Ανάλυση Fourier & Ολοκλήρωμα Lebesgue

Μάθημα 2ο (26-02-2015)

Διάστημα:
- στο $\mathbb{R}$: $[\alpha,\beta]$ (ή $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$, (α,β)), $\alpha<\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
- στο $\mathbb{R}^2$: $[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$
- στο $\mathbb{R}^d$: $[a_1,b_1]\times\dots\times[a_d,b_d]$

Όγκος διαστήματος:
- $\ell([\alpha,\beta])=\beta-\alpha$
- $\ell([\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta])=(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)$.

Στόχος: Να ορίσουμε τον "όγκο" όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, του $\mathbb{R}^2$, ...

Ζητάμε $\lambda : P(\mathbb{R}^d)\longrightarrow[0,+\infty]$

Ιδιότητες που ζητάμε:

(1) $\forall E\subseteq\mathbb{R}^d \quad \lambda(E)\in[0,+\infty]$

(2) Αν $I\subseteq\mathbb{R}^d$ διάστημα, $\lambda(I)=\ell(I)$

(3) Αριθμήσιμη προσθετικότητα:
Αν $E_1, E_2, \dots$ ξένα ανά δύο $\subseteq\mathbb{R}^d$, τότε

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E_n)$$

(4) Αναλλοίωτο ως προς μεταφορές:
Για κάθε $E\subseteq\mathbb{R}^d$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}^d$:

$$\lambda(E+x)=\lambda(E)$$

Πρόταση

Ήδη στην περίπτωση του $\mathbb{R}$ δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση λ.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει τέτοια λ.

Θεωρούμε το $[0,1]$ και ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας στο $[0,1]$ ως εξής:

"$x \sim y$ αν και μόνον αν $x-y \in \mathbb{Q}$".

Θεωρούμε τις κλάσεις ισοδυναμίας της $\sim$, E_a, $a \in A$.

(1) Κάθε E_a είναι αριθμήσιμο σύνολο.

[Αν $x \in E_a$, τότε κάθε $y \in E_a$ είναι της μορφής $y = x + q$, $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow E_a \subseteq x + \mathbb{Q} \rightarrow$ αριθμήσιμο]

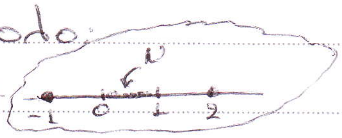
(2) $[0,1] = \bigcup_{a \in A} E_a$ και αφού το $[0,1]$ είναι υπεραριθμήσιμο, το πλήθος $|A|$ των E_a είναι υπεραριθμήσιμο.

Επιλέγουμε ακριβώς ένα σημείο x_a από κάθε κλάση E_a και ορίζουμε: $N = \{x_a : a \in A\}$, το οποίο είναι υπεραριθμήσιμο.

(Χρησιμοποιούμε το ΑΞΙΩΜΑ της ΕΠΙΛΟΓΗΣ)

Για κάθε ρητό $r \in [-1,1]$ θεωρούμε το σύνολο:

$N_r = r + N$ (μεταφέραμε το N κατά r)



Για κάθε $r \in [-1,1]$ έχουμε $N_r \subseteq [-1,2] \Rightarrow \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} N_r \subseteq [-1,2]$.

Ισχυρισμός 1: $[0,1] \subseteq \bigcup N_r$

Έστω $x \in [0,1]$.

Υπάρχει $a \in A$: $x \in E_a$.

Θεωρώ το $x_a \in E_a \cap N$

Τότε $x \sim x_a \Rightarrow x - x_a \in \mathbb{Q}$ και $x - x_a \in [-1,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists r \in [-1,1] \cap \mathbb{Q} : x = x_a + r \Rightarrow x \in N_r$

Ισχυρισμός 2: Αν $r \neq s$, τότε $N_r \cap N_s = \emptyset$.

Έστω $r \neq s$ και $\begin{cases} y \in N_r \Rightarrow y = x_a + r \\ y \in N_s \Rightarrow y = x_\beta + s. \end{cases}$

Τότε $x_a - x_\beta = s - r \in \mathbb{Q} \Rightarrow x_a \sim x_\beta \Rightarrow a = \beta \Rightarrow r = s$, άτοπο.

Γράφουμε:

$$\lambda([0,1]) \underset{(\text{Ισχ. }1)}{\le} \lambda\Big(\bigcup N_r\Big) \le \lambda([-1,2]) \Rightarrow$$

(Ισχ. 2)
$$\Rightarrow \quad 1 \le \sum_{r\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} \lambda(N_r) \le 3 \quad \Rightarrow \quad (\forall r \;\; \lambda(N_r)=\lambda(r+N)=\lambda(N))$$

$$\Rightarrow \quad 1 \le \sum \lambda(N) \le 3$$

Άτοπο: Αν $\lambda(N)>0$, τότε $\sum\lambda(N)=+\infty$ (≤ 3)

Αν $\lambda(N)=0$, τότε $\sum\lambda(N)=0$ (≥ 1). ■

Εργασία 1:
Το αξίωμα της επιλογής είναι απαραίτητο για να δοθεί παράδειγμα μη μετρήσιμων συνόλων.

Παρατήρηση

Ας υποθέσουμε ότι ζητάμε "λιγότερα" από την λ.
Δηλαδή, τα (1), (2), (4) και:

(3') Πεπερασμένη προσθετικότητα:
Αν $m\in\mathbb{N}$ και $E_1, E_2, \dots, E_m$ ξένα ανά δύο $\subseteq \mathbb{R}$,
τότε $\lambda(E_1\cup\dots\cup E_m)=\lambda(E_1)+\lambda(E_2)+\dots+\lambda(E_m)$

Για $d\ge 3$ δεν υπάρχει τέτοια λ.

Θεώρημα

Αν $d\ge 3$ και B_1, B_2 είναι δύο μπάλες στον $\mathbb{R}^d$, τότε
$\exists m\in\mathbb{N}$ και E_i, E_i', $1\le i\le m$, ώστε:

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= E_1\cup\dots\cup E_m \\ B_2 &= E_1'\cup\dots\cup E_m' \end{aligned}\right\} \text{ και } \forall i \;\; E_i' \text{ μετακίνηση του } E_i$$

$(\lambda(B_2)=\sum\lambda(E_i')=\sum\lambda(E_i)=\lambda(B_1)$, άτοπο$)$

Εργασία 2:
Παράδοξο Banach - Tarski

Ο ορισμός του μέτρου Lebesgue

Η αρχική ιδέα:

Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 1$ ή 2)

Αν $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία από ανοιχτά διαστήματα (Θεωρούμε και το $\emptyset$ σαν ανοιχτό διάστημα)

Λέμε ότι η $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του E αν $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Είναι λογικό να περιμένουμε ότι:

$$"\lambda"(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n)$$

και με οικονομική επιλογή των I_n "προσεγγίζουμε" το μέγεθος του E.

Ορισμός (εξωτερικό μέτρο Lebesgue).

Για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ορίζουμε:

$$\lambda^*(E) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : (I_n) \text{ κάλυψη του } E,\ I_n \text{ ανοιχτά διαστήματα} \right\}.$$

Παρατηρήσεις

(1) Κάθε E έχει ανοιχτή κάλυψη: $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-n,n) \times (-n,n) \times \ldots \times (-n,n)}_{d\text{-φορές}}$

(2) Συμφωνούμε ότι $\inf\{+\infty\} = +\infty$.
(Αν για κάθε κάλυψη του E έχουμε $\sum \ell(I_n) = +\infty$, τότε συμφωνούμε ότι $\lambda^*(E) = +\infty$)

(3) Αν $\lambda^*(E) < \infty$, από τον χαρακτηρισμό του infimum:
"Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει κάλυψη (I_n) του E: $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \lambda^*(E) + \varepsilon$"

Ιδιότητες

(α) Μονοτονία:

Αν $E \subseteq F$, τότε $\lambda^*(E) \le \lambda^*(F)$.

Απόδειξη:

Αν $F \subseteq \cup I_n$, τότε $E \subseteq \cup I_n$.

Άρα, $\{\sum \ell(I_n) : E \subseteq \cup I_n\} \supseteq \{\sum \ell(I_n) : F \subseteq \cup I_n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf\{\sum \ell(I_n) : E \subseteq \cup I_n\} \le \inf\{\sum \ell(I_n) : F \subseteq \cup I_n\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^*(E) \le \lambda^*(F)$. ■

(β) Αν το E είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο $\subseteq \mathbb{R}^d$, τότε $\lambda^*(E) = 0$.

Απόδειξη:

Έστω $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Έστω $\varepsilon > 0$.

Θα βρούμε (I_n): $E \subseteq \bigcup_n I_n$ και $\sum \ell(I_n) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^*(E) \le \sum \ell(I_n) < \varepsilon \xRightarrow{\varepsilon \text{ τυχόν}} \lambda^*(E) = 0$.

Για κάθε n βρίσκουμε ανοιχτό κύβο I_n που περιέχει το x_n με $\ell(I_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Τότε $E = \cup\{x_n\} \subseteq \cup I_n$ και $\lambda^*(E) \le \sum_n \ell(I_n) \le \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. ■

[Σημείωση: Υπάρχουν υπεραριθμήσιμα $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(E) = 0$ (π.χ. το σύνολο του Cantor).]

(γ) Αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα:

Αν (E_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, τότε:

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$$

Απόδειξη:

• Αν το δεξιό μέλος είναι $+\infty$, δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα.

• Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) < \infty$, τότε $\forall n$ (και τυχόν $\varepsilon>0$) βρίσκουμε $E_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$ ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{n,k}) < \lambda^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Η $(I_{n,k})_{n,k=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη της $\bigcup E_n$:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$$

και

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) + \varepsilon$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, $\lambda^*(\bigcup E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n)$ ■

(δ) $\forall E \ \forall x \quad \lambda^*(E+x) = \lambda^*(E)$. (Απόδειξη: Αναβάλλεται...)

(ε) Αν I κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$, τότε:

$$\lambda^*(I) = \ell(I)$$

Απόδειξη:

Έχουμε $I = [a,b]$

$$\lambda^*(I) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) : [a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)\right\} \overset{\circledast}{=} b - a = \ell(I)$$

Για το $\circledast$:

• Έστω $\varepsilon>0$.

Θεωρώ το $(a-\varepsilon/2,\ b+\varepsilon/2) \supseteq [a,b]$

Άρα $\lambda^*(I) \leq b+\varepsilon/2 - (a-\varepsilon/2) = b-a+\varepsilon = \ell(I)+\varepsilon$.

Αφού ε τυχόν $\Rightarrow \lambda^*(I) \leq \ell(I)$.

• Θεωρούμε τυχούσα κάλυψη $[a,b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_k,b_k)$ και θα δείξουμε ότι: $\ell(I) = b-a \leq \sum_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k) \Rightarrow \ell(I) \leq \inf\{\sum_k (b_k-a_k)\} = \lambda^*(I)$

Το $[a,b]$ είναι συμπαγές, άρα $\exists N\in\mathbb{N} : [a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{N}(a_k,b_k)$

Μπορώ να υποθέσω ότι $a\in(a_1,b_1)$ και ότι $b_1 \leq b$ (αλλιώς έχουμε τελειώσει).

Τότε $[b_1, b] \subseteq \bigcup_{k=2}^{N} (a_k, b_k) \xRightarrow[\text{στο } N]{\text{Επαγωγή}}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b - b_1 \leq \sum_{k=2}^{N} (b_k - a_k) \\ b_1 - a \leq b_1 - a_1 \end{array}\right\} \oplus \Rightarrow b - a \leq \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k)$$

$\blacksquare$