa < 2^{2n} - 1$.

1η περίπτωση:

$$\frac{\kappa}{2^n} \leq f(x) < \frac{\kappa}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{2\kappa}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2\kappa+1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in B_{n+1,2\kappa} \Leftrightarrow \varphi_{n+1}(x) = \frac{2\kappa}{2^{n+1}} = \frac{\kappa}{2^n} = \varphi_n(x).$$

2η περίπτωση:

$$\frac{\kappa}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{\kappa+1}{2^n} \Leftrightarrow x \in B_{n+1,2\kappa+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi_{n+1}(x) = \frac{2\kappa+1}{2^{n+1}} = \frac{\kappa}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} > \frac{\kappa}{2^n} = \varphi_n(x).$$

Όμοια, όταν $f(x) \geq 2^n$. ∎

Πόρισμα

Έστω $f: E \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη.

Υπάρχουν απλές μετρήσιμες $\varphi_n: E \to \mathbb{R}$ ώστε:

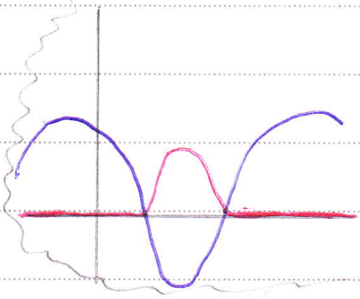
$$0 \leq |\varphi_1| \leq |\varphi_2| \leq \dots \leq |\varphi_n| \leq |\varphi_{n+1}| \leq \dots$$

και $\varphi_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$.

Απόδειξη:

Θεωρούμε τις $f^+=\max\{f,0\}$, $f^-=-\min\{f,0\}$ και βρίσκουμε απλές μετρήσιμες $\psi_n \nearrow f^+$, $\zeta_n \nearrow f^-$.

Ορίζουμε $\varphi_n=\psi_n-\zeta_n \longrightarrow f^+-f^-=f \Rightarrow |\varphi_n|\to|f|$



Για την $|\varphi_n|\le|\varphi_{n+1}|$:

Ισχύει: $|\varphi_n|=|\psi_n-\zeta_n| \overset{?}{=} \max\{\psi_n,\zeta_n\}\le\max\{\psi_{n+1},\zeta_{n+1}\}=$

$=|\psi_{n+1}-\zeta_{n+1}|=|\varphi_{n+1}|$

Για το (?):

Έστω $x\in E$: $f(x)\ge 0 \Rightarrow f^+(x)=f(x),\ f^-(x)=0$ (α)

$f(x)<0 \Rightarrow f^+(x)=0,\ f^-(x)=-f(x)$ (β)

Αν ισχύει το (α) έχουμε: $0\le\zeta_n(x)\le f^-(x)=0\Rightarrow\zeta_n(x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow|\psi_n(x)-\cancel{\zeta_n(x)}|=\psi_n(x)=\max\{\psi_n(x),0\}=\max\{\psi_n(x),\zeta_n(x)\}$.

Αν ισχύει το (β) έχουμε: $0\le\psi_n(x)\le f^+(x)=0\Rightarrow\psi_n(x)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow|\cancel{\psi_n(x)}-\zeta_n(x)|=\zeta_n(x)=\max\{0,\zeta_n(x)\}=\max\{\psi_n(x),\zeta_n(x)\}$. ∎

2 Ολοκλήρωμα για απλές συναρτήσεις

Έστω $\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση με κανονική αναπαράσταση $\varphi(x)=\sum_{i=0}^{n}t_i\chi_{A_i}(x)$

(Δηλαδή, τα A_i είναι ξένα μετρήσιμα, οι $t_0,t_1,\dots,t_n$ διαφορετικοί ανά δύο και $t_0=0$).

Θα λέμε ότι η φ είναι ολοκληρώσιμη αν

$\lambda(A_i)<\infty \quad \forall i=1,\dots,n$

και τότε ορίζουμε:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^d}\varphi\,d\lambda=\sum_{i=0}^{n}t_i\lambda(A_i)}$$ ("δεχόμαστε" ότι $0\cdot\infty=0$).

Σημείωση:

Ορίζουμε $\int_E\varphi\,d\lambda \overset{op.}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\varphi\cdot\chi_E\,d\lambda \quad \forall E\subseteq\mathbb{R}^d$ μετρήσιμο.

(Ο ορισμός έχει νόημα, γιατί $\chi_E\varphi=\sum_{i=0}^{n}t_i\chi_{A_i}\chi_E=\sum_{i=0}^{n}t_i\chi_{A_i\cap E}$ και $\forall i=1,\dots,n$ $\lambda(A_i\cap E)\le\lambda(A_i)<\infty$).

Άρα, $\boxed{\int_E \varphi \, d\lambda = \sum_{i=0}^{n} t_i \lambda(A_i \cap E).}$

Ιδιότητες

(1) Αν $\varphi \geq 0$, τότε $\int \varphi \, d\lambda \geq 0$

Απόδειξη:

Έχουμε $\varphi = \sum_{i=0}^{n} t_i \chi_{A_i}$ και $t_i \geq 0$

Τότε $\int \varphi \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} t_i \lambda(A_i) \geq 0$ ■

(2) Γραμμικότητα:

Αν φ, ψ απλές ολοκληρώσιμες και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε η $\alpha\varphi + \beta\psi$ είναι απλή ολοκληρώσιμη και

$$\int (\alpha\varphi + \beta\psi) \, d\lambda = \alpha \int \varphi \, d\lambda + \beta \int \psi \, d\lambda.$$

Απόδειξη:

Έχουμε $\varphi = \sum_{i=0}^{n} t_i \chi_{A_i}$, $\psi = \sum_{j=0}^{m} s_j \chi_{B_j}$

Τότε η $\alpha\varphi + \beta\psi = \sum_{i=0}^{n} (\alpha t_i) \chi_{A_i} + \sum_{j=0}^{m} (\beta s_j) \chi_{B_j}$ είναι απλή ως γραμμικός συνδυασμός απλών - παίρνει πεπερασμένες το πλήθος τιμές και είναι μετρήσιμη, γιατί οι χ_{A_i}, χ_{B_j} είναι μετρήσιμες.

Γράφουμε: $\varphi = \sum_{i=0}^{n} t_i \chi_{A_i} = \sum_{i=0}^{n} t_i \sum_{j=0}^{m} \chi_{A_i \cap B_j}$

και $\psi = \sum_{j=0}^{m} s_j \chi_{B_j} = \sum_{j=0}^{m} s_j \sum_{i=0}^{n} \chi_{A_i \cap B_j}$.

Έχουμε $\mathbb{R}^d = B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_m$ (ξένα) $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_i = (A_i \cap B_0) \cup (A_i \cap B_1) \cup \ldots \cup (A_i \cap B_m)$ (ξένα) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \chi_{A_i} = \chi_{A_i \cap B_0} + \ldots + \chi_{A_i \cap B_m}$

Τότε:

$$\int (\alpha\varphi + \beta\psi) \, d\lambda = \int \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (\alpha t_i + \beta s_j) \chi_{A_i \cap B_j} \overset{\text{ορ}}{=} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (\alpha t_i + \beta s_j) \lambda(A_i \cap B_j) =$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n} t_i \sum_{j=0}^{m} \lambda(A_i \cap B_j) + \beta \sum_{j=0}^{m} s_j \sum_{i=0}^{n} \lambda(A_i \cap B_j) =$$

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n} t_i \cdot \lambda\Big(A_i \cap \big(\bigcup B_j\big)^{\mathbb{R}^d}\Big) + \beta \sum_{j=0}^{m} s_j \cdot \lambda\Big(B_j \cap \big(\bigcup A_i\big)^{\mathbb{R}^d}\Big) =$$

$$= \alpha \int \varphi \, d\lambda + \beta \int \psi \, d\lambda$$ ■

Πόρισμα

Αν $\lambda(A_i) < \infty$, $i = 1, \dots, m$ και $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\int \sum_i a_i \chi_{A_i} \, d\lambda = \sum_i a_i \int \chi_{A_i} \, d\lambda = \sum_i a_i \lambda(A_i)$$

Απόδειξη:

Κάθε $a_i \chi_{A_i} = 0 \cdot \chi_{\mathbb{R}^d \setminus A_i} + a_i \chi_{A_i}$ είναι απλή ολοκληρώσιμη και μπορεί να χρησιμοποιηθεί η γραμμικότητα. ■

3 Ολοκλήρωμα μετρήσιμης $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ (και μετά, $\int_E f \overset{\text{ορ}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \chi_E$).

1ος τρόπος:

Υπάρχουν $\varphi_n \nearrow f$

Ορίζω $\int \varphi_n = \sum a_{n,i} \lambda(A_{n,i})$, αν $\varphi_n = \sum a_{n,i} \chi_{A_{n,i}}$

Τότε, $\int \varphi_n \le \int \varphi_{n+1}$.

Να ορίσω $\int f = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n$ (πρόβλημα με την επιλογή της φ_n).

2ος τρόπος (τον προτιμάμε):

$$\int f \, d\lambda \overset{\text{ορ}}{=} \sup \Big\{ \int \varphi \, d\lambda : \varphi \text{ απλή ολοκληρώσιμη και } 0 \le \varphi \le f \Big\}$$