Το θεώρημα του Vinogradov

Μάριος Αντώνιος Απετροάιε και Ελευθέριος Μπόλκας

Περίληψη

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε την απόδειξη του θεωρήματος του Vinogradov, το οποίο δείχνει ότι όλοι οι αρκετά μεγάλοι περιττοί αριθμοί γράφονται ως άθροισμα τριων πρώτων αριθμών. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μία λιγότερο ισχυρή μορφή της ασθενής εικασίας του Goldbach, η οποία λέει ότι η αναπαράσταση αυτή είναι δυνατή για όλους τους περιττούς αριθμούς. Η απόδειξη βασίζεται στα πρωτεύοντα και ελάσσονα τόξα. Για κάποια από τα ενδιάμεσα αποτελέσματα οι αποδείξεις θα παραλειφθούν.

1 Εισαγωγή

Ορισμός 1.1 Η συνάρτηση von Mangoldt ορίζεται ως

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{για } n = p^k \text{ με } p \text{ πρώτο} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Θέτουμε

$$r(n) = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} \Lambda(k_1)\Lambda(k_2)\Lambda(k_3)$$

Η $r(n)$ μετράει το πλήθος των τρόπων που μπορεί να γραφεί το ν ώς άθροισμα τριων αριθμών όπου καθένας από αυτούς είναι είτε πρώτος είτε δύναμη πρώτου, όπου σε κάθε τέτοιο τρόπο επισυνάπτουμε βάρος $\Lambda(k_1)\Lambda(k_2)\Lambda(k_3)$. Αν δεν υπάρχει καμία τέτοια αναπαράσταση, τότε $r(n) = 0$. Επίσης μπορούμε να δούμε ότι συνεισφορά των δυνάμεων πρώτων αριθμών στο άθροισμα είναι μικρότερη από αυτή των πρώτων. Αυτό σε συνδυασμό με το ότι η $r(n)$ έχει θετικό κάτω φράγμα για μεγάλους περιττούς αριθμούς, θα μας δώσει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Θεωρούμε τώρα μία αυθαίρετη σταθερά N και τη συνάρτηση

$$S(\alpha) = \sum_{k \le N} \Lambda(k) e^{2\pi k i \alpha}$$

και από αυτή παίρνουμε

$$S^3(\alpha) = \sum_{k_1,k_2,k_3 \le N} \Lambda(k_1)\Lambda(k_2)\Lambda(k_3) e^{2\pi(k_1+k_2+k_3)i\alpha} =$$

$$= \sum_n \left(\sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=n,\\ k_1,k_2,k_3 \le N}} \Lambda(k_1)\Lambda(k_2)\Lambda(k_3) \right) e^{2\pi n i \alpha}$$

Θέτουμε

$$r(n,N) = \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=n,\\ k_1,k_2,k_3 \le N}} \Lambda(k_1)\Lambda(k_2)\Lambda(k_3)$$

και παρατηρούμε ότι $r(n,N) = r(n)$ για $n \le N$ ενώ για μεγάλες τιμές του n η $r(n,N)$ ισούται με 0. Τώρα η $S^3(\alpha)$ γράφεται ως

$$\sum_n r(n,N) e^{2\pi n i \alpha}$$

που είναι μία σειρά Fourier και ο συντελεστής Fourier της $r(N)$ είναι ο

$$(1.2) \quad r(N) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} S^3(\alpha) e^{-2\pi i N \alpha} d\alpha$$

όπου το $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ είναι η ομάδα πηλίκο των πραγματικών αριθμών προς τους ακεραίους. Ξέρουμε ότι το πηλίκο αυτό είναι ισόμορφο με τον κύκλο, οπότε μπορούμε να σκεφτόμαστε την ολοκλήρωση σαν ολοκλήρωση πάνω στον κύκλο. Για να φράξουμε αυτό το ολοκλήρωμα θα το γράψουμε σαν άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων, καθένα από τα οποία θα είναι ένα ολοκλήρωμα πάνω σε κάποια υποδιαστήματα του $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Τα διαστήματα αυτά θα είναι τα πρωτεύοντα και τα ελάσσονα τόξα.

2 Ορισμοί

Ορισμός 2.1 Για σταθερές n και B, θέτουμε $P = \log^B(n)$ και $Q = \frac{n}{\log^{2B}(n)}$. Τότε για κάθε $q \le P$ και b τέτοιο ώστε $1 \le b \le q$ όπου ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των b και q είναι 1 (στο εξής $(b,q) = 1$), θέτουμε

$$\mathfrak{M}(b,q) = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : \left| \alpha - \frac{b}{q} \right| \le \frac{1}{Q} \right\}$$

Επιπλέον θέτουμε ως $\mathfrak{M}$ την ένωση όλων των $\mathfrak{M}(b,q)$ και $\mathfrak{m}$ το συμπλήρωμα του $\mathfrak{M}$ στο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Τα $\mathfrak{M}(b,q)$ τα ονομάζουμε πρωτεύοντα τόξα ενώ τα διαστήματα του $\mathfrak{m}$ τα ονομάζουμε ελάσσονα τόξα.

Λήμμα 2.2 Το $\mathfrak{m}$ είναι μη κενό.

Απόδειξη. Κάθε δύο πρωτεύοντα τόξα είναι ξένα. Πράγματι αν πάρουμε $\frac{b}{q} \neq \frac{b'}{q'}$ όπως στον ορισμό, τότε για μεγάλα N ισχύει $Q > 2P^2$ και άρα

$$\left|\frac{b}{q} - \frac{b'}{q'}\right| \geq \frac{1}{qq'} > \frac{2}{Q}.$$

Άρα το $\mathfrak{M}$, που είναι η πεπερασμένη ένωση των ξένων κλειστών διαστημάτων $\mathfrak{M}(b, q)$ δεν ισούται με το $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και συνεπώς το $\mathfrak{m}$ είναι μη κενό.

□

Στη συνέχεια της απόδειξης θα γράψουμε

$$r(N) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} S^3(\alpha)e^{-2\pi iN\alpha}d\alpha = \int_{\mathfrak{M}} S^3(\alpha)e^{-2\pi iN\alpha}d\alpha + \int_{\mathfrak{m}} S^3(\alpha)e^{-2\pi iN\alpha}d\alpha$$

και θα φράξουμε καθένα από τα δύο ολοκληρώματα του αθροίσματος.
Δίνουμε τώρα κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 2.3 Για ακεραίους a και q η κλάση υπολοίπων του $a \bmod q$ ορίζεται ως $[a]_q = \{a + qn : n \in \mathbb{Z}\}$ Τον αριθμό a τον ονομάζουμε αντιπρόσωπο της κλάσης υπολοίπων.

Ορισμός 2.4 Το σύνολο των κλάσεων υπολοίπων $\bmod q$ είναι οι ακέραιοι mod q και το συμβολίζουμε $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Δηλαδή

$$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} = \{[a]_q : a \in \mathbb{Z}\}$$

Ορισμός 2.5 Χαρακτήρας Dirichlet modulus q είναι κάθε συνάρτηση $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ που πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες :
1) $\chi(n + q) = \chi(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$
2) Αν $(n, q) \neq 1$ τότε $\chi(n) = 0$. Αν $(n, q) = 1$ τότε $\chi(n) \neq 0$
3) Για όλους τους ακέραιους m και n ισχύει ότι $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$.

Από τις παραπάνω ιδιότητες προκύπτει εύκολα και ότι αν $(n, q) = 1$ τότε το $\chi(n)$ είναι $\phi(n)$-οστή ρίζα της μονάδας (όπου ϕ εδώ και στη συνέχεια είναι η συνάρτηση του Euler) και ειδικότερα $|\chi(n)| = 1$.

Ένας τέτοιος χαρακτήρας Dirichlet λέγεται κύριος αν

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{για ν με } (n, q) \neq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Τον κύριο χαρακτήρα Dirichlet θα τον συμβολίζουμε χ_0. Το σύνολο όλων των χαρακτήρων Dirichlet modulo χ θα το συμβολίζουμε με $\widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}$. Το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο και

έχει $\phi(q)$ στοιχεία.
Παραθέτουμε τώρα χωρίς απόδειξη κάποιες ιδιότητες ορθογωνιότητας του χαρακτήρα Dirichlet. Στο εξής, όταν η επιλογή ενός αντιπροσώπου a μια κλάσης υπολοίπων $[a]_q$ δεν επηρεάζει τα γραφόμενα, θα συμβολίζουμε την κλάση υπολοίπων απλά με a.

Πρόταση 2.6 1) Ισχύει ότι

$$\sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}} \chi(n) = \begin{cases} \phi(q), & \text{για ν με } n \equiv 1 \bmod q \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

2) Αν χ είναι ένας χαρακτήρας Dirichlet modulo q τότε

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \chi(n) = 0$$

εκτός αν ο χ είναι κύριος όπου το άθροισμα ισούται με $\phi(q)$.

3 Πρωτεύοντα τόξα

Θεωρούμε το πρωτεύον τόξο $\mathfrak{M}(b, q)$. Για κάθε χαρακτήρα Dirichlet modulus q θεωρούμε το άθροισμα του Gauss

$$\tau(\chi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \chi(m) e^{\frac{2\pi i m}{q}}.$$

Θεωρούμε επίσης το πεπερασμένο άθροισμα

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}} \chi(n) \tau(\overline{\chi})$$

όπου $\overline{\chi}$ είναι ο μιγαδικός συζυγής του χ, δηλαδή $\overline{\chi}(n) = \overline{\chi(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Από τη δεύτερη ιδιότητα του ορισμού 2.5 έχουμε ότι

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}} \chi(n) \tau(\overline{\chi}) = 0$$

για $(n, q) \neq 1$. Όμως για $(n, q) = 1$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}} \chi(n) \tau(\overline{\chi}) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}} \sum_{m \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \chi(n) \overline{\chi(m)} e^{\frac{2\pi i m}{q}}.$$

Επειδή $(n,q)=1$, για κάθε $m \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ υπάρχει $h \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $m \equiv \ nh \bmod q$ και άρα καθώς το h διατρέχει το $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ το nh διατρέχει το $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Άρα

$$\frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}} \sum_{m \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \chi(n)\overline{\chi(m)} e^{\frac{2\pi i m}{q}} = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}} \sum_{h \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \chi(n)\overline{\chi(nh)} e^{\frac{2\pi i nh}{q}} =$$

$$= \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}} \sum_{h \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \overline{\chi(h)} e^{\frac{2\pi i nh}{q}} = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{h \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} e^{\frac{2\pi i nh}{q}} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}} \overline{\chi(h)} =$$

$$= e^{\frac{2\pi i n}{q}}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της πρότασης για την ορθογωνιότητα (το 1 στην Πρόταση 2.6). Άρα έχουμε την

$$e^{\frac{2\pi i n}{q}} = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}} \chi(n)\tau(\overline{\chi}) \tag{3.1}$$

Στη συνάρτηση $S(\alpha)$ επειδή δουλεύουμε για τα $\alpha \in \mathfrak{M}(b,q)$ παίρνουμε $\alpha = \frac{b}{q} + c$. Τότε

$$S(\alpha) = \sum_{\substack{k \leq N, \\ (k,q)=1}} \Lambda(k) e^{2\pi k i (\frac{b}{q}+c)} + O(\log^2(N))$$

Το σφάλμα προκύπτει από το ότι το άθροισμα περιορίζεται στα k για τα οποία $(k,q)=1$. Αυτό το άθροισμα με χρήση της (3.1) και του ότι $\chi(ka)=0$ για $(k,q) \neq 1$ γίνεται

$$S(\alpha) = \sum_{k \leq N} \Lambda(k) \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}} \chi(kb)\tau(\overline{\chi}) e^{2\pi k i c} + O(\log^2(N)) = \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}} \tau(\overline{\chi})\chi(b) \sum_{k \leq N} \chi(k)\Lambda(k) e^{2\pi k i c} + O(\log^2(N))$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την εξής μορφή της άθροισης κατά μέρη:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{j=1}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) \sum_{k=1}^{j} b_k$$

Με αυτήν έχουμε ότι

$$\sum_{k \leq N} \chi(k)\Lambda(k) e^{2\pi k i c} = e^{2\pi i N c} \sum_{n \leq N} \chi(n)\Lambda(n) - \sum_{j=1}^{N-1} \left(e^{2\pi (j+1) i c} - e^{2\pi j i c} \right) \sum_{k=1}^{j} \chi(k)\Lambda(k) =$$

$$= e^{2\pi iNc}\sum_{n\le N}\chi(n)\Lambda(n) - 2\pi ic\sum_{j=1}^{N-1}\int_j^{j+1} e^{2\pi iuc}du\sum_{k=1}^{j}\chi(k)\Lambda(k) =$$

$$= e^{2\pi iNc}\sum_{n\le N}\chi(n)\Lambda(n) - 2\pi ic\sum_{j=1}^{N-1}\int_j^{j+1} e^{2\pi iuc}\sum_{k\le u}\chi(k)\Lambda(k)du =$$

$$= e^{2\pi iNc}\sum_{n\le N}\chi(n)\Lambda(n) - 2\pi ic\int_1^{N} e^{2\pi iuc}\sum_{n\le u}\chi(n)\Lambda(n)du$$

Δηλαδή

$$(3.3)\ \sum_{k\le N}\chi(k)\Lambda(k)e^{2\pi kic} = e^{2\pi iNc}\sum_{n\le N}\chi(n)\Lambda(n) - 2\pi ic\int_1^{N} e^{2\pi iuc}\sum_{n\le u}\chi(n)\Lambda(n)du$$

Ορίζουμε τώρα

$$\psi(x,\chi) = \sum_{n\le x}\chi(n)\Lambda(n)$$

Άρα η (3.3) ξαναγράφεται ως

$$\sum_{k\le N}\chi(k)\Lambda(k)e^{2\pi kic} = e^{2\pi iNc}\psi(N,\chi) - 2\pi ic\int_1^{N} e^{2\pi iuc}\psi(u,\chi)du \tag{3.4}$$

Έχουμε τώρα το εξής σημαντικό λήμμα την απόδειξη του οποίου θα παραλείψουμε.

Λήμμα 3.5 Έστω χ ένας μη κύριος χαρακτήρας Dirichlet modulus q. Αν

$$q \le \log^M(x)$$

για μία θετική σταθερά M, τότε

$$|\psi(x,\chi)| = O(xe^{-C(M)\sqrt{\log(x)}})$$

για κάποια θετική σταθερά $C(M)$ η οποία είναι σταθερά M.

Εφαρμόζουμε αυτό το Λήμμα στην (3.4) για να πάρουμε ένα φράγμα για τους μη κύριους χαρακτήρες Dirichlet.

$$\sum_{k\le N}\chi(k)\Lambda(k)e^{2\pi kic} = O((1+|c|N)Ne^{-K\sqrt{\log N}})$$

Επειδή το Λήμμα δεν μας βοηθά στο να φράξουμε τη συνεισφορά του κύριου χαρακτήρα Dirichlet χ_0 θα δουλέψουμε διαφορετικά γι' αυτόν. Η συνάρτηση του Chebyshev ορίζεται ως

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n)$$

Τότε έχουμε ότι

$$|\psi(x,\chi_0) - \psi(x)| \le \sum_{\substack{n\le x,\\ (n,q)\neq 1}} \Lambda(n) = O(\log(q)\log(x)).$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των πρώτων αριθμών παίρνουμε το εξής φράγμα για την $\psi(x)$

$$\psi(x) = x + O(xe^{-K\sqrt{\log x}}).$$

Θέτουμε τώρα $R(u) = \psi(u,\chi_0) - \lfloor u \rfloor$ και παίρνουμε

$$R(u) = O(ue^{-K\sqrt{\log u}}) \tag{3.6}$$

Ορίζουμε επίσης

$$T(c) = \sum_{1\le k\le N} e^{2\pi i k c}$$

Όπως πριν, με άθροιση κατά μέρη βρίσκουμε ότι

$$T(c) = Ne^{2\pi Nc} - 2\pi c \int_1 Ne^{2\pi c u} \lfloor u \rfloor \, du.$$

Εφαρμόζουμε αυτό στην (3.4) και παίρνουμε

$$\sum_{k\le N} \chi_0(k)\Lambda(k)e^{2\pi kic} = T(c) + e^{2\pi i N c}R(N) - 2\pi i c\int_1^N e^{2\pi i u c}R(u)du$$

και χρησιμοποιώντας την (3.6) έχουμε

$$T(c) + e^{2\pi i N c}R(N) - 2\pi i c\int_1^N e^{2\pi i u c}R(u)du = T(c) + O((1+|c|N)Ne^{-K\log N}).$$

Άρα η συνεισφορά του κύριου χαρακτήρα Dirichlet στην $S(\alpha)$ δίνεται από την

$$\sum_{k\le N} \chi_0(k)\Lambda(k)e^{2\pi kic} = T(c) + O((1+|c|N)Ne^{-K\log N})$$

ενώ του μη κύριου όπως βρήκαμε παραπάνω από την

$$\sum_{k\le N} \chi(k)\Lambda(k)e^{2\pi kic} = O((1+|c|N)Ne^{-K\sqrt{\log N}}).$$

Συνδυάζοντας αυτά τα δύο στη σχέση (3.2) βρίσκουμε την ακόλουθη σχέση (3.7)

$$S(\alpha) = \frac{1}{\phi(q)} \left(\tau(\chi_0)T(c) + O((1+|c|N)Ne^{-K\sqrt{\log N}}) + \sum_{\substack{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}}, \\ \chi \neq \chi_0}} \tau(\overline{\chi})\chi(b) \left(O((1+|c|N)Ne^{-K\sqrt{\log N}}) \right) \right).$$

Έτσι κάναμε μία πρώτη εκτίμηση την οποία στη συνέχεια θα βελτιώσουμε.
Δίνουμε τώρα τον ορισμό της συνάρτησης Mobius.

Ορισμός 3.8 Η συνάρτηση Mobius $\mu : \mathbb{N} \to \{-1, 0, 1\}$ ορίζεται ως

$$\mu(q) = \begin{cases} 1, & \text{αν έχει άρτιο αριθμό πρώτων παραγόντων και } \nexists n^2 > 1 : n^2 | q \\ -1, & \text{αν έχει περιττό αριθμό πρώτων παραγόντων και } \nexists\, n^2 > 1 : n^2 | q \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Λήμμα 3.9 Έστω $\tau(\chi_0)$ ένα άθροισμα Gauss και $\mu(q)$ η συνάρτηση Mobius. Τότε

$$\tau(\chi_0) = \mu(q).$$

Απόδειξη.

$$\tau(\chi_0) = \sum_{m=1}^{q} \chi_0(m) e^{\frac{2\pi i m}{q}} = \sum_{\substack{m \leq q, \\ (m,q)=1)}} \chi_0(m) e^{\frac{2\pi i m}{q}}.$$

Είναι όμως γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης Mobius η

$$\sum_{\substack{m \leq q, \\ (m,q)=1)}} \chi_0(m) e^{\frac{2\pi i m}{q}} = \mu(q)$$

και άρα προκύπτει το ζητούμενο.

□

Ισχύει ακόμα το ακόλουθο λήμμα του οποίου την απόδειξη επίσης παραλείπουμε.

Λήμμα 3.10 Έστω $\tau(\chi)$ ένα άθροισμα Gauss. Τότε

$$|\tau(\chi)| \leq \sqrt{q}.$$

Εφαρμόζοντας τα δύο τελευταία λήμματα στην (3.7) παίρνουμε

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)} T(c) + O((1+|c|N)\sqrt{q}Ne^{-K\sqrt{\log N}}).$$

Για τα $\alpha \in \mathfrak{M}(b,q)$ έχουμε από τον ορισμό των πρωτεύοντων τόξων ότι $q \leq P$ και $|c| \leq \frac{1}{Q}$. Έτσι για αυτά τα α έχουμε ότι

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\phi(q)}T(c) + O(Ne^{-K\sqrt{\log N}}).$$

Τώρα επιστρέφουμε στο ολοκλήρωμα που μας ενδιαφέρει ,αντικαθιστούμε με την παραπάνω σχέση και παίρνουμε

$$\int_{\mathfrak{M}(b,q)} S^3(\alpha)e^{-2\pi i N\alpha}d\alpha = \frac{\mu(q)}{(\phi(q))^3}e^{\frac{-2\pi i bN}{q}} \int_{-\frac{1}{Q}}^{\frac{1}{Q}} T^3(c)e^{-2\pi i Nc}dc + O\left(N^2 e^{-K'\sqrt{\log N}}\right)$$

για κάποια σταθερά K'. Για να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα πάνω στο $\mathfrak{M}$ αθροίζουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα πάνω σε όλα τα πρωτεύοντα τόξα και έχουμε την (3.11)

$$\int_{\mathfrak{M}} S^3(\alpha)e^{-2\pi i N\alpha}d\alpha = \sum_{q\leq P}\frac{\mu(q)}{(\phi(q))^3}\left(\sum_{\substack{b=1,\\(b,q)=1}}^{q} e^{\frac{2\pi i bN}{q}}\right)\int_{-\frac{1}{Q}}^{\frac{1}{Q}} T^3(c)e^{-2\pi i Nc}dc + O\left(N^2 e^{-K''\sqrt{\log N}}\right)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\left(\sum_{\substack{b=1,\\(b,q)=1}}^{q} e^{\frac{-2\pi i bN}{q}}\right) = \left(\sum_{\substack{b=1,\\(b,q)=1}}^{q} e^{\frac{2\pi i bN}{q}}\right)$$

το οποίο προκύπτει αν θέσουμε $b' = q - b$. Θέτουμε τώρα

$$c_q(N) = e^{\frac{2\pi i bN}{q}}.$$

Το άθροισμα αυτό λέγεται άθροισμα Ramanujan.
Θα δώσουμε τώρα κάποιους επιπλέον ορισμούς.

Ορισμός 3.11 Μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ λέγεται αριθμητική συνάρτηση. Επιπλέον, ορίζουμε την πρόσθεση για αριθμητικές συναρτήσεις ως εξής

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n).$$

Ορισμός 3.12 Μια αριθμητική συνάρτηση λέγεται πολλαπλασιαστική αν $f(mn) = f(m)f(n)$ για $(m,n) = 1$.

Λήμμα 3.13 Άν f είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση του ν και

$$\lim_{p^k \to \infty} f(p^k) = 0,$$

για κάθε p^k δύναμη πρώτου, τότε

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = 0.$$

Απόδειξη. Απο την υπόθεση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι πεπερασμένο το πλήθος δυνάμεων πρώτων ώστε $\left|f(p^k)\right| \geq 1$. Ορίζουμε

$$A = \prod_{\left|f(p^k)\right| \geq 1} \left|f(p^k)\right|.$$

Προφανώς $A \geq 1$. Διαλέγουμε ϵ τέτοιο ώστε $0 < \epsilon < A$. Τότε, είναι πεπερασμένο το πλήθος δυνάμεων πρώτων ώστε $\left|f(p^k)\right| \geq \frac{\epsilon}{A}$. Συνεπώς, αν ν είναι αρκετά μεγάλο, υπάρχει τουλάχιστον μία δύναμη πρώτου ώστε να διαιρεί το ν και $\left|f(p^k)\right| < \frac{\epsilon}{A}$. Παίρνουμε διακεκριμένους πρώτους $p_1, p_2, \ldots, p_{r+s+t}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες

1. $1 \leq \left|f({p_i}^{k_i})\right| \quad$ για $i = 1, \ldots, r$.
2. $\epsilon/A \leq \left|f({p_i}^{k_i})\right| < 1 \quad$ για $i = r+1, \ldots, r+s$.
3. $\left|f({p_i}^{k_i})\right| < \epsilon/A \quad$ για $i = r+s+1, \ldots, r+s+t$.
4. $t \leq 1$.

Μπορούμε να γράψουμε το ν ως

$$n = \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{k_i} \prod_{i=r+1}^{r+s} {p_i}^{k_i} \prod_{i=r+s+1}^{r+s+t} {p_i}^{k_i}.$$

Τότε έχουμε

$$|f(n)| = \prod_{i=1}^{r} \left|f({p_i}^{k_i})\right| \prod_{i=r+1}^{r+s} \left|f({p_i}^{k_i})\right| \prod_{i=r+s+1}^{r+s+t} \left|f({p_i}^{k_i})\right| < A\left(\frac{\epsilon}{A}\right)^t \leq \epsilon.$$

□

Λήμμα 3.14 Για $\epsilon > 0$ και αρκετά μεγάλο n, ισχύει

$$n^{1-\varepsilon} < \phi(n) < n.$$

Απόδειξη. Προφανώς, αν $n > 1$, τότε $\phi(n) < n$, και για κάθε πρώτο p, $\frac{p}{p-1} \leq 2$. Επομένως προκύπτει

$$\frac{p^{m(1-\varepsilon)}}{\phi(p^m)} = \frac{p^{m(1-\varepsilon)}}{p^m - p^{m-1}} = \frac{p}{p-1}\left(\frac{p^{m(1-\varepsilon)}}{p^m}\right) \leq \frac{2}{p^{m\varepsilon}}.$$

Συνεπώς

$$\lim_{p^m \to \infty} \frac{p^{m(1-\varepsilon)}}{\phi(p^m)}.$$

Παρατηρούμε ότι η $\frac{n^{1-\varepsilon}}{\phi(n)}$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση του n και χρησιμοποιώντας το Λήμμα (3.13) προκύπτει

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^{1-\varepsilon}}{\phi(n)} = 0.$$

□

Λήμμα 3.15 Έστω

$$c_q(n) = \sum_{\substack{\alpha=1 \\ (\alpha,q)=1}}^{q} \mathrm{e}^{2\pi i \alpha \frac{n}{q}}.$$

Τότε:

1. Η $c_q(n)$ είναι πολλαπλασιαστική ως προς q

2. Αν, για κάθε πρώτο p, p^κ είναι η μεγαλύτερη δύναμη που διαιρεί το n,

τότε

$$c_{p^\beta}(n) = \begin{cases} \phi(p^c) & \text{αν } c \leq \kappa \\ -p^\kappa & \text{αν } c = \kappa + 1 \\ 0 & \text{αν } c > \kappa + 1. \end{cases} \tag{3.16}$$

Για το παρακάτω λήμμα θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.17 (Γινόμενο Euler) Αν $a(n)$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση, τότε η σειρά

$$\sum_n \frac{a(n)}{n^s}$$

είναι ίση με

$$\prod_p P(p,s)$$

όπου p τρέχει σε όλους τους πρώτους και $P(p,s) = 1 + a(p)p^{-s} + a(p^2)p^{-2s} + \cdots$.

Λήμμα 3.18 Θεωρούμε την παρακάτω σειρά

$$\wp(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)c_q(n)}{\phi(q)^3}.$$

Η $\wp(n)$ συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα και έχει γινόμενο Euler

$$\wp(n) = \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid n}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

Επιπλέον, υπάρχουν θετικές σταθερές c_1 και c_2 τέτοιες ώστε για κάθε περιττό ν

$$c_1 < \wp(n) < c_2.$$

Απόδειξη.

Προφανώς έχουμε $|c_q(n)| \leq \phi(q)$. Άρα, για $\epsilon > 0$ και αρκετά μεγάλο q, προκύπτει

$$\left|\frac{\mu(q)c_q(n)}{\phi(q)^3}\right| \leq \frac{1}{\phi(q)^2} < \frac{1}{q^{2-\epsilon}},$$

όπου στη δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα (3.14). Συνεπώς η $\wp(n)$ συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα.
Επιπλέον, εφαρμόζοντας το λήμμα (3.15) για $c = 1$, έχουμε

$$c_p(n) = \begin{cases} p-1 & \text{αν } p|n \\ -1 & \text{αν } p\nmid n. \end{cases}$$

Εφόσον η συνάρτηση του Mobius, η συνάρτηση του Euler και το άθροισμα του Ramanujan είναι πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις ως προς χ, μπορούμε να υπολογίσουμε το γινόμενο Euler της $\wp(n)$.

$$\wp(n) = \prod_p \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu(p^j)c_{p^j}(n)}{\phi(p^j)^3}\right) = \prod_p \left(1 - \frac{c_p(n)}{\phi(p)^3}\right)$$

$$= \prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid n}\left(1+\frac{1}{(p-1)^3}\right).$$

Από την παραπάνω ισότητα, για κάθε περιττό ν μπορούμε να βρούμε c_1 θετική σταθερά έτσι ώστε $c_1 < \wp(n)$. Συγκεκριμένα, με κατάλληλη χρήση της συνάρτησης ζήτα του Ριεμανν μπορούμε να φράξουμε το πρώτο γινόμενο της τελευταίας σχέσης. Όσον αφορά το άνω φράγμα c_2, προκύπτει άμεσα από την ομοιόμορφη σύγκλιση της συνάρτησης $\wp(n)$.

□

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή την εκτίμηση για να φράξουμε ένα ακόμα σημείο του αθροίσματος.

$$\sum_{q>p}\frac{\mu(q)c_q(n)}{\phi(q)^3} = O\left(\sum_{q>p}\frac{1}{\phi(q)^3}\right) = O\left(\log^{-B+1}(n)\right),$$

όπου B είναι μια σταθερά που θα επιλέξουμε αργότερα. Μπορούμε να συνδυάσουμε αυτά τα δύο αποτελέσματα για να φράξουμε το άθροισμα που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα πάνω απο τα πρωτεύοντα τόξα.

$$\sum_{q\le P}\frac{\mu(n)c_q(n)}{\phi(q)^3} = \wp(n) + O\left(\log^{-B+1}(n)\right). \tag{3.19}$$

Πλέον, έχουμε αποκτήσει κατάλληλα φράγματα για τον όρο αυτό στο ολοκλήρωμα πάνω απο τα πρωτεύοντα τόξα. Ωστόσο, πρέπει να φράξουμε έναν ακόμη όρο. Θα το κάνουμε αυτό σπάζοντας το ολοκλήρωμα σε ένα ολοκλήρωμα με πιο βολικά άκρα και έναν όρο που μπορούμε να φράξουμε πιο εύκολα.

$$\int_{-1/Q}^{1/Q} T(c)^3 \mathrm{e}^{-2\pi i N c}\mathrm{d}c = \int_0^1 T(c)^3\mathrm{e}^{-2\pi i N c}\mathrm{d}c + O\left(\int_{1/Q}^{1-1/Q}\left|T(c)^3\right|\mathrm{d}c\right). \tag{3.20}$$

Ορίζουμε $\|\chi\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}$ να είναι η απόσταση του χ από τον κοντινότερο ακέραιο. Υπενθυμίζουμε πως ορίσαμε την $T(c)$ ως γεωμετρική σειρά, επομένως έχουμε

$$T(c) = \frac{\mathrm{e}^{2\pi i((N+1)c} - \mathrm{e}^{2\pi i c}}{\mathrm{e}^{2\pi i c}-1} = O\left(min\left(N, \frac{1}{\|c\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}}\right)\right).$$

Μπορούμε τώρα να κάνουμε μια νέα εκτίμηση για τη σχέση (3.20).

$$\int_{-1/Q}^{1/Q} T(c)^3\mathrm{e}^{-2\pi i N c}\mathrm{d}c = \int_0^1 T(c)^3\mathrm{e}^{-2\pi i N c}\mathrm{d}c + O(Q^2).$$

Εκφράζουμε το Q συναρτήσει του n όπως στον ορισμό για τα πρωτεύοντα τόξα.

$$\int_0^1 T(c)^3 \mathrm{e}^{-2\pi i N c}\mathrm{d}c + O(Q^2) = \int_0^1 T(c)^3 \mathrm{e}^{-2\pi i N c}\mathrm{d}c + O\left(\frac{N^2}{\log^{4B}(N)}\right).$$

Το ολοκλήρωμα που μένει στην παραπάνω σχέση μετράει στην ουσία το πλήθος των παραστάσεων του N ως άθροισμα τριών θετικών ακεραίων. Πράγματι,

$$\int_0^1 T(c)^3 \mathrm{e}^{-2\pi i N c}\mathrm{d}c = \int_0^1 \left(\sum_{k_1,k_2,k_3 \le N} \mathrm{e}^{2\pi i(k_1+k_2+k_3)c}\right) \mathrm{e}^{-2\pi i N c}\mathrm{d}c$$

$$= \int_0^1 \sum_{k_1,k_2,k_3 \le N} \mathrm{e}^{2\pi i(k_1+k_2+k_3-N)c}\mathrm{d}c$$

Για κάθε παράσταση του $N = k_1 + k_2 + k_3$ το παραπάνω ολοκλήρωμα μας δίνει την τιμή ένα και σε κάθε άλλη περίπτωση έχουμε $\int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi i \kappa c}\mathrm{d}c = 0$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.
Επομένως έχουμε το εξής φράγμα για το παραπάνω ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 T(c)^3 \mathrm{e}^{-2\pi i N c}\mathrm{d}c = \frac{1}{2}(N-1)(N-2) = \frac{1}{2}N^2 + O(N)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, έχουμε ένα γενικό φράγμα για το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1/Q}^{1/Q} T(c)^3 \mathrm{e}^{-2\pi i N c}\mathrm{d}c = \frac{N^2}{2} + O\left(\frac{N^2}{\log^{4B}(N)}\right).$$

Συνδυάζοντας τώρα αυτήν τη σχέση με τη (3.19) στην (3.7) , παίρνουμε ένα ικανοποιητικό φράγμα για το ολοκλήρωμα πάνω στα πρωτεύοντα τόξα.

$$\int_{\mathfrak{M}} S(a)^3 \mathrm{e}^{-2\pi i N a}\mathrm{d}a = \frac{1}{2}\wp(N)N^2 + O\left(\frac{N^2}{\log^{B-1}(N)}\right). \tag{3.21}$$

4 Ελάσσονα Τόξα

Τα ελάσσονα τόξα είναι λιγότερο σημαντικά από τα πρωτεύοντα τόξα. Στην πραγματικότητα, το θεώρημα του Vinogradov βασίζεται στο γεγονός οτι τα ελάσσονα τόξα συνεισφέρουν αρκετά λίγο με συνέπεια τα πρωτεύοντα τόξα να κυριαρχούν. Πρέπει λοιπόν να εξετάσουμε το ολοκλήρωμα πάνω από τα ελάσσονα τόξα. Μπορούμε να ξεκινήσουμε με κάποια άμεσα φράγματα

$$\left|\int_{\mathfrak{m}} S(a)^3 \mathrm{e}^{-2\pi i N a}\mathrm{d}a\right| \le \left(\max_{\mathfrak{m}} |S(a)|\right) \int_{\mathfrak{m}} |S(a)^2|\mathrm{d}a$$

Φυσικά, το ολοκλήρωμα πάνω στο διάστημα $[0,1]$ συνεισφέρει περισσότερο απο τα ελάσσονα τόξα. Έτσι, προκύπτει

$$\left(\max_{\mathfrak{m}} |S(a)|\right) \int_{\mathfrak{m}} |S(a)^2| \mathrm{d}a \leq \left(\max_{\mathfrak{m}} |S(a)|\right) \int_0^1 \left|S(a)^2\right| \mathrm{d}a$$

Από τον ορισμό του $S(a)$ έχουμε

$$\int_0^1 \left|S(a)^2\right| \mathrm{d}a = \sum_{k_1 \leq N} \Lambda(k_1) \sum_{k_2 \leq N} \Lambda(k_2) \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi i a(k_1-k_2)} \mathrm{d}a.$$

Αν πάρουμε $k_1 \neq k_2$ το παραπάνω ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Άρα για $k_1 = k_2 = k$ έχουμε το εξής φράγμα

$$\sum_{k_1 \leq N} \Lambda(k_1) \sum_{k_2 \leq N} \Lambda(k_2) \int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi i a(k_1-k_2)} \mathrm{d}a = \sum_{k \leq n} \Lambda(k)^2 = O(N \log(N)). \tag{4.1}$$

Πρέπει επίσης να εκτιμήσουμε το $(\max_{\mathfrak{m}} |S(a)|)$. Θα ξεκινήσουμε δουλεύοντας με τον ορισμό των ελασσόνων τόξων. Έστω $\alpha \in \mathfrak{m}$ και $q \leq P$.

$$\left|\alpha - \frac{r}{q}\right| > \frac{1}{Q} = \frac{\log^{2B}(N)}{N}.$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε σε όλα τα στοιχεία των ελασσόνων τόξων για να πάρουμε

$$\inf_{1 \leq q \leq P} \left|\alpha - \frac{r}{q}\right| > \frac{\log^{2B}(N)}{N}. \tag{4.2}$$

Χρειαζόμαστε αυτό το τελευταίο λήμμα του οποίου η απόδειξη είναι αρκετά μεγάλη και παραλείπεται.

Λήμμα 4.3 Για $\alpha \in \mathbb{R}, C > 0$, σταθερό k, και αρκετά μεγάλο n, αν

$$\inf_{1 \leq d \leq 16 \log^{8(C+4)}(N)} \|d\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \geq k \frac{\log^{28(C+4)}(N)}{N},$$

τότε

$$\left|\frac{1}{N} \sum_{1 \leq n \leq N} \mu(n) \mathrm{e}^{2\pi i n \alpha}\right| = O\left(\log^{-C+1}(N)\right).$$

Το αποτέλεσμα αυτού του λήμματος εμπλέκει τη συνάρτηση Mobius. Θα χρειαστεί να το μετασχηματίσουμε για να λειτουργήσει με τη συνάρτηση Von Mangoldt. Μπορούμε να δουλέψουμε με τους ορισμούς αυτών των δύο συναρτήσεων.

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \log(d) \mu\left(\frac{n}{q}\right).$$

Η συνάρτηση Mobius ορίζεται στους φυσικούς αριθμούς, αλλά μπορούμε να επεκτείνουμε την συνάρτηση παίρνοντας $\mu(x) = 0$ αν $x \notin \mathbb{N}$. Ξαναγράφουμε λοιπόν τη συνάρτηση ὄν Μανγολδτ ώς εξής

$$\Lambda(n) = \sum_{d \leq n} \log(d) \mu\left(\frac{n}{q}\right).$$

Έχουμε ορίσει

$$S(\alpha) = \sum_{k \leq N} \Lambda(k) \mathrm{e}^{2\pi i k \alpha}.$$

Αντικαθιστούμε τη συνάρτηση ὄν Μανγολδτ με την παραπάνω σχέση και προκύπτει

$$\sum_{k \leq N} \Lambda(k) \mathrm{e}^{2\pi i k \alpha} = \sum_{k \leq N} \sum_{d \leq k} \log(d) \mu\left(\frac{k}{d}\right) \mathrm{e}^{2\pi i k \alpha}.$$

Θέτουμε $m = \frac{k}{d}$ και ξαναγράφουμε το άθροισμα

$$\sum_{k \leq N} \sum_{d \leq k} \log(d) \mu\left(\frac{k}{d}\right) \mathrm{e}^{2\pi i k \alpha} = \sum_{d \leq N} \log(d) \sum_{m \leq \frac{N}{d}} \mu(m) \mathrm{e}^{2\pi i m d \alpha}.$$

Μετασχηματίζουμε τη σχέση (4.2) ώστε να θυμίζει τις υποθέσεις του λήμματος θεωρώντας την απόσταση του $q\alpha$ από το κοντινότερο ακέραιο.

$$\inf_{1 \leq q \leq \log^B(N)} \|q\alpha\|_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} > \frac{\log^{4B}(N)}{N}.$$

Μπορούμε να ανακτήσουμε τις υποθέσεις του λήμματος με $B = 9(C+4)$. Τώρα φράζουμε το $S(\alpha)$ στα ελάσσονα τόξα.

$$S(\alpha) < \sum_{d \leq N} \log(d) \frac{N/d}{\log^{\frac{B}{9}-5}(N/d)}$$

$$\leq \frac{1}{\log^{\frac{B}{9}-6}(N)} \sum_{d \leq N} \frac{N}{d} = O\left(\frac{N}{\log^{\frac{B}{9}-7}(N)}\right).$$

Συνδυάζοντας αυτό το φράγμα με το (4.1), παίρνουμε ένα φράγμα πάνω στα ελάσσονα τόξα.

$$\int_{\mathfrak{m}} S(a)^3 \mathrm{e}^{-2\pi i N a} \mathrm{d}a = O\left(\frac{N^2}{\log^{\frac{B}{9}-8}(N)}\right). \tag{4.4}$$

5 Το Θεώρημα Του Vinogradov

Θεώρημα 6.1 Για $A > 0$,

$$r(N) = \frac{1}{2}\wp(N)N^2 + O\left(\frac{N^2}{\log^A(N)}\right).$$

Απόδειξη.

Από τη σχέση (1.2) έχουμε

$$r(N) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} S(\alpha)^3 \mathrm{e}^{-2\pi N i\alpha} \mathrm{d}\alpha.$$

Χωρίζοντας το ολοκλήρωμα σε πρωτεύοντα και ελάσσονα τόξα παίρνουμε

$$r(N) = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} S(\alpha)^3 \mathrm{e}^{-2\pi N i\alpha} \mathrm{d}\alpha = \int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^3 \mathrm{e}^{-2\pi N i\alpha} \mathrm{d}\alpha + \int_{\mathfrak{m}} S(\alpha)^3 \mathrm{e}^{-2\pi N i\alpha} \mathrm{d}\alpha.$$

Από τη σχέση (3.21), έχουμε

$$\int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^3 \mathrm{e}^{-2\pi N i\alpha} \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}\wp(N)N^2 + O\left(\frac{N^2}{\log^{B-1}(n)}\right).$$

Από τη σχέση (4.4), έχουμε

$$\int_{\mathfrak{m}} S(a)^3 \mathrm{e}^{-2\pi i N a} \mathrm{d}a = O\left(\frac{N^2}{\log^{\frac{B}{9}-8}(N)}\right).$$

Παίρνουμε $B = 9(A+8)$, και παρατηρούμε οτι η δύναμη του λογαρίθμου είναι αρκετά μικρότερη στον παρονομαστή του σφάλματος από τα ελάσσονα τόξα απ' ότι στα πρωτεύοντα τόξα. Επομένως

$$r(N) = \int_{\mathfrak{M}} S(\alpha)^3 \mathrm{e}^{-2\pi N i\alpha} \mathrm{d}\alpha + \int_{\mathfrak{m}} S(\alpha)^3 \mathrm{e}^{-2\pi N i\alpha} \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}\wp(N)N^2 + O\left(\frac{N^2}{\log^A(N)}\right).$$

□

Πόρισμα 6.2 Κάθε αρκετά μεγάλος περιττός ακέραιος είναι άθροισμα τριών πρώτων.

Απόδειξη.

Από το λήμμα (3.18) η $\wp(N)$ είναι φραγμένη για κάθε περιττό N. Συνεπώς, απο το θεώρημα (6.1) υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ και μια σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε για κάθε περιττό $N \geq n_0$

$$\left| r(N) - \frac{1}{2}\wp(N)N^2 \right| \leq M\frac{N^2}{\log^A(N)} \quad \Rightarrow$$

$$r(N) \geq \frac{1}{2}\wp(N)N^2 - M\frac{N^2}{\log^A(N)} = N^2\left(\frac{1}{2}\wp(N) - M\frac{1}{\log^A(N)}\right) \geq N^2\left(\frac{1}{2}c_1 - M\frac{1}{\log^A(N)}\right).$$

Αρα, από την τελευταία ισότητα βλέπουμε οτι για αρκετά μεγάλους περιττούς N, η $r(N)$ έχει θετικό κάτω φράγμα. Επιπλέον, από άθροιση κατά μέρη παρατηρούμε οτι η συνεισφορά των αθροισμάτων από δυνάμεις πρώτων είναι πολύ μικρότερη από αυτή των πρώτων αριθμών. Επομένως, για αρκετά μεγάλους περιττούς αριθμούς N, το N γράφεται ως άθροισμα τριών πρώτων.

□

Αναφορές

[1] Ian N Petrow, *Vinogradov's Three Primes Theorem*.

[2] Nicholas Rouse, *Vinogradov's Three Primes Theorem*.

[3] Tom M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer.