Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue

Μάθημα 3ο (03-03-2015)

Εξωτερικό μέτρο Lebesgue

(1) Ζητάμε $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty]$ ώστε:

(α) Αν $I=(a_1,b_1)\times\dots\times(a_d,b_d)$, τότε $\lambda(I)=\prod_{j=1}^{d}(b_j-a_j)$

(β) $\forall E\subseteq\mathbb{R}^d$ $\forall x\in\mathbb{R}^d$ $\lambda(E+x)=\lambda(E)$

(γ) Αν (E_n) ακολουθία ξένων ανά δύο $E_n\subseteq\mathbb{R}^d$, τότε $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E_n)$

Αυτό δεν γίνεται ούτε για $d=1$.

(2) • Αν I διάστημα, ορίζουμε $\ell(I)=\prod_{j=1}^{d}(b_j-a_j)$

• $\forall E\subseteq\mathbb{R}^d$ ορίζουμε:

$$\lambda^*(E)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n) : I_n \text{ διάστημα ή } \emptyset,\ E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\}$$

Ιδιότητες του εξωτερικού μέτρου:

(1) Αν $E\subseteq\mathbb{R}^d$ είναι αριθμήσιμο, τότε $\lambda^*(E)=0$.

(2) Αν $E\subseteq F$, τότε $\lambda^*(E)\leq\lambda^*(F)$

(3) Αν $E\subseteq\mathbb{R}^d$ και $x\in\mathbb{R}^d$, τότε $\lambda^*(E+x)=\lambda^*(E)$.

Απόδειξη:

Έστω ότι $E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$, I_n διαστήματα $\Rightarrow I_n+x$ διαστήματα και $E+x\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(I_n+x)\Rightarrow\lambda^*(E+x)\leq\sum_n\ell(I_n+x)=\sum_n\ell(I_n)$

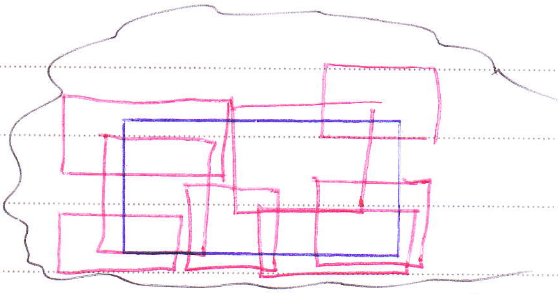
Άρα $\lambda^*(E+x)$ κάτω φράγμα για τα $\sum_n\ell(I_n)$, άρα:

$$\lambda^*(E+x)\leq\inf\left\{\sum\ell(I_n) : E\subseteq\bigcup_n I_n\right\}\underset{\text{ορ}}{=}\lambda^*(E).$$

Όμοια: $\lambda^*(E)=\lambda^*(\underbrace{(E+x)}_{E'}-x)\leq\lambda^*(E+x)$. ■

(4) Αν $E_n\subseteq\mathbb{R}^d$, $n\in\mathbb{N}$, τότε $\lambda^*\left(\bigcup_n E_n\right)\leq\sum_n\lambda^*(E_n)$ (αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα)

(5) Αν I διάστημα, τότε $\lambda^*(I)=\ell(I)$.

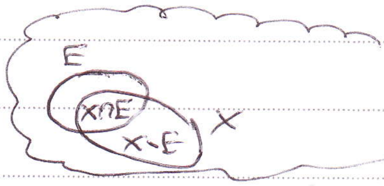


Απόδειξη:

Έγινε για $d=1$.

Άνω: $\lambda^*(E) \le \ell(I)$.

Για την αντίθετη, πρέπει, αν $I \subseteq \bigcup J_n$, ν.δ.ο. $\ell(I) \le \sum_n \ell(J_n)$ ■



Μετρήσιμα σύνολα

Ορισμός (του Καραθεοδωρή)

Θα λέμε ότι το $E \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι Lebesgue μετρήσιμο αν $\forall X \subseteq \mathbb{R}^d$ ισχύει: $\lambda^*(X) = \lambda^*(X \cap E) + \lambda^*(X \setminus E)$.

Ιδιότητες της κλάσης των μετρήσιμων συνόλων

Παρατήρηση:

Πάντα ισχύει $\lambda^*(X) = \lambda^*((X \cap E) \cup (X \setminus E)) \le \lambda^*(X \cap E) + \lambda^*(X \setminus E)$.

Άρα, για να δείξουμε ότι το E είναι μετρήσιμο ($E \in \mathcal{M}$), αρκεί να πάρουμε τυχόν $X \subseteq \mathbb{R}^d$ και να δείξουμε ότι:

$$\lambda^*(X) \ge \lambda^*(X \cap E) + \lambda^*(X \setminus E)$$

(1) Αν $\lambda^*(E) = 0$, τότε $E \in \mathcal{M}$.

Απόδειξη:

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$

Έχουμε $X \cap E \subseteq E \Rightarrow \lambda^*(X \cap E) \le \lambda^*(E) = 0 \Rightarrow \lambda^*(X \cap E) = 0$.

Επίσης, $X \setminus E \subseteq X \Rightarrow \lambda^*(X \setminus E) \le \lambda^*(X) \Rightarrow \lambda^*(X \setminus E) + \underbrace{\lambda^*(X \cap E)}_{=0} \le \lambda^*(X)$.

Άρα $E \in \mathcal{M}$. ■

(2) Αν $E \in \mathcal{M}$, τότε $E^c = \mathbb{R}^d \setminus E \in \mathcal{M}$.

Απόδειξη:

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$

Ζητούμε $\lambda^*(X) \ge \lambda^*(X \cap E) + \lambda^*(X \setminus E) = \lambda^*(X \cap (E^c)^c) + \lambda^*(X \cap E^c) =$

$= \lambda^*(X \setminus E^c) + \lambda^*(X \cap E^c)$. ■

(3) Αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \cup B \in \mathcal{M}$.

Απόδειξη:

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^d$

Ζητούμε $\lambda^*(X \cap (A \cup B)) + \lambda^*(\underbrace{X \setminus (A \cup B)}_{X \cap A^c \cap B^c}) \leq \lambda^*(X)$.

Βάζοντας $Y = X \cap A^c$ και χρησιμοποιώντας την $B \in \mathcal{M}$, έχουμε: $\lambda^*(Y) \geq \lambda^*(Y \cap B) + \lambda^*(Y \cap B^c) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda^*(X \cap A^c) \geq \lambda^*(X \cap A^c \cap B) + \lambda^*(X \cap A^c \cap B^c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^*(X) \geq \underbrace{\lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap A^c)}_{A \in \mathcal{M}} \geq \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap (B \setminus A)) + \lambda^*(X \cap A^c \cap B^c)$$

$$\underset{(\text{υποπρ})}{\geq} \lambda^*(X \cap [A \cup (B \setminus A)]) + \lambda^*(X \cap A^c \cap B^c) =$$

$$= \lambda^*(X \cap (A \cup B)) + \lambda^*(X \cap A^c \cap B^c) \quad \blacksquare$$

(4) Αν $A, B \in \mathcal{M}$, τότε $A \cap B \in \mathcal{M}$.

Απόδειξη:

$A^c, B^c \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \cup B^c \in \mathcal{M} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{M}$. $\blacksquare$

Λήμμα

Αν $A, B \in \mathcal{M}$ και $A \cap B = \emptyset$, τότε $\forall X \subseteq \mathbb{R}^d$ ισχύει:

$$\lambda^*(X \cap (A \cup B)) = \lambda^*(X \cap A) + \lambda^*(X \cap B).$$

Πορίσματα

(α) Αν $A, B \in \mathcal{M}$ και $A \cap B \neq \emptyset$, τότε: $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$.

Απόδειξη:

Θέτουμε $X = \mathbb{R}^d$ στο Λήμμα. $\blacksquare$

(β) Αν $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{M}$ ξένα ανά δύο, τότε $\forall X \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$\lambda^*(X \cap (B_1 \cup \dots \cup B_m)) = \sum_{j=1}^{m} \lambda^*(X \cap B_j)$$

Απόδειξη:

$$\lambda^*(X\cap(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_m)) = \lambda^*(X\cap(B_1\cup(B_2\cup\ldots\cup B_m))) =$$
$$= \lambda^*(X\cap B_1) + \lambda^*(X\cap(B_2\cup\ldots\cup B_m)) \xrightarrow[\text{βήμα}]{\text{επαγ.}}$$
$$= \sum_{j=1}^{m}\lambda^*(X\cap B_j). \quad \blacksquare$$

Απόδειξη του λήμματος

Αφού το A είναι μετρήσιμο, για το $Y = X\cap(A\cup B)$, έχουμε

$$\lambda^*(X\cap(A\cup B)) = \lambda^*(Y) = \lambda^*(Y\cap A) + \lambda^*(Y\cap A^c) =$$
$$= \lambda^*(X\cap[(A\cup B)\cap A]) + \lambda^*(X\cap[(A\cup B)\cap A^c]) =$$
$$= \lambda^*(X\cap A) + \lambda^*(X\cap B). \quad \blacksquare$$

(5) Αν $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία συνόλων στο $\mathcal{M}$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Απόδειξη:

Ορίζουμε B_j ξένα ανά δύο ώστε:

"$\forall m \quad A_1\cup\ldots\cup A_m = B_1\cup\ldots\cup B_m$".

Πώς: $B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 \setminus A_1$ $\quad$ ($B_1\cup B_2\cup B_3 = A_1\cup A_2\cup A_3$ κτλ).

$B_3 = A_3\setminus(A_1\cup A_2)$

$\vdots$

Παρατηρούμε ότι $B_j\in\mathcal{M}$.

Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι $\bigcup_n B_n\in\mathcal{M}$ και τώρα τα B_n είναι ξένα.

Έστω $X\subseteq\mathbb{R}^d$

Ζητάμε $\lambda^*(X) \geq \lambda^*(X\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)) + \lambda^*(X\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)$

Σταθεροποιούμε ένα $m\in\mathbb{N}$.

Από το Πόρισμα (β) του Λήμματος, έχουμε:

$$\lambda^*(X\cap\bigcup_{n=1}^{m}B_n) = \sum_{n=1}^{m}\lambda^*(X\cap B_n).$$

Αφού $\bigcup_{n=1}^{m} B_n \in \mathcal{M}$ έχουμε:

$$\lambda^*(X) \geq \lambda^*(X \cap (\bigcup_{n=1}^{m} B_n)) + \lambda^*(X \setminus \bigcup_{n=1}^{m} B_n) \geq \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(X \cap B_n) + \lambda^*(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$$

$$X \setminus \bigcup_{n=1}^{m} B_n \supseteq X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

Αφήνοντας το $m \to \infty$, έχουμε:

$$\lambda^*(X) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(X \cap B_n) + \lambda^*(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \geq$$

$$\overset{\text{αριθμ.}}{\underset{\text{υποπρ.}}{\geq}} \lambda^*(X \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)) + \lambda^*(X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n). \quad \blacksquare$$

(6) Αν $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ ξένα ανά δύο, τότε $\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$

Απόδειξη:

Από αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του λ^*,

$$\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Για την "$\geq$":

Έχουμε, από μονοτονία: $\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq \lambda^*(\bigcup_{n=1}^{m} A_n) \overset{\text{παρ.(α)}}{=\!=} \sum_{n=1}^{m} \lambda^*(A_n)$

Αφήνοντας το $m \to \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) \leq \lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$. $\blacksquare$

<u>Ορισμός</u>

Έστω $X \neq \emptyset$.

Μια οικογένεια $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του X, λέγεται <u>σ-άλγεβρα</u> αν:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$

<u>Θεώρημα 1</u>

Η κλάση $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ είναι σ-άλγεβρα. (που περιέχει όλα τα αριθμήσιμα $\subseteq \mathbb{R}^d$)

<u>Ορισμός</u> (μέτρο Lebesgue)

Η $\lambda \underset{\text{ορ.}}{\equiv} \lambda^*|_{\mathcal{M}}$ που απεικονίζει κάθε $A \in \mathcal{M}$ στο $\lambda(A) = \lambda^*(A)$ λέγεται μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^d$.

<u>Θεώρημα 2</u>

- Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ξένα ανά δύο σύνολα της $\mathcal{M}$, τότε:
  $\lambda(\cup A_n) = \sum_n \lambda(A_n)$ (αριθμήσιμη προσθετικότητα)
- Αν $A \in \mathcal{M}$ και $x \in \mathbb{R}^d$, τότε $\lambda(A+x) = \lambda^*(A+x) = \lambda^*(A) = \lambda(A)$.
  (αναλλοίωτο ως προς μεταφορές).

<u>Ερώτημα:</u> Πόσο "πλούσια" είναι η $\mathcal{M}$;

<u>Πρόταση</u>

Κάθε ορθογώνιο I στον $\mathbb{R}^d$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

<u>$d=1$</u>: Κάθε $[a,b] \in \mathcal{M} \Rightarrow (a,b), (a,b], [a,b) \in \mathcal{M} \Rightarrow$ ημιευθείες $\in \mathcal{M}$.
Κάθε ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη ένωση ανοιχτών διαστημάτων $\Rightarrow G \in \mathcal{M} \Rightarrow$ κάθε κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$ είναι στην $\mathcal{M} \Rightarrow$
$\Rightarrow G_\delta, F_\sigma$ είναι μετρήσιμα $\Rightarrow G_{\delta\sigma}, F_{\sigma\delta}, G_{\delta\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}, \dots \in \mathcal{M}$.