Η Ουγγρική σχολή: η συμβολή των Fejér και Riesz στην Ανάλυση Fourier

Ευσταθία Σουφλέρη και Νικολέττα Παλαμιώτη

Περίληψη

Παρουσιάζουμε δύο κλασσικά θεωρήματα: το θεώρημα του Fejér και το θεώρημα Riesz-Fischer. Παραθέτουμε τα πρωτότυπα άρθρα, περιγράφουμε το πλαίσιο μέσα στο οποίο ανακαλύφθηκαν αυτά τα δύο αποτελέσματα, και την σημασία τους στην εξέλιξη της Ανάλυσης Fourier.

1 Το θεώρημα του Fejér

Στις 19 Νοεμβρίου του 1900 η Ακαδημία των Επιστημών στο Παρίσι έλαβε μία εργασία από τον Leopold **Fejév** από τη Βουδαπέστη, με τίτλο «Απόδειξη του θεωρήματος ότι μια φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι αναλυτική, με την έννοια του Euler». Στις 10 Δεκεμβρίου, το περιοδικό Comptes Rendus της Ακαδημίας δημοσίευσε αυτή την εργασία με τον τίτλο «Επί των φραγμένων και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων».Σε αυτή την εργασία εμφανίζονται για πρώτη φορά αυτά που στις μέρες μας αποκαλούνται αθροίσματα του Fejér, ο πυρήνας του Fejér και η διαδικασία άθροισης του Fejér. Η εργασία περιέχει επίσης την απόδειξη του θεωρήματός του Fejér, το οποίο υποστηρίζει ότι κάθε «καλή» συνάρτηση είναι όριο των αθροισμάτων Fejér της. Το ορθογραφικό λάθος της 19ης Νοεμβρίου στο όνομα του Fejér (Fejév αντί Fejér) δεν επαναλαμβάνεται στις 10 Δεκέμβριου. Ωστόσο,αντικαθίσταται από ένα άλλο, καθώς στην εργασία, που παρουσιάστηκε από τον Picard, ο Fejér αναφέρεται ως Leopold **Tejér**. Έτσι, λοιπόν, μπαίνει το όνομα του Fejér στην ιστορία.

Παραθέτουμε πρώτα αυτούσια την δημοσίευση του Fejér.

ANALYSE MATHÉMATIQUE – *Sur les fonctions bornèes et intègrables.*

Note de **M Léopold Tejér**, présentée par M. Picard.

Γνωρίζουμε ότι, αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_0+\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}}{n} \tag{1.1}$$

υπάρχει και είναι ίσο με $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, όπου σ_{n-1} είναι το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

Σκοπεύουμε να ασχοληθούμε, θεωρώντας και τις πιο απλές από τις αποκλίνουσες σειρές, με εκείνες τις σειρές για τις οποίες τουλάχιστον το όριο (1.1) υπάρχει. Μια αποκλίνουσα σειρά αυτού του είδους είναι η ακόλουθη:

$$\frac{1}{2}\cos\delta + \cos 2\delta + \cdots + \cos(n-1)\delta + \cdots \tag{1.2}$$

Γι¨ αυτή τη σειρά έχουμε

$$\frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_{n-1}}{n} = \frac{1}{2n}\,\frac{1-\cos n\delta}{1-\cos\delta}, \tag{1.3}$$

συνεπώς (αν $\delta \neq 2k\pi$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_{n-1}}{n} = 0.$$

Θα θέλαμε λοιπόν να δείξουμε ότι η σειρά Fourier μιας *φραγμένης* και *ολοκληρώσιμης* συνάρτησης ανήκει στην κλάση εκείνων των σειρών για τις οποίες το όριο (1.1) υπάρχει.

Ακριβέστερα, έχουμε το εξής θεώρημα:

I. Έστω $f(x)$ μια συνάρτηση *φραγμένη* και *ολοκληρώσιμη* στο διάστημα $[0, 2\pi]$, η οποία παρουσιάζει ασυνέχειες, οπότε η σειρά Fourier της $f(x)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,d\alpha + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos k(\alpha - x)\,d\alpha\right] \tag{1.4}$$

μπορεί να αποκλίνει. Σε όλα όμως τα σημεία x στα οποία η $f(x)$ είναι συνεχής ή παρουσιάζει *ασυνέχεια πρώτου είδους* (δηλαδή, τα όρια $f(x+0)$, $f(x-0)$ υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά), το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

υπάρχει και είναι ίσο με

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],$$

όπου s_{k-1} είναι το άθροισμα των πρώτων k όρων της σειράς (1.4).

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την (1.3) βλέπουμε ότι

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n} = S_n = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos n(\alpha - x)}{1-\cos(\alpha - x)} f(\alpha)\,d\alpha. \tag{1.5}$$

Ας υποθέσουμε ότι η $f(x)$ είναι *συνεχής* στο x. Τότε, αν μας δώσουν έναν θετικό αριθμό δ, οσοδήποτε μικρό, μπορούμε να σταθεροποιήσουμε έναν άλλο αριθμό ε, τέτοιον ώστε

$$|f(x+h) - f(x)| < \delta$$

αν ικανοποιείται η $|h| < \varepsilon$. Μπορούμε να γράψουμε

$$S_n = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{x-\varepsilon} + \frac{1}{2n\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \frac{1}{2n\pi}\int_{x+\varepsilon}^{2\pi}.$$

Αν όμως συμβολίσουμε με M το μέγιστο της απόλυτης τιμής της $f(x)$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$, έχουμε

$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_0^{x-\varepsilon}\cdots\right| < \frac{1}{n}\frac{M(x-\varepsilon)}{\pi(1-\cos\varepsilon)}$$
$$\left|\frac{1}{2n\pi}\int_{x+\varepsilon}^{2\pi}\cdots\right| < \frac{1}{n}\frac{M(2\pi-(x+\varepsilon))}{\pi(1-\cos\varepsilon)},$$

και εφαρμόζοντας το πρώτο θεώρημα μέσης τιμής (κάτι που μπορούμε να κάνουμε, διότι η $\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}$ δεν είναι ποτέ αρνητική) έχουμε

$$S_n = [f(x)+\eta]\,\frac{1}{2n\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha + \varepsilon_n',$$

όπου $|\eta| < \delta$ και $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n' = 0$. Μπορούμε όμως να διασπάσουμε ως εξής:

$$\frac{1}{2n\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} - \left(\frac{1}{2n\pi}\int_0^{x-\varepsilon} + \frac{1}{2n\pi}\int_{x+\varepsilon}^{2\pi}\right).$$

Οι δύο όροι μέσα στην παρένθεση τείνουν στο 0 καθώς το $n\to\infty$. Αφού, εφαρμόζοντας την (1.3), έχουμε

$$\frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos n(\alpha-x)}{1-\cos(\alpha-x)}\,d\alpha = 1,$$

παίρνουμε τελικά

$$S_n(x) = [f(x)+\eta](1+\varepsilon_n'') + \varepsilon_n'$$

όπου $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n'' = 0$, και συνεπώς, αν το n είναι αρκετά μεγάλο,

$$|S_n(x) - f(x)| < 2\delta.$$

Μπορούμε να χειριστούμε με τον ίδιο τρόπο την περίπτωση της ασυνέχειας πρώτου είδους, άρα το θεώρημα έχει αποδειχθεί.

Παρατηρούμε τώρα ότι, για μια *φραγμένη* και *ολοκληρώσιμη* συνάρτηση έχουμε το ανάπτυγμα

$$f(x) = S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots + (S_{n+1} - S_n) + \cdots.$$

Όμως, από τον ορισμό της S_n στην (1.5), έχουμε

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\frac{n\frac{1}{2} + (n-1)\cos(\alpha - x) + \cdots + \cos(n-1)(\alpha - x)}{n}\, d\alpha \\ &= \lambda_0 + \lambda_1 \cos x + \mu_1 \sin x + \cdots + \lambda_{n-1}\cos(n-1)x + \mu_{n-1}\sin(n-1)x. \end{aligned}$$

Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε το εξής:

II. Κάθε *φραγμένη* και *ολοκληρώσιμη* συνάρτηση επιδέχεται ανάπτυγμα της μορφής

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

όπου *ο γενικός όρος είναι μια πεπερασμένη σειρά Fourier.*

Η σειρά συγκλίνει για όλες τις τιμές του x όπου η $f(x)$ είναι συνεχής ή παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους, και έχει σαν άθροισμα το $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

Παρατηρήσεις. Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το ολοκλήρωμα $S_n(x)$ συγκλίνει *ομοιόμορφα* προς την $f(x)$ σε κάθε διάστημα $[b, c]$ στο οποίο η $f(x)$ είναι συνεχής *χωρίς καμία εξαίρεση*, δηλαδή μπορούμε να βρούμε μια πεπερασμένη σειρά Fourier: $S_n(x)$, τέτοια ώστε

$$|S_n(x) - f(x)| < \delta$$

αν $n > N$, για *όλα* τα σημεία του $[b, c]$. Έτσι προκύπτει το θεώρημα του Weierstrass:

Κάθε συνεχής συνάρτηση επιδέχεται ανάπτυγμα $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, *όπου κάθε* $f_k(x)$ *είναι πολυώνυμο.*

(Δείτε και το άρθρο του M. Picard, *Comptes Rendus*, CXII; 1891 και *Traité d' Analyse*, t. I.)

Ξεκινώντας από την ισότητα

$$I(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\psi - \varphi) + r^2} f(\psi)\, d\psi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\varphi) r^n,$$

η οποία ισχύει για κάθε $r < 1$, όπου

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\, d\psi \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\cos k(\psi - \varphi)\, d\psi, \quad (k = 1, 2, \ldots, \infty) \end{aligned}$$

μπορούμε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα **I**, να δώσουμε μια γενική και νέα θεωρία για το ολοκλήρωμα του Poisson.

Αν και ο Fejér ήταν πολύ νέος, μόλις 20 ετών, και άγνωστος, το θεώρημά του έγινε γρήγορα γνωστό. Χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του γεγονότος ότι το τριγωνομετρικό σύστημα είναι *ολικό* (τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων) στην εργασία του Hurwitz σχετικά με την ισοπεριμετρικό πρόβλημα, επεκτάθηκε από τον Lebesgue στο πλαίσιο των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (θεώρημα Fejér-Lebesgue), γενικεύθηκε σε άλλους πυρήνες που είναι χρήσιμοι στη θεωρία προσέγγισης (από τον de la Vallée Poussin), χρησιμοποιήθηκε για να δοθεί μια νέα και πιο απλή απόδειξη του θεωρήματος Dirichlet-Jordan από τον Hardy, πήρε μια πιο ακριβή μορφή μέσω της έννοιας της απόλυτης αθροισιμότητας (Hardy και Littlewood), επεκτάθηκε στις λεγόμενες (C,α)-διαδικασίες άθροισης για όλα τα $\alpha > 0$ (Marcel Riesz, η περίπτωση που μελέτησε ο Fejér ήταν για $\alpha = 1$) και το σημαντικότερο, η απλότητά του το κατέστησε προσιτό σε κάθε φοιτητή μαθηματικών. Μέχρι το 1910 το θεώρημα του Fejér είχε ήδη καθιερωθεί ως κλασικό αποτέλεσμα, και κανένας μαθηματικός δεν μπορούσε παρά να γνωρίζει το όνομα του Fejér καθώς και την ορθογραφία του.

Για να εκτιμήσει κανείς την αλλαγή που πρκάλεσε η εργασία του Fejér, δεν έχει παρά να συγκρίνει την πρώτη και τη δεύτερη έκδοση του βιβλίου του de la Vallee Poussin με τίτλο «Μαθήματα Ανάλυσης» (Cours d'Analyse). Στην πρώτη έκδοση (1903-1906) ακολουθεί την καθιερωμένη θεώρηση των γνωστών εγχειριδίων ανάλυσης εκείνης της εποχής: αφιερώνει μικρό μέρος στις σειρές Fourier και παρουσιάζει το θεώρημα σύγκλισης του Dirichlet ακολουθώντας την παράδοση των Dirichlet και Jordan. Στη δεύτερη έκδοση (1912) βρίσκουμε το θεώρημα του Fejér, τη μέθοδο του Hardy για την αναγωγή του θεωρήματος Dirichlet-Jordan στο θεώρημα του Fejér, καθώς επίσης και το παράδειγμα του Fejér για την ύπαρξη συνεχούς συνάρτησης της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει σε ένα σημείο. Η διαφορά αυτή φανερώνει τη σπουδαιότητα του θεωρήματος καθώς και την επανάσταση που έφερε. Μια μικρή αναδρομή στο 1900 θα βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση της φύσης αυτής της επανάστασης.

1.1 Η κατάσταση που επικρατούσε το 19 αιώνα

Τον 19ο αιώνα, η θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής σημείωσε αλματώδη πρόοδο. Η θεωρία των συναρτήσεων πολλών πραγματικών μεταβλητών είχε αναπτυχθεί μέσα από τη διερεύνηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που προέκυπταν από το πεδίο της φυσικής. Από την άλλη πλευρά, η μελέτη των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής αποκάλυψε πλήθος «περίεργων και ανησυχητικών φαινομένων»: μεταξύ αυτών, συνεχείς αλλά πουθενά διαφορίσιμες συναρτήσεις (Weierstrass), συνεχείς συναρτήσεις των οποίων η σειρα Fourier αποκλίνει σε ένα σημείο (du Bois Reymond). Ο Hermite έγραψε χαρακτηριστικά στον Stieltjes ότι «ένιωσε τρόμο και φρίκη από τη θλιβερή παρατήρηση ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση χωρίς παράγωγο». Ο Poincaré στο L'Enseignement Mathématique υπαινίχθηκε ότι τα παραδείγματα πλέον δεν χρησιμοποιούνταν για να υποστηρίξουν θεωρήματα και θεωρίες, αλλά είχαν ως μοναδικό σκοπό να δείξουν ότι οι προγενέστεροι μαθηματικοί είχαν κάνει λάθος. Χαρακτηριστικά, ο Gaston Darboux, ο οποίος είχε γράψει ένα σημαντικό έργο για ασυνεχείς συναρτήσεις το 1875, επηρεασμένος από την επικρατούσα κατάσταση έστρεψε τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα προς στην γεωμετρία.

Στο διάστημα από το 1880 ως το 1900 εμφανίστηκαν πολύ λίγες εργασίες με θέμα τις τριγωνομετρικές σειρές και δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Οι σειρές Fourier δεν θεωρούνταν αξιόπιστο εργαλείο καθώς υπήρχαν πολλά παράξενα πράγματα γι¨ αυτές, όπως το ενδεχόμενο να υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις των οποίων η σειρά Fourier να αποκλίνει παντού, όπως ακριβώς υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις που δεν έχουν παράγωγο σε κανένα σημείο (αυτό παρέμεινε ανοιχτό ερώτημα μέχρι το θεώρημα του Carleson στο 1965). Άλλο ερώτημα, που έθεσε ο Minkowski ήταν αν είναι δυνατόν η σειρά Fourier να συγκλίνει αλλά να μην αναπαριστά τη συνάρτηση, όπως συμβαίνει με τη σειρά Taylor κάποιων C^∞-συναρτήσεων. Αυτό το ερώτημα θεωρούνταν ανοικτό πρόβλημα την περίοδο που άνακαλύφθηκε το θεώρημα του Fejér, το 1900.

1.2 Πώς οδηγήθηκε ο Fejér στην ανακάλυψή του;

Ας διερευνήσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ο Fejér έκανε αυτήν την ανακάλυψη. Η ιδέα να αντιστοιχίσει κανείς ένα «άθροισμα» σε μια αποκλίνουσα σειρά μέσω καποιας μεθόδου αθροισιμότητας ήταν ήδη γνωστή στους μαθηματικούς. Σύμφωνα με τον Lebesgue, ο d'Alembert είχε ήδη χρησιμοποιήσει τη διαδικασία λήψης των αριθμητικών μέσων για τα μερικά αθροίσματα της σειράς

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt \qquad (0 < t < 2\pi).$$

Οι μέθοδοι αθροισιμότητας έγιναν σημαντικό θέμα στις μελέτες του Abel, και μετά σε αυτές των Poisson, Frobenius, Holder, Cesàro και Borel. Ο Abel απέδειξε το φημισμένο θεώρημα που ισχυρίζεται ότι

$$\lim_{r\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

όποτε το όριο στο δεξί μέλος υπάρχει με τη συνήθη έννοια. Ο Poisson θεώρησε το αριστερό μέλος, σαν το γενικευμένο άθροισμα της σειράς, είτε η σειρά συγκλίνει είτε όχι. Ο Frobenius γενίκευσε το θεώρημα του Abel, δείχνοντας ότι

$$\lim_{r\uparrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \lim_{n\to\infty} (S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1})$$

όταν όριο στο δεξί μέλος υπάρχει. Ο Holder γενίκευσε το θεώρημα του Frobenius θεωρώντας επαναλήψεις της διαδικασίας λήψης των αριθμητικών μέσων. Ο Cesàro γενίκευσε ένα άλλο θεώρημα του Abel, για το γινόμενο σειρών, και εισήγαγε για το σκοπό αυτό τις διαδικασίες που συμβολίζουμε σήμερα με (C, k). Η δουλειά του Cesàro ήταν αρκετά πρόσφατη γύρω στο 1900. Ο Emile Borel το 1895 όρισε νέα διαδικασία άθροισης και την εφάρμοσε στην αναλυτική συνέχιση συναρτήσεων που ορίζονται από μια σειρά Taylor. Ο Fejér ήξερε όλα αυτά τα έργα.

Μια δελεαστική ιδέα για να λυθεί το πρόβλημα του Dirichlet για τον κύκλο στη μορφή

$$g(r\cos t, r\sin t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)r^n$$

όταν η συνάρτηση στο σύνορο έχει ως σειρά Fourier την

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

ήταν να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα του Abel. Ωστόσο, το παράδειγμα του P. du Bois Reymond αποκλείει κάθε ελπίδα να βρεθεί λύση, με αυτόν τον τρόπο, για μια αυθαίρετη συνεχή συνάρτηση στο σύνορο. Θα μπορούσε κανείς να εφαρμόσει το θεώρημα του Frobenius; Αυτό το ενδεχόμενο φαίνεται ότι ήταν η αφετηρία του Fejér.

Ο Fejér έμαθε για το πρόβλημα αυτό κατά τη διάρκεια του ακαδημαϊκού έτους 1899-1900 που πέρασε ως φοιτητής στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, και βρήκε τη λύση στη Βουδαπέστη στα τέλη Οκτωβρίου. Παρατήρησε αμέσως ότι η μέθοδος που χρησιμοποίησε ήταν πιο σημαντική από τη νέα λύση του προβλήματος του Dirichlet. Στην εργασία που έστειλε στο Παρίσι, στο Comptes Rendus, η λύση του προβλήματος του Dirichlet εμφανίζεται ως μία από τις συνέπειες του θεωρήματός του. Η απόδειξη βασίζεται στον πυρήνα

$$K_n(x) = \frac{1-\cos nx}{1-\cos x}$$

και συνδέεται άμεσα με τη λύση του Schwarz για το πρόβλημα του Dirichlet, η οποία κάνει χρήση του πυρήνα Poisson

$$P_r() = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}.$$

Ουσιαστικά, ο Fejér δεν εισήγαγε κάποια νέα διαδικασία άθροισης για αποκλίνουσες σειρές, αντιθέτως, χρησιμοποίησε τις πιο γνωστές από αυτές. *Δεν* ήταν αυτός που εισήγαγε τους θετικούς πυρήνες στη μελέτη των σειρών Fourier: ο πυρήνας του Poisson ήταν ήδη γνωστός και είχε εφαρμοστεί στη μελέτη των σειρών Fourier απο τον Picard σε εργασίες του πολύ πριν από το 1900. Ο Fejér δεν έλυσε μια δύσκολη εικασία με σύνθετες μεθόδους.

Αυτό που έκανε ήταν κάτι πολύ πιο σημαντικό: αντιμετώπισε με σαφή, απλό και εμπεριστατωμένο τρόπο ένα πρόβλημα που μέχρι πριν θεωρούνταν παράξενο. Συνδυάζοντας τις σειρές Fourier με τις διαδικασίες άθροισης δημιούργησε ένα βολικό πλαίσιο για τις δύο θεωρίες. Έτσι, η διαδικασία άθροισης του Riemann, η μέθοδος του Schwarz για το πρόβλημα Dirichlet στον κύκλο (αυτή που εισήγαγε ο Fourier για τον υπολογισμό της θερμοκρασίας ενος θερμού σώματος) και τέλος η πρόσφατη μέθοδος του Weierstrass για τη μελέτη της θερμοκρασίας συναρτήσει του χρόνου μέσω της σειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)e^{-tn^2}$$

φάνηκε πως εκφράζουν τις ίδιες ιδέες, που παρουσιάζονται πιο απλά στην εργασία του Fejér. Η σημασία των θετικών πυρήνων τονίστηκε, και αναπτύχθηκε σε πολλά μεταγενέστερα έργα του Fejér. Η μόλις δύο σελίδων εργασία του Fejér άλλαξε εντελώς την επικρατούσα άποψη για την θέση των τριγωνομετρικών σειρών στα μαθηματικά. Επίσης, έδωσε νέα ώθηση στη μελέτη των μεθόδων άθροισης.

1.3 Βιογραφία του Fejér

Ο Leopold (Lipot) Fejér γεννήθηκε στις 9 Φεβρουαρίου του 1880, στο Pecs, μια επαρχιακή πόλη στην Ουγγαρία. Από μικρή ηλικία είχε έντονο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Πήρε το δεύτερο βραβείο Eotvos το 1897. Την ίδια χρονιά άρχισε τις πανεπιστημιακές σπουδές του στη Βουδαπέστη, και το 1902 έλαβε το διδακτορικό του δίπλωμα. Παράλληλα, πέρασε την ακαδημαϊκή χρονιά 1899-1900 στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Αυτό επηρέασε καθοριστικά την επιστημονική του καριέρα, καθώς οδηγήθηκε, πιθανότατα από μια παρατήρηση του Schwarz, στην ανακάλυψή του για τις σειρές Fourier. Ο Fejér εκλέχτηκε μέλος της Ουγγρικής Ακαδημίας Επιστημών το 1908. Ήταν σε ηλικία μόλις 31 ετών όταν, το 1911, διορίστηκε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο της Βουδαπέστης – δεν υπήρχε υψηλότερη ακαδημαϊκή θέση στην Ουγγαρία. Έζησε στη Βουδαπέστη, εν μέσω πολιτικών συγκρούσεων που συνέβαιναν στη χώρα (η πλήρης ένταξη του στην Ακαδημία καθυστέρησε λόγω φυλετικών προκαταλήψεων και μάλιστα εκδιώχθηκε από τη θέση του καθηγητή από το φασιστικό καθεστώς το 1944) και ποτέ δεν αναζήτησε μια θέση έξω από την πατρίδα του. Ταξίδεψε, ωστόσο, έξω από την Ουγγαρία, ιδίως στη Γερμανία, όπου ήρθε σε επαφή με τους Κ. Καραθεοδωρή, E. Landau και I. Schur. Στις Ηνωμένες Πολιτείες υπήρξε προσκεκλημένος ομιλητής της Αμερικανικής Μαθηματικής Εταιρείας το 1933. Ήταν επιβλέπων καθηγητής στις διδακτορικές διατριβές των John von Neumann, Paul Erdos, George Pólya και Pál Turán. Πέθανε στις 15 Οκτωβρίου 1959, μετά από μακροχρόνια ασθένεια, σε ηλικία 79 ετών.

2 Το θεώρημα Riesz–Fischer

Η σχέση ανάμεσα στο ολοκλήρωμα Lebesgue και τις σειρές Fourier αποτυπώθηκε με τον καλύτερο τρόπο στο θεώρημα Riesz-Fischer για τους συντελεστές Fourier των L_2 συναρτήσεων, δηλαδή, στον ισομορφισμό μεταξύ του $L_2(\mathbb{T})$ και του $\ell_2(\mathbb{Z})$. Ο ίδιος ο Frigyes Riesz, ευχαριστημένος από την κομψότητά του, το περιέγραφε σαν ένα *billet aller-retour permanent entre deux espaces à une infinité de dimensions*.

Το ουσιαστικό εργαλείο που χρησιμοποίησαν και οι δύο συγγραφείς, με περισσότερο ή λιγότερο σαφή τρόπο, ήταν η πληρότητα του χώρου L_2. Μάλιστα, η έννοια αυτή δεν είχε ακόμα οριστεί τη στιγμή που απέδειξαν το θεώρημά τους. Περιφραστικά υποννοούσαν κάτι ισοδύναμο. Στις μέρες μας, η πρόταση «ο L_p είναι πλήρης» είναι μια πρόταση τριών λέξεων, η ουσία όμως της μεθόδου που ανέπτυξαν, ανεξάρτητα, οι Frederic Riesz και Ernst Fischer βρίσκεται στον ορισμό του πλήρους μετρικού χώρου και στον ορισμό του χώρου L_p $(1 \leqslant p < \infty)$. Η υπεροχή του ολοκληρώματος Lebesgue έναντι του ολοκληρώματος Riemann, και ο ρόλος που έπαιξε στη συναρτησιακή ανάλυση, βασίζονται σε αυτήν ακριβώς την πρόταση των τριών λέξεων.

Στη συνέχεια περιγράφουμε την ιστορία του θεωρήματος Riesz-Fischer, αρχίζοντας με μια σύντομη βιογραφία του Riesz.

2.1 Βιογραφία του Frigyes Riesz

Ο Frigyes Riesz, Frederic στα Γερμανικά, ήταν Ούγγρος μαθηματικός. Γεννήθηκε στις 22-1-1880 σε μια εβραϊκή οικογένεια στο Gyor και πέθανε στις 28-2-1956 στη Βουδαπέστη. Ήταν ο μεγαλύτερος αδελφός του μαθηματικού Marcel Riesz. Σπούδασε στην Βουδαπέστη, κατόπιν πήγε για ένα διάστημα στη Ζυρίχη για να συνεχίσει τις σπουδές του, και πήρε το διδακτορικό του δίπλωμα, με θέμα την γεωμετρία, στην Βουδαπέστη το 1902. Για δύο χρόνια δίδασκε σε σχολεία πριν αναλάβει πανεπιστημιακή θέση.

Ο Riesz ήταν ένας από τους ιδρυτές της συναρτησιακής ανάλυσης και η έρευνα του είχε σημαντικές εφαρμογές στην φυσική. Βασίστηκε στις ιδέες του Fréchet για την απόσταση, και τις εισήγαγε στην διατριβή του για να συνδέσει τη δουλειά του Lebesgue για τις πραγματικές συναρτήσεις με την περιοχή των ολοκληρωτικών εξισώσεων που είχε αναπτυχθεί από τον Hilbert και τον μαθητή του Schmidt.

Το 1907 και το 1909, ο Riesz απέδειξε θεωρήματα αναπαράστασης για τα συναρτησοειδή στο χώρο των τετραγωνικά Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Την επόμενη χρονιά εισήγαγε τον χώρο L_q των q-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και έτσι εγκαινίασε τη μελέτη των χώρων συναρτήσεων με νόρμα, αφού, για $q > 2$ οι χώροι αυτοί δεν είναι χώροι Hilbert. Ο Riesz εισήγαγε την έννοια της «ασθενούς σύγκλισης» για μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n(x)\}$. Μετά από αυτές τις εργασίες του, που σηματοδοτούν τη γέννηση της θεωρίας τελεστών, ο Riesz βρέθηκε, το 1918, πολύ κοντά στην δημιουργία μιας αξιωματικής θεωρίας για τους χώρους Banach, κάτι που έγινε δύο χρόνια αργότερα από τον Banach στην διατριβή του.

Το 1911 ο Roesz έλαβε μια θέση στο Kolozsvár της Ουγγαρίας, όπου παρέμεινε μέχρι το 1919. Έπειτα από την συνθηκολόγηση του 1920, η Ουγγαρία έχασε μεγάλο μέρος της συνολικής της έκτασης και έτσι πλέον το Kolozsvár δεν ανήκε στην Ουγγαρία, με συνέπεια το Πανεπιστήμιο να μετακινηθεί εντός των νέων Ουγγρικών συνόρων, συγκεκριμένα στο Szeged, στο οποίο δεν υπήρχε Πανεπιστήμιο. Ο Riesz έγινε καθηγητής και στη συνέχεια πρύτανης του Πανεπιστημίου του Szeged. Εκεί, ο Riesz το 1922 μαζί με τον János Bolyai θα δημιουργήσουν ένα μαθηματικό ινστιτούτο. Ο Riesz έγινε αρχισυντάκτης του περιοδικού του ινστιτούτου, του Acta Scientiarum Mathematicarum, που αναδείχτηκε σε σημαντική πηγή για τα μαθηματικά, καθώς είχε κάνει πολλές δημοσιεύσεις εκεί και ο ίδιος. Το 1945 διορίστηκε καθηγητής στην έδρα των μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Βουδαπέστης. Πολλές από τις θεμελιώδεις εργασίες του στη συναρτησιακή ανάλυση συνδυάστηκαν με αυτές του Banach. Το θεώρημα που τώρα ονομάζεται θεώρημα Riesz-Fischer είναι θεμελιώδους σημασίας για την ανάλυση Fourier και αποτέλεσε την μαθηματική βάση για την ανάπτυξη της κβαντικής θεωρίας. Ο Riesz είχε λάβει πολλές τιμητικές διακρίσεις για το έργο του, καθώς και αξιώματα: ήταν μέλος της Ουγγρικής Ακαδημίας Επιστημών, συμμετείχε στις Ακαδημίες του Παρισιού και της Σουηδίας, ενώ το 1949 τιμήθηκε με το βραβείο Kossuth.

2.2 Η εργασία του Riesz

Παραθέτουμε αυτούσια την εργασία του Riesz του 1907.

ANALYSE MATHÉMATIQUE – *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions.*
Note de **M Frédéric Riesz**, présentée par M. Émile Picard.

Για την επίλυση κάποιων συναρτησιακών εξισώσεων, του είδους που ήταν πολύ γνωστό στον Fredholm, ο κος Hilbert πρότεινε μία πολύ γενική μέθοδο. Η μέθοδος αυτή έγκειται στο να αναχθεί η επίλυση αυτών των συναρτησιακών εξισώσεων στην επίλυση ενός άπειρου συστήματος γραμμικών εξισώσεων με άπειρους το πλήθος αγνώστους. Ο κος Hilbert έκανε την σύνδεση ανάμεσα στα δύο αυτά προβλήματα, χρησιμοποιώντας ένα σύστημα ορθογώνιων συναρτήσεων. Οι συντελεστές, όπως και οι άγνωστοι αυτού του συστήματος, δεν είναι τίποτε άλλο από ολοκληρώματα που σχηματίζονται από τις δοθείσες συναρτήσεις και τις άγνωστες συναρτήσεις του προβλήματος, με έναν τρόπο ανάλογο προς αυτόν με τον οποίο ορίζονται οι συντελεστές Fourier, με τη βοήθεια ενός ορθογώνιου συστήματος.

Για τη μέθοδο του κου Hilbert, το ακόλουθο ερώτημα είναι πολύ σημαντικό:

Δίνεται ένα ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων, οι οποίες είναι ορισμένες σε κάποιο διάστημα. Σε κάθε μία από αυτές τις συναρτήσεις αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό. Κάτω από ποιές συνθήκες, θα υπάρχει κάποια συνάρτηση τέτοια ώστε, για κάθε συνάρτηση του συστήματος, το ολοκλήρωμα του γινομένου της συνάρτηση με την συνάρτηση του συστήματος, υπολογισμένο στο δοθέν διάστημα, θα είναι ίσο με τον δοθέντα αριθμό;

Για την κλάση των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, φραγμένων ή μη, των οποίων το τετράγωνο είναι επίσης ολοκληρώσιμη συνάρτηση, το θεώρημα που πρόκειται να παρουσιάσω δίνει πλήρη απάντηση. Σημειώνω ότι ένα ορθογώνιο σύστημα συναρτήσεων, εκ των οποίων καμία δεν έχει ολοκλήρωμα 0, μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο. Η απόδειξη του θεωρήματος, την οποία θα περιγράψω κάνοντας την υπόθεση ότι οι συναρτήσεις είναι φραγμένες, μπορεί να επεκταθεί χωρίς δυσκολία στις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις των οποίων το τετράγωνο είναι επίσης ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Ιδού το θεώρημα:

Έστω $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ ένα κανονικοποιημένο σύστημα συναρτήσεων, που είναι ορισμένες στο διάστημα $[a, b]$, ορθογώνιες ανά δύο, φραγμένες ή μη, ολοκληρώσιμες και με ολοκληρώσιμο τετράγωνο. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\, dx = 0 \quad (i \neq j) \quad \textit{και} \quad \int_a^b [\varphi_i(x)]^2 dx = c^2$$

για όλες τις συναρτήσεις του συστήματος. Σε κάθε συνάρτηση $\varphi_i(x)$ του συστήματος αντιστοιχίζουμε έναν αριθμό a_i. Τότε, η σύγκλιση της σειράς $\sum_i a_i^2$ είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη για να υπάρχει συνάρτηση $f(x)$ τέτοια ώστε

$$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx = a_i$$

για κάθε συνάρτηση $\varphi_i(x)$ και κάθε αριθμό a_i.

Το γεγονός ότι η συνθήκη που δίνουμε είναι αναγκαία προκύπτει άμεσα από μια πολύ γνωστή ανισότητα του Bessel, η οποία είχε αποδειχθεί από αυτόν για συνεχείς συναρτήσεις, αλλά εξακολουθεί να ισχύει για οποιεσδήποτε συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες με ολοκληρώσιμο τετράγωνο. Σχετικά με το ερώτημα αν αυτή η συνθήκη είναι επίσης ικανή, ξεκινάω περιγράφοντας συνοπτικά την γραμμή της απόδειξής μου.

1. Δείχνω λοιπόν το θεώρημα για την κλασική περίπτωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Σε αυτήν την περίπτωση, θα δείξω ότι ολοκληρώνοντας όρο προς όρο μια τριγωνομετρική σειρά, για την οποία η σειρά των τετραγώνων των συντελεστών της συγκλίνει, παίρνουμε μια σειρά αόριστων ολοκληρωμάτων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια *συνεχή συνάρτηση* με *φραγμένη κύμανση*. Αυτή η συνάρτηση έχει *παράγωγο* σε όλα τα σημεία του διαστήματος $[0, 2\pi]$, με την εξαίρεση ίσως των σημείων ενός συνόλου μηδενικού μέτρου. Δείχνω ότι *η συνάρτηση $f(x)$ που είναι ίση με αυτήν την παράγωγο στα σημεία όπου υπάρχει, και παίρνει τυχούσες τιμές στα υπόλοιπα, και η συνάρτηση $[f(x)]^2$, είναι ολοκληρώσιμες, και ότι οι συντελεστές Fourier που αντιστοιχούν στην συνάρτηση $f(x)$ είναι αυτοί που είχαν δοθεί εκ των προτέρων.* Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιώ το επόμενο λήμμα, το οποίο είναι ίσως ενδιαφέρον από μόνο του:

Αν μια ακολουθία συναρτήσεων $f_i(x)$, που είναι ορισμένες στο ίδιο μετρήσιμο σύνολο E, και είναι ολοκληρώσιμες και με ολοκληρώσιμο τετράγωνο, συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f(x)$ σε κάθε σημείο του συνόλου, με την εξαίρεση ίσως των σημείων ενός συνόλου μηδενικού μέτρου, και αν ισχύει

$$\int_E [f_i(x)]^2 dx \leqslant M$$

για κάθε συνάρτηση $f_i(x)$, όπου M είναι ένας σταθερός αριθμός, τότε

$$\int_E [f(x)]^2 dx = \lim_{i\to\infty} \int_E [f_i(x)]^2 dx.$$

2. Για να περάσω στην γενική περίπτωση, θα χρησιμοποιήσω το ακόλουθο λήμμα:

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνουν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_k a_{ik} x_k = y_i, \tag{2.1}$$

με άπειρους το πλήθος αγνώστους, όπου οι συντελεστές a_{ik} είναι τέτοιοι ώστε

$$\sum_k a_{ik}a_{jk} = 0 \quad (i \neq j) \quad \textit{και} \quad \sum_k a_{ik}^2 = 1,$$

τότε για κάθε ακολουθία αριθμών y_k για τους οποίους η σειρά $\sum_k y_k^2$ συγκλίνει, το σύστημα (2.1) *έχει τουλάχιστον μία λύση τέτοια ώστε η σειρά $\sum_k x_k^2$ να συγκλίνει, και αυτή η λύση δίνεται από τις σχέσεις*

$$x_k = \sum_i a_{ik}y_i. \tag{2.2}$$

Αν το σύστημα των αριθμών a_{ik} είναι πλήρες, δηλαδή αν δεν υπάρχει ακολουθία αριθμών z_k τέτοια ώστε

$$\sum_k z_k^2 = 1 \quad \textit{και} \quad \sum_k a_{ik}z_k = 0$$

για κάθε i, τότε οι εξισώσεις (2.2) *δίνουν τη μοναδική λύση του συστήματος* (2.1).

Επιπλέον, σε αυτήν την τελευταία περίπτωση, έχουμε[1]

$$\sum_k x_k^2 = \sum_i y_i^2.$$

Με τη βοήθεια αυτού του λήμματος, θα περάσουμε από την ειδική περίπτωση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων σε αυτήν ενός γενικού συστήματος, με μόνο περιορισμό οι συναρτήσεις του συστήματος να είναι ορισμένες στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Με δεδομένα το σύστημα των συναρτήσεων $\{\varphi_i(x)\}$ και τους αριθμούς a_i, για να βρούμε την άγνωστη συνάρτηση $f(x)$, εφαρμόζουμε το πολύ γνωστό θεώρημα για την ολοκλήρωση του γινομένου δύο συναρτήσεων που αναπαρίστανται από τις σειρές Fourier τους, θεώρημα που, μέσα από την δουλειά του κου Fatou, είναι γνωστό ότι ισχύει για όλες τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με ολοκληρώσιμο τετράγωνο. Φτάνουμε σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων σαν το (2.1), και κάθε λύση (x_k) αυτού του συστήματος, για την οποία η σειρά $\sum_k x_k^2$ συγκλίνει, θα μας δώσει τους συντελεστές Fourier μιας συνάρτησης $f(x)$ για την οποία θα ισχύουν οι

$$\int_0^{2\pi} f(x)\varphi_i(x)\, dx = a_i$$

για κάθε i.

Αν το σύστημα των ορθογώνιων συναρτήσεων $\varphi_i(x)$ είναι πλήρες, τότε το σύστημα των εξισώσεων θα έχει μοναδική λύση. Η συνάρτηση $f(x)$ θα είναι τότε πλήρως προσδιορισμένη, modulo μια συνάρτηση με ολοκλήρωμα 0.

Τέλος, έχοντας αποδείξει το θεώρημα για συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, μπορούμε να το περάσουμε χωρίς δυσκολία σε οποιοδήποτε διάστημα.

[1] Αυτό το λήμμα, το οποίο αποδεικνύεται εύκολα, προκύπτει και από κάποιες όμορφες έρευνες του κου E. Schmidt για τα συστήματα γραμμικών εξισώσεων με άπειρους αγνώστους, οι οποίες θα δημοσιευθούν προσεχώς. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ως συνέπεια κάποιων αποτελεσμάτων του κου Hilbert.

2.3 Η εργασία του E. Fischer

Παραθέτουμε τώρα αυτούσια την εργασία του Fischer του 1907.

ANALYSE MATHÉMATIQUE – *Sur la convergence en moyenne.*

Note de **M Ernst Fischer**, présentée par M. Émile Picard.

Στις 11 Μαρτίου ο M. Riesz παρουσίασε στην Ακαδημία Επιστημών ένα άρθρο σχετικά με τα ορθογώνια συστήματα συναρτήσεων (Comptes Rendus, 18 Μαρτίου 1907). Είχα κι εγώ φτάσει στο ίδιο αποτέλεσμα, και το έχω παροσιασει σε μια διάλεξη που έκανα στη Μαθηματική Εταιρεία του Brunn ήδη από τις 5 Μαρτίου. Έτσι, η ανεξαρτησία μου είναι προφανής, αλλά η προτεραιότητα της δημοσίευσης δίδεται στον κο Riesz. Ας μου επιτραπεί να παρουσιάσω εδώ τη δική μου απόδειξη, η οποία είναι διαφορετική από αυτήν του κου Riesz. Για μένα το θεώρημα είναι μια ειδική περίπτωση ενός γενικού θεωρήματος για τη σύγκλιση των σειρών κατά μέσο.

Έστω Ω το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων f μιας πραγματικής μεταβλητής x για τις οποίες οι f και f^2 να είναι ολοκληρώσιμες (Lebesgue, *Lecons sur l'intégration*, p. 115) σε ένα πεπερασμένο διάστημα (a, b). Το γινόμενο $\phi\psi$ δύο συναρτήσεων του Ω είναι πάντα ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έχουμε ότι

$$\left(\int_a^b \phi\psi\, dx\right)^2 \leqslant \int_a^b \phi^2\, dx \int_a^b \psi^2\, dx,$$

γνωστή σχέση που μπορούμε να τη γράψουμε και ως εξής:

$$\left[\int_a^b (\phi+\psi)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b \phi^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b \psi^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ορισμοί. – I. Λέμε ότι μια ακολουθία συναρτήσεων που ανήκουν στο Ω *συγκλίνει κατά μέσο* αν έχουμε:

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_a^b (f_m - f_n)^2 dx = 0. \tag{2.3}$$

II. Λέμε ότι αυτή *συγκλίνει κατά μέσο* σε μια συνάρτησης f του Ω αν έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f - f_n)^2 dx = 0. \tag{2.4}$$

Γράφουμε τότε την ισοδυναμία $\lim f_n \sim f$, η οποία δεν συνεπάγεται την ύπαρξη ορίου με την συνήθη έννοια της λέξης. Κάθε συνάρτηση του Ω που δεν διαφέρει από την f παρά σε ένα σύνολο σημείων μέτρου 0 (λέμε ότι αυτές οι συναρτήσεις $\sim f$ είναι *σχεδόν ίσες* με την f) έχει την ίδια ιδιότητα σέ σχέση με την ακολουθία $\{f_n\}$, και το αντίστροφο.

ΘΕΩΡΗΜΑ. *Εάν μια ακολουθία συναρτήσεων που ανήκουν στο Ω συγκλίνει κατά μέσο, τότε υπάρχει μια συνάρτηση f στο Ω στην οποία η ακολουθία συγκλίνει κατά μέσο.*

Απόδειξη. Έστω $f_1, f_2, \dots$ μια ακολουθία συναρτήσεων του Ω η οποία συγκλίνει κατά μέσο. Από τις (2.3) και (2.4) τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n \, dx = F(x), \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n^2 \, dx = \Theta(x)$$

υπάρχουν και ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις, με την $\Theta(x)$ μονότονη. Θα δείξουμε ότι η $F(x)$ είναι φραγμένη συνάρτηση, και επιπλέον,

$$\lim \sum |F(x_n + h_n) - F(x_n)| = 0 \quad \text{για} \quad \lim \sum h_n = 0, \tag{2.5}$$

συμβολίζοντας με $(x_n, x_n + h)$ ένα πεπερασμένο σύστημα διαστημάτων που βρίσκονται μέσα στο (a, b) και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία ($n = 1, , \dots ; h_n > 0$). Πράγματι, από την (2.3) έχουμε:

$$[F(x+h) - F(x)]^2 \leqslant h[\Theta(x+h) - \Theta(x)], \qquad h > 0 \tag{2.6}$$

απ¨ όπου, θέτοντας $h_n = u_n^2$, $\Theta(x_n + h_n) - \Theta(x_n) = v_n^2$,

$$\left[\sum_n |F(x_n + h_n) - F(x_n)|\right]^2 \leqslant \left(\sum u_n v_n\right)^2 \leqslant \sum_n u_n^2 \sum_n v_n^2 \leqslant \sum_n h_n \cdot \Theta(b).$$

Έστω $f(x)$ η παράγωγος από τα δεξιά της $F(x)$ για όλα τα σημεία στα οποία η τιμή της είναι πεπερασμένη, και $f(x) = 0$ για τα άλλα σημεία (σύνολο που έχει μέτρο 0). Η $f(x)$ και η $g(x)$ που προκύπτει με τον ίδιο τρόπο από την $\Theta(x)$, είναι ολοκληρώσιμες (βλέπε Lebesgue) και, από την (2.6), $f^2 = g$ (εκτός από ένα σύνολο μέτρου 0), η f^2 είναι ολοκληρώσιμη, άρα η f ανήκει στο Ω. Η (2.5) μας εξασφαλίζει ότι

$$\int_a^x f \, dx = F(x) \quad \text{άρα} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n \, dx = \int_a^x f \, dx,$$

και με κάποιους μετασχηματισμούς, απλούς αλλά σημαντικούς, των ορισμών I και II, βλέπουμε ότι η f_n συγκλίνει κατά μέσο στην f. □

Έστω $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$ ένα αριθμήσιμο σύνολο μέσα στο Ω, και έστω ότι

$$\int_a^b \phi_m \phi_n \, dx = 0 \quad \text{αν } m \neq n \quad \text{και} \quad \int_a^b \phi_n^2 \, dx = 1.$$

Αν η σειρά με μη αρνητικούς σταθερούς όρους $a_1^2+a_2^2+\cdots$ συγκλίνει, τότε η $a_1\phi_1+a_2\phi_2+\cdots$ συγκλίνει κατά μέσο όρο, και το θεώρημα που αποδείξαμε εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας συνάρτησης ϕ στο Ω, η οποία είναι ορισμένη σχεδόν παντού, για την οποία

$$\phi(x) \sim a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x) + \cdots .$$

Τώρα, από την (2.3), μπορούμε να υπολογίσουμε τους a_n με την κλασσική μέθοδο, οπότε

$$a_n = \int_a^b \phi\phi_n \, dx \tag{2.7}$$

και έχει αποδειχθεί το θεώρημα που έχει ήδη ανακοινώσει ο κος Riesz.

2.4 Σύγκριση των δύο εργασιών

Διαβάζοντας το έργο και των δύο αυτών σπουδαίων μαθηματικών συμπεραίνουμε ότι παρόλο που η κατάληξη των αποδείξεων τους είναι κοινή, η απαρχή των θεωριών τους διαφέρει σε μεγάλο βαθμό. Έτσι έχουμε ότι ο Fischer προσπάθησε να αποδείξει το αποτέλεσμά του σαν συνέπεια της ορθογωνιότητας του συστήματος αλλά και της πληρότητας του L_2. Η απόδειξη αυτή της πληρότητας δεν είναι απόλυτα σωστή. Χρησιμοποιεί το γεγονός ότι τα αόριστα ολοκληρώματα των συναρτήσεων G_n στη δεδομένη ακολουθία Cauchy συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $[a, b]$ σε κάποια συνάρτηση g, συνεχή με φραγμένη κύμανση. Η ύπαρξη του ορίου $g \in L_2$ για την ακολουθία Cauchy λαμβάνεται εφαρμόζοντας στην G το θεωρήμα διαφόρισης από την θεωρία του Lebesgue.

Ο Riesz χρησιμοποιεί το ίδιο σκεπτικό στην εργασία του, αλλά δεν κάνει ρητή αναφορά στην πληρότητα του L_2, αν και αποτέλεσμά του μπορεί να ερμηνευθεί με αυτόν τον τρόπο. Αρχικά αντιμετωπίζει την ειδική περίπτωση των τριγωνομετρικών σειρών και έπειτα επεκτείνει το αποτέλεσμά του και σε γενικά ορθοκανονικά συστήματα χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fatou-Parseval. Αναφέρει ότι η ολοκλήρωση όρο προς όρο μιας τριγωνομετρικής σειράς με δεδομένους τετραγωνικά αθροίσιμους συντελεστές, δίνει μια σειρά που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση F. Η παράγωγος f της F, που ορίζεται σχεδόν παντού, είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και έχει για συντελεστές Fourier τους δεδομένους συντελεστές.

Όπως προαναφέραμε, το ουσιαστικό εργαλείο που χρησιμοποίησαν και οι δύο συγγραφείς, με περισσότερο ή λιγότερο σαφή τρόπο, ήταν η πληρότητα του χώρου L_2. Μάλιστα, η έννοια αυτή δεν είχε ακόμα οριστεί τη στιγμή που απέδειξαν το θεώρημά τους. Περιφραστικά υποννοούσαν κάτι ισοδύναμο. Στις μέρες μας, η πρόταση «ο L_p είναι πλήρης» είναι μια πρόταση τριών λέξεων, η ουσία όμως της μεθόδου που ανέπτυξαν, ανεξάρτητα, οι Frederic Riesz και Ernst Fischer βρίσκεται στον ορισμό του πλήρους μετρικού χώρου και στον ορισμό του χώρου L_p ($1 \leqslant p < \infty$).

2.5 Η ιστορία του θεωρήματος Riesz-Fischer

Ο Frederic Riesz επισκεπτόταν το Gottingen στις αρχές του έτους 1907, ενώ ο Ernst Fischer ήταν στο Brno (Brunn)) την ίδια περίοδο. Και οι δύο, ο ένας ανεξάρτητα από τον άλλον, ανακάλυψαν το εξής θεώρημα: αν μας δοθεί μια ακολουθία $(a_n) \in \ell_2$ τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f \in L_2(\mathbb{T})$ της οποίας οι συντελεστές Fourier είναι οι a_n. Και οι δύο διατύπωσαν το αποτέλεσμα για γενικά ορθοκανονικά συστήματα.

Ο Riesz ανακοίνωσε το αποτέλεσμά του σε μια διάλεξη στο Gottingen, στις 26 Φεβρουαρίου, ενώ ο Fischer σε μια διάλεξη του στο Brunn στις 5 Μαρτίου. Ο Riesz δημοσίευσε αμέσως το θεώρημα σε δύο μορφέσ: σε ένα άρθρο στο Gottingen Nachrichten, που παρουσιάστηκε από τον Hilbert στις 9 Μαρτίου, και σε ένα άρθρο στο Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, που παρουσιάστηκε από τον Picard στις 11 Μαρτίου και δημοσιεύθηκε στις 18 Μαρτίου με τον τίτλο *Sur les systemes orthogonaux de fonctions*. Το κίνητρο του Riesz ήταν η μελέτη με τη μέθοδο του Hilbert μιας γραμμικής ολοκληρωτικής εξίσωσης με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος. Ωστόσο, απέδειξε το θεώρημα πρώτα για το τριγωνομετρικό σύστημα, και μετά το επέκτεινε για ένα ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων που ορίζονται σε ένα διάστημα, και στη συνέχεια για ένα γενικό ορθοκανονικό σύστημα. Το τελευταίο βήμα πραγματοποιείται σε ένα άλλο άρθρο στο Comptes Rendus, που παρουσιάστηκε στις 2 Απριλίου και δημοσιεύτηκε στις 8 Απριλίου.

Μόλις διάβασε το άρθρο του Riesz, της 18ης Μαρτίου, ο Ernst Fischer αντέδρασε στέλνοντας τη δική του εργασία στο Comptes Rendus με τίτλο *Sur la convergence en moyenne*. Σε ένα πρώτο άρθρο, με ημερομηνία 13 Μαΐου, αναγνώρισε την προτεραιότητα του Ριεσζ στη δημοσίευση του αποτελέσματος, αλλά επεσήμανε ότι το είχε κι αυτός και ότι είχε δώσει σχετικές διαλέξεις στο Brno (Brunn) στις 5 Μαρτίου. Το αποτέλεσμά του ήταν το ίδιο, αλλά η προσέγγιση του Fischer ήταν πιο ευθεία και εντόπιζε το κύριο σημείο (οτι δηλαδή ο L_2 είναι πλήρης) με ρητό (αν και όχι πολύ συμπυκνωμένο) τρόπο. Σε ένα δεύτερο άρθρο, ο Fisher εισήγαγε την βέλτιστη προσέγγιση στον L_2 και ανακοίνωσε ότι θα αναπτύξει αυτή τη θεωρία αργότερα στο πλαίσιο μιας «γεωμετρίας των συναρτήσεων» (*"en m' appuyant sur une espèce de géométrie des fonctions"*).

Ήταν η σειρά του Riesz να αντιδράσει. Το Comptes Rendus της 24ης Ιουνίου δημοσίευσε άρθρο του Frederic Riesz με τον τίτλο *Sur une espèce de geometrie analytique des systèmes de fonctions sommables*. Πρώτα, υπενθυμιζει την προτεραιότητά του, μνημονεύοντας την διάλεξή του στο Gottingen στις 26 Φεβρουαρίου. Στη συνέχεια, διευρύνει το ερώτημα: «Μετά από τα βασικά αποτελέσματα που έχουν αποδείξει διάφοροι γεωμέτρες κατά τα τελευταία χρόνια και που βασίζονται επί το πλείστον σε εκείνα του κου Fejér, η ιδέα της αναπαράστασης μιας συνάρτησης από τους συντελεστές Fourier της έχει γίνει πολύ γνωστή. Το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων θα μπορούσε να αναπαρασταθεί κατ¨ αυτόν τον τρόπο ως ένα υπόχωρος του απειροδιάστατου χώρου (ακολουθιών). Ποιός είναι αυτός ο υπόχωρος; Μέχρι τώρα δεν είμαστε σε θέση να απαντήσουμε». Με τον σύγχρονο συμβολισμό, το ερώτημα του Riesz ήταν τι μπορούμε να πούμε για τον $A(\mathbb{Z}) = FL_1(\mathbb{T})$. Κατόπιν, ο Riesz εξηγεί τι συμβαίνει αν αντικαταστήσουμε τον L_1 από τον L_2, δηλαδή την $FL_2(\mathbb{T}) = \ell_2(\mathbb{Z})$.

Ο Riesz επέστρεψε σε αυτό το θέμα αργότερα: επέκτεινε το θεώρημα του Fischer (ότι ο L_2 είναι πλήρης) δείχνοντας ότι ο L_p είναι πλήρης για κάθε $p \geqslant 1$. Το θεώρημα αυτό, γνωστό ως θεώρημα του Riesz, είναι ακόμα πιο θεμελιώδες από το θεώρημα Riesz-Fischer.

Οι Fischer και Riesz εργάστηκαν ανεξάρτητα και πήραν το ίδιο αποτέλεσμα για την ίδια στιγμή κατά την έναρξη του 1907. Σύμφωνα με την αλφαβητική τάξη, θα ήταν δικαιολογημένο, όπως κάνουν ορισμένοι συγγραφείς, να το αποκαλούμε «το θεώρημα των Fischer και Riesz». Ωστόσο οι περισσότεροι συγγραφείς (και ο ίδιος ο Frederic Riesz, πρώτος απ¨ όλους) το αποκαλούν «το θεώρημα των Riesz και Fischer». Εν πάση περιπτώσει, αυτό είναι το πιο σημαντικό θεώρημα που συνδέει συναρτήσεις και συντελεστές Fourier.

Αναφορές

[1] L. Fejér, *Sur les fonctions bornèes et intègrables*, C.R.A.S. Paris **131** (1900), 984-987.

[2] F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions*, C.R.A.S. Paris **144** (1907), 615-619.

[3] E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne*, C.R.A.S. Paris **144** (1907), 1022-1024.

[4] J.-P. Kahane, *Commutative Harmonic Analysis*, A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century, Bolyai Society Math. Studies **14**, 159-192.

[5] J.-P. Kahane and P.-G. Lemarié-Rieusset, *Fourier series and wavelets*.