Η βέλτιστη σταθερά στην ανισότητα Hausdorff-Young

Ασπασία Κωτσογιάννη

Περίληψη

1 Ο μετασχηματισμός Fourier

Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε

(1.1) $$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Το ολοκλήρωμα Lebesgue στη σχέση (1.1) συγκλίνει για κάθε ξ και έτσι ορίζεται η συνάρτηση $\widehat{f}$ η οποία ονομάζεται *μετασχηματισμός Fourier* της f. Συχνά, χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f}.$$

Οι παρακάτω είναι μερικές από τις πολλές γνωστές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier:

(α) Ο τελεστής $\mathcal{F}$ είναι γραμμικός.

(β) Η συνάρτηση $\mathcal{F}(f)$ είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^n$ όπως φαίνεται με απλή εφαρμογή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης.

(γ) Ισχύει

(1.2) $$\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \|f\|_1.$$

1. Για κάθε $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ το ολοκλήρωμα

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy$$

ορίζεται για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, η οριζόμενη συνάρτηση είναι στοιχείο του $L^1(\mathbb{R}^n)$ και ονομάζεται *συνέλιξη* των f, g. Ισχύει ότι

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ όπως αποδεικνύεται με εφαρμογή του θεωρήματος Fubini.

Από την (1.2) φαίνεται ότι ο τελεστής $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι φραγμένος και

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\|f\|_1 \tag{1.3}$$

για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Επίσης, ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να οριστεί στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ και από το θεώρημα του Plancherel ισχύει $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Δηλαδή, ο τελεστής $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ είναι φραγμένος και

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2 \tag{1.4}$$

για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Η ανισότητα

$$\|\mathcal{F}(f)\|_q \leqslant \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n(\frac{2}{p}-1)}}\|f\|_p \tag{1.5}$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, όπου $1 < p < 2$ και q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, ονομάζεται *ανισότητα Hausdorff-Young.*

Στην πραγματικότητα οι Hausdorff-Young απέδειξαν την ανισότητα στο πλαίσιο των σειρών Fourier και η ανισότητα (1.5) αποδείχθηκε σαν πόρισμα από τον Titchmarsh. Η σταθερά που παρουσιάζεται στην ανισότητα δεν είναι η βέλτιστη όταν $1 < p < 2$. Ο Babenko προσδιόρισε τη σταθερά c_p στην ανισότητα

$$\|\mathcal{F}(f)\|_q \leqslant c_p\|f\|_p$$

στις περιπτώσεις όπου $q = 2, 4, 6, \ldots$, δηλαδή όταν ο q είναι άρτιος ακέραιος. Ο Beckner προσδιόρισε τη βέλτιστη σταθερά c_p για κάθε $p \in (1, 2)$.

Έστω $f(x) = c\exp(-Ax \cdot x + b \cdot x)$, όπου $c \neq 0$, A πραγματικός $n \times n$ συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας και $b = \mu + iv$ είναι μιγαδικό διάνυσμα (δηλαδή $\mu, v \in \mathbb{R}^n$). Κάθε τέτοια συνάρτηση ονομάζεται συνάρτηση Gauss. Γράφοντας $A = U^*DU$ όπου U είναι ορθογώνιος πίνακας και D είναι διαγώνιος πίνακας με θετικά διαγώνια στοιχεία, και κάνοντας πράξεις και απλές αλλαγές μεταβλητής καταλήγουμε στην

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{c}{\sqrt{2^n \det A}} \exp\left(-\frac{1}{4}A^{-1}(\xi + ib)\cdot(\xi + ib)\right).$$

Επίσης, κάνοντας πράξεις παίρνουμε

$$\|f\|_p = |c|\left(\sqrt{\frac{\pi}{p}}\right)^{\frac{n}{p}} \frac{1}{(\sqrt{\det A})^{\frac{1}{p}}} \exp\left(-\frac{1}{4}A^{-1}\mu\cdot\mu\right)$$

και

$$\|\widehat{f}\|_q = |c|\left(\sqrt{\frac{2\pi}{q}}\right)^{\frac{n}{q}} \frac{1}{(\sqrt{\det A})^{\frac{1}{p}}} \exp\left(-\frac{1}{4}A^{-1}\mu\cdot\mu\right).$$

Άρα,

$$\|\widehat{f}\|_q = \left[\left(\sqrt{\frac{2\pi}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sqrt{\frac{p}{2\pi}}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^n \|f\|_p. \tag{1.6}$$

Οι Babenko και Beckner απέδειξαν το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 1.1. *Για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ ισχύει*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_q \leqslant c_{p,n}\|f\|_p \tag{1.7}$$

όπου

$$c_{p,n} = \left[\left(\sqrt{\frac{2\pi}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sqrt{\frac{p}{2\pi}}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^n.$$

Η $c_{p,n}$ είναι προφανώς βέλτιστη αφού η ανισότητα (1.7) γίνεται ισότητα όταν η f είναι συνάρτηση Gauss, σύμφωνα με την (1.6). Ο Lieb απέδειξε ότι η (1.7) γίνεται ισότητα μόνο όταν η f είναι συνάρτηση Gauss. Σκοπός μας σε αυτή την εργασία είναι να παρουσιάσουμε την απόδειξη του Beckner για το Θεώρημα αυτό.

2 Οι συναρτήσεις Hermite και ο πυρήνας του Mehler

Ορισμός 2.1. Οι συναρτήσεις $H_k(x) = (-1)^k e^{x^2}\frac{d^k}{dx^k}e^{-x^2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ είναι προφανώς πολυώνυμα βαθμού k. Τα πολυώνυμα αυτά ονομάζονται πολυώνυμα Hermite.

Λήμμα 2.2. *Τα πολυώνυμα Hermite ικανοποιούν την*

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{H_n(x)}{n!} = e^{2tx-t^2}, \qquad t \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός 2.3. Οι συναρτήσεις $\psi(x) = \frac{1}{(2^k k!\sqrt{\pi})^{1/2}}H_k(x)e^{-x^2/2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ ονομάζονται συναρτήσεις Hermite και είναι στοιχεία της κλάσης $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ορισμός 2.4. Ορίζουμε τον πυρήνα του Mehler

$$K(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}}\exp\left(\frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2}\right)$$

για πραγματικούς x, y και μιγαδικό t με $|t| < 1$.

Θεώρημα 2.5. *Ο πυρήνας του Mehler ικανοποιεί την*

$$K(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \psi_n(x)\psi_n(y). \tag{2.1}$$

Λήμμα 2.6. *Οι συναρτήσεις Hermite $\psi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ είναι ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2(\mathbb{R})$.*

Θεώρημα 2.7. *Οι συναρτήσεις Hermite $\psi_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{R})$.*

3 Η εργασία του Beckner

Η εργασία του Beckner πάνω στην ανισότητα Hausdorff-Young έχει έντονη πιθανοθεωρητική χροιά. Ουσιαστικό ρόλο παίζει το μέτρο του Gauss στο $\mathbb{R}$,

$$d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx.$$

Χρειάζεται να εισάγουμε κάποιες παραλλαγές του πυρήνα του Mehler και των πολυωνύμων Hermite και δουλεύουμε στους χώρους $L^p(\mathbb{R}, \mu)$.

Ορισμός 3.1. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} T(x,y,t) &= \sqrt{\pi} K(x,y,t) e^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{1-t^2} x^2 - \frac{t^2}{1-t^2} y^2 + \frac{2t}{1-t^2} xy \right) \end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $t \in \mathbb{C}$ με $|t| < 1$.

Ορισμός 3.2. Ορίζουμε επίσης

$$\mathbf{H}_n(x) = \frac{1}{(2^n n!)^{\frac{1}{2}}} H_n(x) = \pi^{\frac{1}{4}} \psi_n(x) e^{\frac{1}{2}x^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}_0$.

Λήμμα 3.3. (α) $T(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \mathbf{H}_n(x) \mathbf{H}_n(y)$.

(β) *Τα πολυώνυμα του Ορισμού 3.2 αποτελούν ορθοκανονική βάση του* $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

(γ) *Για κάθε* $a > 0$ *οι συναρτήσεις* $p(x)e^{-ax^2}$, *όπου* $p(x)$ *είναι οποιοδήποτε πολυώνυμο, είναι πυκνές στον* $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$.

(δ) *Τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον* $L^p(\mathbb{R}, \mu)$, $1 < p < +\infty$.

Απόδειξη. (α) Βάσει της (2.1) και των Ορισμών 3.1 και 3.2 έχουμε

$$\begin{aligned} T(x,y,t) &= \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \psi_n(x) e^{\frac{1}{2}x^2} \psi_n(y) e^{\frac{1}{2}y^2} \\ &= \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} t^n H_n(x) H_n(y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \mathbf{H}_n(x) \mathbf{H}_n(y). \end{aligned}$$

(β) Αυτό αποτελεί άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.7:

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = m \\ 0, & \text{αν } n \neq m \end{cases}$$

Άρα το $\{H_n(x)\}$ αποτελεί ορθοκανονικό σύνολο. Έστω $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ με $\int_{\mathbb{R}} H_n(x) f(x) d\mu(x) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) e^{\frac{-x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Προφανώς $g \in L^2(\mathbb{R})$ και

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x) g(x) dx = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} \int_{\mathbb{R}} H_n(x) f(x) d\mu(x) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Άρα $g = 0$ και επομένως $f = 0$.

Άρα το $\{H_n\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

(γ) Έστω $f \in L^q(\mathbb{R})$, $q = \frac{p}{p-1}$, με $\int_{\mathbb{R}} f(x) p(x) e^{-ax^2} dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο $p(x)$. Θεωρούμε $\xi \in \mathbb{R}$ και γράφουμε

$$e^{-ix\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi)^n x^n}{n!}.$$

Επειδή τα μερικά αθροίσματα της σειράς είναι ομοιόμορφα φραγμένα από τη συνάρτηση $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi x|^n}{n!} = e^{|\xi x|}$ και επειδή $f(x) e^{|\xi x|} e^{-ax^2} \in L^1(\mathbb{R})$, συνεπάγεται από το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ax^2} e^{-ix\xi} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x) x^n e^{-ax^2} dx = 0.$$

Άρα, $\mathcal{F}(f(x) e^{-ax^2}) = 0$ και επομένως $f = 0$.

(δ) Αυτό είναι συνέπεια του (γ). Έστω $f \in L^q(\mathbb{R}, \mu)$, $q = \frac{p}{p-1}$, με $\int_{\mathbb{R}} f(x) p(x) d\mu(x) = 0$ για κάθε πολυώνυμο $p(x)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) e^{-\frac{1}{q} x^2}$ και έχουμε:

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^q dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q d\mu(x) < +\infty$$

και

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) p(x) e^{-\frac{1}{p} x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) p(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) p(x) d\mu(x) = 0$$

για κάθε πολυώνυμο $p(x)$. Από το (γ) συνεπάγεται ότι $g = 0$ και επομένως $f = 0$. $\square$

Ορισμός 3.4. Ορίζουμε

$$T_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} T(x, y, t) f(y) d\mu(y).$$

Λήμμα 3.5. *Ο T_t είναι φραγμένος γραμμικός μετασχηματισμός*

$$T_t : L^2(\mathbb{R}, \mu) \to L^2(\mathbb{R}, \mu).$$

Λήμμα 3.6. *Έστω $1 < p < 2$ και $q = \frac{p}{p-1}$. Θέτουμε*

$$\mu = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{q}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sqrt{\frac{p}{2\pi}} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{και} \quad t = i\sqrt{p-1}.$$

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) $\|Ff\|_q \leqslant m\|f\|_p$ *για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$.*

(ii) $\|T_t g\|_{L^q(\mathbb{R},\mu)} \leqslant \|g\|_{L^p(\mathbb{R},\mu)}$ *για κάθε* $g \in L^p(\mathbb{R},\mu)$.

Απόδειξη. Με απλό υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$T(x,y,i\sqrt{p-1}) = \frac{1}{\sqrt{p}} \exp\left\{\frac{1}{q}x^2 + \frac{1}{q}y^2 + i\frac{2}{\sqrt{pq}}xy\right\}. \tag{3.1}$$

(α) Έστω ότι ισχύει η (ii).

Θεωρούμε την $f(x) = p(x)e^{-\frac{1}{p}x^2}$, όπου $p(x)$ τυχόν πολυώνυμο, και τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x)e^{\frac{1}{p}x^2} = p(x) \in L^p(\mathbb{R},\mu).$$

Τότε,

$$\mathcal{F}f\left(-\frac{2}{\sqrt{pq}}\xi\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\frac{2}{\sqrt{pq}}x\xi}dx.$$

Άρα το ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο, αφού $f \in L^1(\mathbb{R})$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f\left(-\frac{2}{\sqrt{pq}}\xi\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{i\frac{2}{\sqrt{pq}}x\xi}e^{-\frac{1}{p}x^2}e^{x^2}d\mu(x)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{\frac{1}{q}x^2}e^{i\frac{2}{\sqrt{pq}}x\xi}d\mu(x).\end{aligned}$$

Βάσει της (3.1),

$$\mathcal{F}f\left(-\frac{2}{\sqrt{pq}}\xi\right) = \sqrt{\frac{p}{2}}\int_{\mathbb{R}} T(x,\xi,i\sqrt{p-1})g(x)d\mu(x) = \sqrt{\frac{p}{2}}T_t g(\xi).$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}f\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}f(\xi)|^q d\xi\\ &= \frac{2}{\sqrt{pq}}\int_{\mathbb{R}}\left|\sqrt{\frac{p}{2}}T_t g(\xi)\right|^q e^{-\xi^2}d\xi\\ &= 2\sqrt{\frac{\pi}{pq}}\left(\sqrt{\frac{p}{2}}\right)^q \|T_t\|^q_{L^q(\mathbb{R},\mu)}\\ &\leqslant 2\sqrt{\frac{\pi}{pq}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p e^{x^2}d\mu(x)\right)^{\frac{q}{p}}\\ &= \mu^q\|f\|_p^p.\end{aligned}$$

Άρα, η (i) ισχύει για ένα πυκνό υποσύνολο του $L^p(\mathbb{R})$ (σύμφωνα με το Λήμμα **;;** (γ)) και επομένως ισχύει για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(β) Η απόδειξη του αντίστροφου είναι παρόμοια. □

Άρα η εργασία του Beckner συνίσταται από εδώ και πέρα στο να αποδείξει την ανισότητα (**;;**) για συγκεκριμένη τιμή του t: $t = i\sqrt{p-1}$. Βάσει του Λήμματος **;;** (δ) αρκεί να αποδειχθεί η (**;;**) για $g(x) = p(x)$ όταν $p(x)$ είναι τυχόν πολυώνυμο.

Θεωρούμε μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli, δηλαδή

$$\nu = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}, \tag{3.2}$$

όπου δ_1, δ_{-1} είναι δύο μάζες Dirac στα σημεία 1 και -1 αντίστοιχα. Ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας της $\nu^{(n)}$ βάσει της

$$\nu^{(n)}(E) = \nu(\sqrt{2n}E) \tag{3.3}$$

για κάθε Borel σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$. Τέλος θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας

$$\nu_n = \nu^{(n)} * \nu^{(n)} * \cdots * \nu^{(n)},$$

τη συνέλιξη του $\nu^{(n)}$ με τον εαυτό του n φορές. Αυτό ισοδυναμεί με την

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\nu_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1 + \cdots + x_n) d\nu^{(n)}(x_1) \cdots d\nu^{(n)}(x_n) \tag{3.4}$$

για κάθε $f \in C(\mathbb{R})$. Λόγω των (3.2) και (3.3),

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\nu_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{2n}}\right) d\nu(x_1) \cdots d\nu(x_n) = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon} f\left(\frac{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n}{\sqrt{2n}}\right), \tag{3.5}$$

όπου το $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ διατρέχει όλες τις n-άδες προσήμων, δηλαδή το ε διατρέχει το σύνολο $\{-1, +1\}^n$ που έχει πληθάριθμο 2^n.

Χρήσιμη θα είναι η παρακάτω ειδική περίπτωση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος.

Λήμμα 3.7. *Έστω f οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, η οποια αυξάνει το πολύ πολυωνυμικά στο άπειρο. Δηλαδή για κάποιο $C > 0$ και $k \in \mathbb{N}_0$*

$$|f(x)| \leqslant C(1 + x^2)^k, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu(x) \to \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x), \qquad n \to \infty.$$

Απόδειξη. Βήμα 1: Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Τότε από την (1.2) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right) d\nu_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} d\nu_n(x) \right) d\xi.$$

Οπότε βάσει της (3.5) έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon} e^{i\frac{\xi\varepsilon_1}{\sqrt{2n}}} \cdots e^{i\frac{\xi\varepsilon_n}{\sqrt{2n}}}\, d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \left(e^{-i\frac{\xi}{\sqrt{2n}}} + e^{i\frac{\xi}{\sqrt{2n}}} \right)^n d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \left(\cos \frac{\xi}{\sqrt{2n}} \right)^n d\xi.
\end{aligned}$$

Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$

$$\left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2n}}\right)^n = \left(1 - \frac{\xi^2}{4n} + O\left(\frac{\xi^4}{n^2}\right)\right)^n \to e^{-\frac{\xi^2}{4}}, \qquad n \to \infty,$$

και επειδή $\left|\widehat{f}(\xi)\left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2n}}\right)^n\right| \leqslant |\widehat{f}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R})$, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)d\nu_n(x) &\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\iint f(x)e^{-ix\xi}dx\, e^{-\frac{\xi^2}{4}}d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}e^{-ix\xi}d\xi\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

Βήμα 2: Αποδεικνύουμε ότι οι ροπές των ν_n είναι ομοιόμορφα φραγμένες.

Για τις ροπές άρτιας τάξης έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |x|^{2k}d\nu_n(x) &= \int_{\mathbb{R}} x^{2k}d\nu_n(x) = \int_{\mathbb{R}} (-1)^k\frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}}(e^{-ix\xi})_{\xi=0}d\nu_n(x) \\
&= (-1)^k\frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}d\nu_n(x)\right)_{\xi=0} = \frac{d^{2k}}{d\xi^{2k}}\left(\cos\frac{\xi}{\sqrt{2n}}\right)^n_{\xi=0}.
\end{aligned}$$

Σ' αυτό το σημείο εφαρμόζουμε τον τύπο του Cauchy για τις παραγώγους της αναλυτικής συνάρτησης $\left(\cos\frac{z}{\sqrt{2n}}\right)^n$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |x|^{2k}d\nu_n(x) &= (-1)^k\frac{(2k)!}{2pi}\int_{|z|=1}\left(\cos\frac{z}{\sqrt{2n}}\right)^n\frac{dz}{z^{2k+1}} \leqslant (2k)!\max_{|z|=1}\left|\cos\frac{z}{\sqrt{2n}}\right|^n \\
&= (2k)!\max_{|z|=1}\exp\left\{n\log\left|\cos\frac{z}{\sqrt{2n}}\right|\right\} \\
&= (2k)!\max_{|z|=1}\exp\left\{n\log\left|1 - \frac{z^2}{4n} + O\left(\frac{z^4}{n^2}\right)\right|\right\} = C_k < +\infty,
\end{aligned}$$

όπου το C_k δεν εξαρτάται από το n.

Για τις ροπές περιττής τάξης έχουμε :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |x|^{2k-1}d\nu_n(x) &= \int_{|x|<1}|x|^{2k-1}d\nu_n(x) + \int_{|x|\geqslant 1}|x|^{2k-1}d\nu_n(x) \\
&\leqslant \int_{|x|<1}d\nu_n(x) + \int_{|x|\geqslant 1}|x|^{2k}d\nu_n(x) \leqslant 1 + C_k.
\end{aligned}$$

Βήμα 3: Έστω $f \in C(\mathbb{R})$ με $|f(x)| \leqslant C(1+x^2)^k$ για κάποια $C > 0$ και $k \in \mathbb{N}_0$.

Η συνάρτηση $\frac{f(x)}{(1+x^2)^{k+1}}$ είναι στον $C_0(\mathbb{R})$ και επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ώστε

$$\left|g(x) - \frac{f(x)}{(1+x^2)^{k+1}}\right| \leqslant \varepsilon$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Τώρα η συνάρτηση $h(x) = (1+x^2)^{k+1} g(x)$ είναι στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ και

$$|h(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon (1+x^2)^{k+1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) \right| \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} |f(x) - h(x)| \, d\nu_n(x) + \left| \int_{\mathbb{R}} h(x) d\nu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x) d\mu(x) \right| + \int_{\mathbb{R}} |f(x) - h(x)| \, d\mu(x) \\
&\quad \varepsilon \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^{k+1} d\nu_n(x) + \left| \int_{\mathbb{R}} h(x) d\nu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} h(x) d\mu(x) \right| + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} (1+x^2)^{k+1} \, d\mu(x)
\end{aligned}$$

από το Βήμα 2 (με διαφορετική σταθερά C_k). Άρα,

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_n(x) - \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) \right| \leqslant 2\varepsilon C_k$$

από το Βήμα 1, και επομένως

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_n(x) \to \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x).$$

$\square$

Ορισμός 3.8. Ορίζουμε το χώρο

$$E_n = \left\{ \left(\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2n}}, \ldots, \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{2n}} \right) : \varepsilon_j = \pm 1, \ 1 \leqslant j \leqslant n \right\}$$

και το μέτρο πιθανότητας $\mu_n = \nu^{(n)} \times \nu^{(n)}$, δηλαδή

$$d\mu_n(x) = d\nu(\sqrt{2n} x_1) \cdots d\nu(\sqrt{2n} x_n), \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

το οποίο έχει φορέα ακριβώς το σύνολο E_n.

Άρα, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu_n(x) = \int_{E_n} f(x_1 + \cdots + x_n) d\mu_n(x) \tag{3.6}$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση f. Επειδή ο E_n είναι διακριτός χώρος και το μέτρο ν_n είναι διακριτό, η υπόθεση της συνέχειας για την f δε χρειάζεται.

Το μέτρο μ_n είναι διακριτό μέτρο και θέτει μάζα $1/2^n$ σε καθένα από τα 2^n σημεία του E_n. Όλοι οι χώροι $L^p(E_n, \mu_n)$ ταυτίζονται και τα στοιχεία τους είναι όλες οι συναρτήσεις $g : E_n \to \mathbb{C}$. Επειδή η συνάρτηση $f(x_1 + \cdots + x_n)$ είναι συμμετρική, δηλαδή αναλλοίωτη ως προς όλες τις αναδιατάξεις των $x_1, \ldots, x_n$, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.9. Συμβολίζουμε με X_n τον χώρο

$$X_n := \{ h : E_n \to \mathbb{C} : \text{ η } h \text{ είναι συμμετρική} \}.$$

Επομένως, $Q_n \subseteq L^p(E_n, \mu_n)$ για κάθε p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Ο σκοπός τώρα είναι να ορισθεί κατάλληλος τελεστής στο χώρο Q_n, «ανάλογος» του τελεστή $T_t : L^p(\mathbb{R},\mu) \to L^q(\mathbb{R},\mu)$, και να υπολογιστεί η νόρμα του ώστε, περνώντας στο όριο καθώς $n \to \infty$, με βάση το Λήμμα 3.7 να υπολογιστεί η νόρμα του T_t. Η ιδέα είναι να περιγραφεί μια ορθοκανονική βάση στο χώρο $Q_n \subseteq L^2(E_n,\mu_n)$, η οποία θα παίζει τον ίδιο ρόλο που παίζει η $\{H_n\}$ στο χώρο $L^2(\mathbb{R},\mu)$.

Ορισμός 3.10. Για κάθε n,k με $0 \leqslant k \leqslant n$, ορίζουμε

$$\varphi_{n,k}(x) = (2n)^{\frac{k}{2}} \frac{1}{\sqrt{\binom{n}{k}}} \sigma_k(x_1,\dots,x_n), \qquad x=(x_1,\dots,x_n) \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{1}{\sqrt{2n}}\right\}^n. \tag{3.7}$$

Οι συναρτήσεις $\varphi_{n,k}(x)$, $0 \leqslant k \leqslant n$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $Q_n \subseteq L^2(E_n,\mu_n)$.

Κάθε πολυώνυμο $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, βαθμού μικρότερου ή ίσου από n γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k H_k(x).$$

Με $\mathbb{C}_n[x]$ συμβολίζουμε το χώρο όλων των πολυωνύμων μεταβλητής $x \in \mathbb{R}$ βαθμού το πολύ n με συντελεστές στο $\mathbb{C}$.

Ορισμός 3.11. Για κάθε n ορίζουμε τον τελεστή

$$S_n : \mathbb{C}_n[x] \to X_n$$

ο οποίος δίνεται από τον τύπο

$$S_n\left(\sum_{k=0}^{n} x_k H_k\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_{n,k}. \tag{3.8}$$

Ορισμός 3.12. Για κάθε n ορίζουμε τον τελεστή

$$K_{n,t} : X_n \to X_n$$

με τύπο

$$K_{n,t}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \varphi_{n,k}. \tag{3.9}$$

Από το Λήμμα 3.5 και τις σχέσεις (3.12), (3.13) είναι φανερό ότι το διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό. Πράγματι για κάθε $g = \sum_{k=0}^{n} c_k H_k$ ισχύουν οι

$$(S_n T_t)(g) = S_n\left(\sum_{k=0}^{n} c_k t^k H_k\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \varphi_{n,k}$$

και

$$(K_{n,t} S_n)(g) = K_{n,t}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \varphi_{n,k}.$$

Επίσης είναι φανερό ότι ο τελεστής S_n είναι ισομετρία ανάμεσα στους χώρους με εσωτερικό γινόμενο $\mathbb{C}_n[x] \subseteq L^2(\mathbb{R}, \mu)$ και $Q_n \subseteq L^2(E_n, \mu_n)$, αφού απεικονίζει την ορθοκανονική βάση $\{H_k : 0 \leqslant k \leqslant n\}$ του πρώτου στην ορθοκανονική βάση $\{\varphi_{n,k} : 0 \leqslant k \leqslant n\}$ του δεύτερου. Με αυτήν την έννοια ο $K_{n,t}$ είναι ένα διακριτό «ανάλογο» του T_t αν αυτός περιοριστεί στον $\mathbb{C}_n[x] \subseteq L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

Θα αποδείξουμε τρία Θεωρήματα.

Θεώρημα 3.13. *Αν $t = i\sqrt{p-1}$, $1 < p < 2$, $q = \frac{p}{p-1}$, τότε για κάθε n ισχύει*

$$\left(\int_{E_n} |(K_{n,t}h)(x)|^q d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\int_{E_n} |h(x)|^p d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad h \in X_n. \tag{3.10}$$

Θεώρημα 3.14. *Για κάθε πολυώνυμο $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι:*

(α)

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p d\nu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{\mathbb{R}} |S_n g|^p \, d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{3.11}$$

(β)

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |(T_t g)|^p d\nu_n(x) \right)^{\frac{1}{q}} - \left(\int_{\mathbb{R}} |(K_{n,t} S_n g)(x)|^q \, d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{q}} \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{3.12}$$

Το επόμενο θεώρημα είναι ο τελικός μας στόχος.

Θεώρημα 3.15. *Έστω $1 < p < 2$ και $q = \frac{p}{p-1}$. Θέτουμε*

$$\mu = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sqrt{\frac{p}{2\pi}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Τότε

$$\|\mathcal{F} f\|_q \leqslant \mu \|f\|_p, \qquad f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι τα Θεωρήματα 3.13 και 3.14 έχουν αποδειχθεί.

Θεωρούμε τυχόν πολυώνυμο $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, και έστω k ο βαθμός του $g(x)$. Έστω $n \geqslant k$ και $n \to +\infty$.

Αν $g(x) = \sum_{l=0}^{k} c_l H_l(x)$, τότε από το Λήμμα 3.7 και από το Θεώρημα 3.14 (α) παίρνουμε

$$\left(\int_{E_n} |(S_n g)(x)|^p d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} \to \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Επίσης, και από το Λήμμα 3.7 και το Θεώρημα 3.14 (β) παίρνουμε

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |(K_{n,t} S_n g)(x)|^q d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{q}} \to \left(\int_{\mathbb{R}} |(T_t g)(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις και από το Θεώρημα 3.13 με $h = S_n g$, παίρνουμε

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |(T_t g)(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

δηλαδή

$$\|T_t g\|_{L^q(\mathbb{R},\mu)} \leqslant \|g\|_{L^p(\mathbb{R},\mu)}. \tag{3.13}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα **;;** (δ) η (3.13) ισχύει για κάθε $g \in L^p(\mathbb{R},\mu)$, οπότε το Λήμμα 3.6 συμπληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 3.16. *Για κάθε n, k με $2 \leqslant k \leqslant n$ ισχύει*

$$\varphi_{n,k} = \sqrt{\frac{n}{k(n-k+1)}}\varphi_{n,1}\varphi_{n,k} - \sqrt{\frac{(k-1)(n-k+2)}{k(n-k+1)}}\varphi_{n,k-2} \tag{3.14}$$

για τις τιμές των μεταβλητών $x_i = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Λήμμα 3.17. *Για κάθε k, n με $1 \leqslant k \leqslant n$ και για όλες τις τιμές των μεταβλητών $x_i = \pm\frac{1}{\sqrt{2n}}$ ισχύει ότι*

$$\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\varphi_{n,k}(x) = H_k(x_1+\cdots+x_n) + \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{[k/2]} a_{k,l}^{(n)} H_{k-2l}(x_1+\cdots+x_n). \tag{3.15}$$

Οι συντελεστές $a_{k,l}^{(n)}$ είναι, για κάθε k, φραγμένες συναρτήσεις του n.

Απόδειξη. Από τις $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = \sqrt{2}x$, $H_2(x) = \sqrt{2}x^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ και τις

$$\begin{aligned}
\varphi_{n,0}(x) &= \sigma_0(x_1,\dots,x_n) = 1\\
\varphi_{n,1}(x) &= \sqrt{2}\sigma_1(x_1,\dots,x_n) = \sqrt{2}(x_1+\cdots+x_n)\\
\varphi_{n,2}(x) &= 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_2(x_1,\dots,x_n) = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}(x_1x_2,\dots,x_{n-1}x_n),
\end{aligned}$$

βλέπουμε εύκολα ότι

$$\begin{aligned}
\varphi_{n,0}(x_1,\dots,x_n) &= H_0(x_1+\cdots+x_n)\\
\varphi_{n,1}(x_1,\dots,x_n) &= H_1(x_1+\cdots+x_n)\\
\sqrt{1-\frac{1}{n}}\varphi_{n,2}(x_1,\dots,x_n) &= H_2(x_1+\cdots+x_n).
\end{aligned}$$

Επομένως η (3.15) αληθεύει για $k = 1, 2$.

Για απλούστευση θέτουμε

$$\begin{aligned}
q_{n,k}(x_1,\dots,x_n) &= \sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}\varphi_{n,k}(x_1,\dots,x_n)\\
&= \sqrt{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}\varphi_{n,k}(x_1,\dots,x_n).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Οπότε η (3.15) ισοδυναμεί με

$$q_{n,k}(x_1,\dots,x_n) = H_k(x_1+\cdots+x_n) + \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{[k/2]} a_{k,l}^{(n)} H_{k-2l}(x_1+\cdots+x_n). \tag{3.17}$$

Ο αναδρομικός τύπος (3.17) με λίγες πράξεις γίνεται

$$q_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{k}} q_{n,1} q_{n,k-1} - \sqrt{\frac{k-1}{k}} \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) q_{n,k-2}, \qquad 2 \leqslant k \leqslant n. \tag{3.18}$$

Επίσης έχουμε και τον αναδρομικό τύπο

$$H_k = \frac{1}{\sqrt{k}} H_1 H_{k-1} - \sqrt{\frac{k-1}{k}} H_{k-2}, \qquad k \geqslant 2 \tag{3.19}$$

ο οποίος προέρχεται από τον (;;) και τις (;;).

Η (3.17) θα αποδειχθεί επαγωγικά με βάση τις (3.18), (3.19) γνωρίζοντας ότι ισχύει για $k = 1, 2$. Έστω λοιπόν ότι η (3.17) ισχύει για $k, k-1$ με $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Τότε, γράφοντας για συντομία $x = (x_1, \dots, x_n)$ και $\Sigma x = x_1 + \cdots + x_n$, έχουμε

$$\begin{aligned}
q_{n,k+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{k+1}} q_{n,1}(x) q_{n,k}(x) - \sqrt{\frac{k}{k+1}} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) q_{n,k-1}(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{k+1}} H_1(\Sigma x) \left(H_k(\Sigma x) + \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{[k/2]} a_{k,l}^{(n)} H_{k-1}(\Sigma x) \right) \\
&- \sqrt{\frac{k}{k+1}} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(H_{k-1}(\Sigma x) + \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{[k/2]} a_{k-1,l}^{(n)} H_{k-1-2l}(\Sigma x) \right) \\
&= H_{k+1}(\Sigma x) + \frac{1}{n} \Big((k-1) \sqrt{\frac{k}{k+1}} H_{k-1}(\Sigma x) + \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{a_{k,l}^{(n)}}{\sqrt{k+1}} H_1(\Sigma x) H_{k-2l}(\Sigma x) \\
&- \sum_{l=1}^{[k/2]} \sqrt{\frac{k}{k+1}} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_{k-1,l}^{(n)} H_{k-1-2l}(\Sigma x) \Big).
\end{aligned}$$

Σ' αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $H_{-1}(x) = 0$, τότε ο αναδρομικός τύπος (3.19) ισχύει και για $k = 1$. Επομένως αντικαθιστώντας το $H_1(\Sigma x) H_{k-2l}(\Sigma x)$ με

$$\sqrt{k-2l+1} H_{k-2l+1}(\Sigma x) + \sqrt{k-2l} H_{k-2l-1}(x)$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}
q_{n,k+1}(x) &= H_{k+1}(\Sigma x) + \frac{1}{n} \Big((k-1) \sqrt{\frac{k}{k+1}} H_{k-1}(\Sigma x) + \sum_{l=1}^{[k/2]} \sqrt{\frac{k-2l+1}{k+1}} a_{k,l}^{(n)} H_{k-2l+1}(\Sigma x) \\
&+ \sum_{l=1}^{[k/2]} \sqrt{\frac{k-2l}{k+1}} a_{k,l}^{(n)} H_{k-2l-1}(\Sigma x) - \sum_{l=1}^{[(k-1)/2]} \sqrt{\frac{k}{k+1}} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_{k,l}^{(n)} H_{k-2l-1}(\Sigma x) \Big) \\
&= H_{k+1}(\Sigma x) + \frac{1}{n} \Big((k-1) \sqrt{\frac{k}{k+1}} H_{k-1}(\Sigma x) + \sum_{l=1}^{[k/2]} \sqrt{\frac{k-2l+1}{k+1}} a_{k,l}^{(n)} H_{k+1}(\Sigma x) \\
&+ \sum_{l=1}^{[(k+2)/2]} \sqrt{\frac{k-2l+2}{k+1}} a_{k,l}^{(n)} H_{k-2l+1}(\Sigma x) - \sum_{l=1}^{[(k+1)/2]} \sqrt{\frac{k}{k+1}} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_{k-1,l-1}^{(n)} H_{k-2l+1}(\Sigma x) \Big).
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος όρος $l = \left[\frac{k+2}{2}\right]$ στο δεύτερο άθροισμα είναι μηδέν, καθώς και ότι το πρώτο άθροισμα μπορεί να επεκταθεί σε $l = \left[\frac{k+1}{2}\right]$. Άρα

$$\begin{aligned} q_{n,k+1}(x) &= H_{k+1}(\Sigma x) + \frac{1}{n}\Big((k-1)\sqrt{\frac{k}{k+1}}H_{k+1-2}(\Sigma x) + \sqrt{\frac{k-1}{k-2}}a_{k,1}^{(n)}H_{k+1-2}(\Sigma x) \\ &\quad + \sum_{l=2}^{[(k+1)/2]}\Big[\sqrt{\frac{k-2l+1}{k+1}}a_{k,l}^{(n)} + \sqrt{\frac{k-2l+2}{k+1}}a_{k,l-1}^{(n)} - \sqrt{\frac{k}{k+1}}\left(1-\frac{k}{n-1}\right)a_{k-1,l-1}^{(n)}\Big]H_{k+1}(\Sigma x)\Big), \end{aligned}$$

και επομένως αν θέσουμε

(3.20)

$$\begin{aligned} a_{k+1,1}^{(n)} &= (k-1)\sqrt{\frac{k}{k+1}} + \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}a_{k,1}^{(n)} \\ a_{k+1,l}^{(n)} &= \sqrt{\frac{k-2l+1}{k+1}}a_{k,l}^{(n)} + \sqrt{\frac{k-2l+2}{k+1}}a_{k,l-1}^{(n)} - \sqrt{\frac{k}{k+1}}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_{k-1,l-1}^{(n)}, \quad 2 \leqslant l \leqslant \left[\frac{k+1}{2}\right] \end{aligned}$$

βλέπουμε αμέσως ότι ισχύει η (3.17) για $k+1$.

Επειδή $a_{2,1}^{(n)} = 0$, φαίνεται αμέσως (με επαγωγή) από τις σχέσεις (3.20) ότι για σταθερό k οι συντελεστές $a_{k,l}^{(n)}$ είναι φραγμένες συναρτήσεις του n. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.14. Έστω πολυώνυμο $g(x) = \sum_{l=0}^{k} c_l H_l(x)$.

(α) Από τη σχέση (3.6) έχουμε για $n \geqslant k$:

$$\begin{aligned} &\left|\left(\int_{E_n}|S_n g(x)|^p d\mu_n(x)\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^p d\nu_n(x)\right)^{\frac{1}{p}}\right| \\ &\qquad = \left|\left(\int_{E_n}|S_n g(x)|^p d\mu_n(x)\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{\mathbb{R}}|g(x_1+\cdots+x_n)|^p d\mu_n(x)\right)^{\frac{1}{p}}\right| \\ &\qquad \leqslant \left(\int_{E_n}|S_n g(x) - g(x_1+\cdots+x_n)|^p d\mu_n(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad \leqslant \left(\int_{E_n}\left|\sum_{l=0}^{k}c_l[\varphi_{n,l}(x_1,\ldots,x_n) - H_l(x_1+\cdots+x_n)]\right|^p d\mu_n(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad \leqslant \sum_{l=0}^{n}|c_l|\left(\int_{E_n}|\varphi_{n,l}(x_1,\ldots,x_n) - H_l(x_1+\cdots+x_n)|^p\, d\mu_n(x)\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 3.17 και επειδή ο συντελεστής του $\varphi_{n,k}$ στη σχέση (3.15) συγκλίνει στο 1 καθώς $n \to +\infty$, παίρνουμε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται μόνο από τα $|c_0|, \ldots, |c_k|$ και από το k, αλλά όχι από το n, ώστε

$$\begin{aligned}
&\left| \left(\int_{E_n} |S_n g(x)|^p d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p d\nu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\
&\qquad \leqslant \frac{c}{n} \sum_{l=0}^{k} \left(\int_{E_n} |H_l(x_1 + \cdots + x_n)|^p d\mu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \frac{c}{n} \sum_{l=0}^{k} \left(\int_{\mathbb{R}} |H_l(x)|^p d\nu_n(x) \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

από την (3.6).

Όπως είδαμε στο Βήμα 2 της απόδειξης του Λήμματος 3.7, οι ροπές των ν_n είναι ομοιόμορφα φραγμένες (ως προς n). Άρα η τελευταία ποσότητα τείνει στο 0 όταν $n \to \infty$.

(β) Επειδή $K_{n,t} S_n g = S_n T_t g$, η (3.12) είναι πόρισμα της (3.11) αν αυτή εφαρμοσθεί στο πολυώνυμο $T_t g$. $\square$

Απομένει να αποδειχθεί το Θεώρημα 3.13 το οποίο είναι διακριτό ανάλογο του Θεωρήματος 3.15 στο διακριτό χώρο.

Θεωρούμε το χώρο μέτρου $E = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2n}}, \frac{1}{\sqrt{2n}} \right\}$,

$$d\sigma(x) = \frac{1}{2} d\delta_{-1}(\sqrt{2n}x) + \frac{1}{2} d\delta_1(\sqrt{2n}x) = d\nu(\sqrt{2n}x),$$

και γνωρίζουμε ότι κάθε συνάρτηση $f : E \to \mathbb{C}$ γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν $f(x) = ax + b$ για κατάλληλα $a, b \in \mathbb{C}$.

Θεωρούμε τον τελεστή $T_{x,t} : L^p(E, \sigma) \to L^q(E, \sigma)$ με τύπο

$$T_{x,t} : a + bx \mapsto a + btx.$$

Επίσης ορίζουμε τον τελεστή

$$\overline{K_{n,t}} = T_{x_1,t} \otimes \cdots \otimes T_{x_n,t} : L^p(E \times \cdots \times E, \sigma \times \cdots \times \sigma) \longrightarrow L^q(E \times \cdots \times E, \sigma \times \cdots \times \sigma),$$

δηλαδή

$$\overline{K_{n,t}} : L^p(E_n, \mu_n) \to L^q(E_n, \mu_n)$$

σύμφωνα με τον Ορισμό **;;**.

Λήμμα 3.18. *Ο περιορισμός του $\overline{K_{n,t}}$ στον $Q_n \subseteq L^p(E_n, \mu_n)$ ταυτίζεται με τον τελεστή $K_{n,t}$.*

Απόδειξη. Έστω $0 \leqslant k \leqslant n$. Επειδή ο $\overline{K_{n,t}}$ απλώς πολλαπλασιάζει κάθε μία από τις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ με τον παράγοντα t συνεπάγεται ότι

$$\overline{K_{n,t}}(\sigma_k) = t^k \sigma_k.$$

Άρα, για κάθε συμμετρική $h \in X_n$, $h(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$, έχουμε

$$\overline{K_{n,t}}(h) = \sum_{k=0}^{n} c_k \overline{K_{n,t}}(\sigma_k) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \sigma_k = K_{n,t} h$$

Σύμφωνα με την (3.13). $\square$

Θεώρημα 3.19. *Έστω $1 < p < 2$, $q = \frac{p}{p-1}$ και $t = i\sqrt{p-1}$. Τότε*

$$\left(\int_E |T_{x,t}f(x)|^q d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.21}$$

για κάθε $f \in L^p(E, \sigma)$.

Απόδειξη. Με $f(x) = a + bx$ η (**;;**) γίνεται

$$\left(\frac{1}{2}\left|a + tb\frac{1}{\sqrt{2n}}\right|^q + \frac{1}{2}\left|a - tb\frac{1}{\sqrt{2n}}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\frac{1}{2}\left|a + b\frac{1}{\sqrt{2n}}\right|^p + \frac{1}{2}\left|a - b\frac{1}{\sqrt{2n}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Αν $a = 0$ τότε η ανισότητα γίνεται $|t| \leqslant 1$ που είναι σωστό. Έστω, λοιπόν, $a \neq 0$. Θέτοντας $z = \frac{b}{a\sqrt{2n}}$ παίρνουμε την ισοδύναμη ανισότητα:

$$\left(\frac{|1+tz|^q + |1-tz|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\frac{|1+z|^p + |1-z|^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{3.22}$$

Θέτουμε $z = \xi - i\frac{\eta}{\sqrt{p-1}}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, οπότε

$$\begin{aligned} |1+tz|^2 &= (1+\eta)^2 + \xi^2(p-1), \qquad & |1-tz|^2 &= (1-\eta)^2 + \xi^2(p-1),\\ |1+z|^2 &= (1+\xi)^2 + \eta^2(q-1), \qquad & |1-z|^2 &= (1-\xi)^2 + \eta^2(q-1). \end{aligned}$$

Άρα, η (3.22) ισοδυναμεί με την

$$\begin{aligned} &\left(\frac{[(1+\eta)^2 + (p-1)\xi^2]^{\frac{q}{2}} + [(1-\eta)^2 + (p-1)\xi^2]^{\frac{q}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\qquad \leqslant \left(\frac{[(1+\xi)^2 + (q-1)\eta^2]^{\frac{p}{2}} + [(1-\xi)^2 + (q-1)\eta^2]^{\frac{p}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Από την (3.2) έχουμε

$$\begin{aligned} &\left(\frac{[(1+\eta)^2 + (p-1)\xi^2]^{\frac{q}{2}} + [(1-\eta)^2 + (p-1)\xi^2]^{\frac{q}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\qquad = \|(1+\eta x)^2 + (p-1)\xi^2\|_{L^{q/2}(\nu)} \\ &\qquad \leqslant \|(1+\eta x)^2\|_{L^{q/2}(\nu)} + \|(p-1)\xi^2\|_{L^{q/2}(\nu)} \\ &\qquad = \left(\frac{|1+\eta|^q + |1-\eta|^q}{2}\right)^{\frac{2}{q}} + (p-1)\xi^2, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι $\frac{q}{2} > 1$. Επίσης,

$$\left(\frac{[(1+\xi)^2 + (q-1)\eta^2]^{\frac{p}{2}} + [(1-\xi)^2 + (q-1)\eta^2]^{\frac{p}{2}}}{2}\right)^{\frac{2}{p}} = \|(1+\xi x)^2 + (q-1)\eta^2\|_{L^{p/2}(\nu)}.$$

Επειδή $p/2 < 1$ και $(1+\xi x)^2 \geqslant 0$, $(q-1)\eta^2 \geqslant 0$. Άρα η (3.23) είναι ασθενέστερη από την ανισότητα

$$\left(\frac{|1+\eta|^q+|1-\eta|^q}{2}\right)^{2/q}+(p-1)\xi^2 \leqslant \left(\frac{|1+\xi|^p+|1-\xi|^p}{2}\right)^(2/p)+(q-1)\eta^2. \tag{3.24}$$

Αν αποδείξουμε τις ανισότητες

$$\left(\frac{|1+\eta|^q+|1-\eta|^q}{2}\right)^{2/q} \leqslant 1+(q-1)\eta^2 \tag{3.25}$$

και

$$\left(\frac{|1+\xi|^q+|1-\xi|^q}{2}\right)^{2/q} \leqslant 1+(q-1)\eta^2 \tag{3.26}$$

είναι προφανές ότι συνεπάγεται η (3.24). Επίσης είναι φανερό (με $\xi = 0$ ή $\eta = 0$) ότι οι (3.25), (3.26) προκύπτουν από την (3.24).

Άρα αρκεί να αποδείξουμε τις (3.25), (3.26).

Αρχίζουμε με την απόδειξη της (3.25).

Αρκεί να αποδείξουμε την (3.25) για $0 < \eta$ αφού αυτή μένει αμετάβλητη αν αλλάξουμε το η σε $-\eta$ και είναι προφανής για $\eta = 0$. Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε την (3.25) για $0 < \eta \leqslant$. Πράγματι αν ισχύει για κάθε η με $0 < \eta \leqslant 1$, τότε διαιρώντας την (3.25) με η^2 παίρνουμε

$$\left(\frac{|1+1/\eta|^q+|1-1/\eta|^q}{2}\right)^{\frac{2}{q}} \leqslant \frac{1}{\eta^2}+(q-1).$$

Επειδή

$$\frac{1}{\eta^2}+(q-1) \leqslant 1+(q-1)\frac{1}{\eta^2} \iff \frac{1}{\eta^2}(q-2) \geqslant 0$$

και επειδή η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού $q > 2$, συνεπάγεται ότι

$$\left(\frac{|1+1/\eta|^q+|1-1/\eta|^q}{2}\right)^{\frac{2}{q}} \leqslant 1+(q-1)\frac{1}{\eta^2}.$$

Δηλαδή η ανισότητα (3.25) ισχύει για τον $\frac{1}{\eta} \geqslant 1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$p(\eta) = \frac{1}{q}\log\left\{\frac{|1+\eta|^q+|1-\eta|^q}{2}\right\} - \frac{1}{2}\log(1+(q-1)\eta^2), \qquad 0 < \eta \leqslant 1.$$

Και αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$p(\eta) \leqslant 0, \qquad 0 < \eta < 1. \tag{3.27}$$

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} p'(\eta) &= \frac{(1+\eta)^{q-1}-(1-\eta)^{q-1}}{(1+\eta)^q+(1-\eta)^q} - \frac{(q-1)\eta}{1+(q-1)\eta^2} \\ &= \frac{(1+\eta)^{q-1}[1-(q-1)\eta]-(1-\eta)^{q-1}[1+(q-1)\eta]}{[(1+\eta)^q+(1-\eta)^q][1+(q-1)\eta^2]} \\ &= \frac{\Delta(\eta)}{[(1+\eta)^q+(1-\eta)^q][1+(q-1)\eta^2]}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Τώρα.
$$\Delta'(\eta) = -q(q-1)\eta[(1+\eta)^{q-2} - (1-\eta)^{q-2}] \leqslant 0$$
για $0 < \eta \leqslant 1$, αφού $q > 2$.

Άρα,
$$\Delta(\eta) \leqslant \Delta(0) = 0, \qquad 0 < \eta \leqslant 1$$
και επομένως παίρνουμε
$$p'(\eta) \leqslant 0, \qquad 0 < \eta \leqslant 1.$$
Άρα,
$$p(\eta) \leqslant p(0) = 0, \qquad 0 < \eta \leqslant 1,$$
και επομένως αποδείχθηκε η (3.27) και κατ' επέκταση η (3.25).

Η απόδειξη της (3.26) είναι ακριβώς η ίδια: όλες οι ανισότητες αντιστρέφονται διότι $p < 2$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.13. Συνδυασμός του Θεωρήματος 3.19 και των Λημμάτων **;;** και **;;**. □