Tauberian Θεωρήματα

Θωμάς Ζαχαρής και Χριστόφορος Παναγιώτης

Περιεχόμενα

1 Στοιχειώδη Tauberian Θεωρήματα

Εντελώς γενικά, σε ένα Tauberian θεώρημα εμπλέκονται μια κλάση αντικειμένων S (συναρτήσεις, σειρές, ακολουθίες) και ένας μετασχηματισμός $\mathcal{T}$. Ο μετασχηματισμός είναι μια πράξη *εξομάλυνσης*. Θα πρέπει να έχει μια ιδιότητα συνέχειας : συγκεκριμένη οριακή συμπεριφορά της S θα πρέπει συνεπάγεται ανάλογη οριακή συμπεριφορά της εικόνας $\mathcal{T}S$. Ο στόχος ενός Tauberian θεωρήματος είναι η αντιστροφή της εξομάλυνσης : απο μια οριακή ιδιότητα της $\mathcal{T}S$ να πάρουμε μια οριακή ιδιότητα της S, ή ενός άλλου μετασχηματισμού της S. Η αντιστροφή συνήθως απαιτεί μια επιπρόσθετη συνθήκη, μια *Tauberian συνθήκη*, στην S και πιθανώς μια συνθήκη για το μετασχηματισμό $\mathcal{T}S$.

Στο κεφάλαιο αυτό, τα αντικείμενα θα είναι σειρές και ακολουθίες πραγματικών αριθμών και οι μετασχηματισμοί διάφοροι εναλλακτικοί τρόποι άθροισης τους.

1.1 Άθροιση αποκλίνουσων σειρών

Φυσικά δεν έχει νόημα να μιλάμε για το άθροισμα μιας αποκλίνουσας σειράς. Πολλές φορές όμως υπάρχει φυσιολογικός τρόπος να ορίσουμε το άθροισμα μιας τέτοιας σειράς. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ η οποία αποκλίνει(τα μερικά αθροίσματα εναλάσσονται μεταξύ 0 και 1). Αν όμως θυμηθούμε την γεωμετρική σειρά, βλέπουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \qquad |x|<1$$

και παρατηρούμε ότι το $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ υπάρχει και είναι ίσο με $\frac{1}{2}$. Θα μπορούσαμε έτσι να ορίσουμε $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = \frac{1}{2}$. Παρακινούμενοι από τα παραπάνω, δίνουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός. Η σειρά πραγματικών αριθμών $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ λέγεται *Abel αθροίσιμη* στον αριθμό s αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$συγκλίνει για $0<x<1$ και

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s$$

Έτσι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ είναι Abel αθροίσιμη στο $\frac{1}{2}$. Θα θέλαμε ο ορισμός της Abel αθροισιμότητας να ταυτίζεται με το συνήθη ορισμό, αν η σειρά συγκλίνει. Κάτι τέτοιο όντως ισχύει.

Λήμμα 1.1 (άθροιση κατά μέρη). *Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες σε δακτύλιο R και $m\in\mathbb{N}$. Ορίζουμε $A_n = \sum_{i=m}^{n} a_i$. Τότε*

$$\sum_{i=m}^{n} a_i b_i = \sum_{i=m}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) + A_n b_n \quad \text{για κάθε } m \geq n$$

Απόδειξη. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=m} n(A_i - A_{i-1})b_i \\
&= \sum_{i=m}^{n} A_i b_i - \sum_{i=m}^{n} A_{i-1} b_i \\
&= \sum_{i=m}^{n} A_i b_i - \sum_{i=m-1}^{n-1} A_i b_{i+1} \\
&= \sum_{i=m}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) + A_n b_n - A_{m-1} b_m \\
&= \sum_{i=m}^{n-1} A_i(b_i - b_{i+1}) + A_n b_n \qquad \square
\end{aligned}$$

Θεώρημα 1.2 (Abel). *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο $s\in R$. Τότε είναι Abel αθροίσιμη στο s.*

Απόδειξη. Έστω $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ και $\varepsilon > 0$. Αφού $s_n \to s \in \mathbb{R}$, η s_n είναι βασική, επομένως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $\left|\sum_{l=m}^{k} a_l\right| < \varepsilon/3$ για $k \geq m \geq n_o$. Απο το προηγούμενο λήμμα, με $b_k = x^k$, έχουμε ότι

$$\sum_{k=m}^{n} a_k x^k = \sum_{k=m}^{n-1} \left(\sum_{l=m}^{k} a_l\right)(x^k - x^{k+1}) + x^n \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Άρα, για $n \geq m \geq n_0$, και για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει ότι

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k x^k\right| < (1-x)\sum_{k=m}^{n-1} \frac{\varepsilon}{3} x^k + \frac{\varepsilon}{3} x^n < \frac{\varepsilon}{3}(1-x)\frac{1-x^n}{1-x} + \frac{\varepsilon}{3} x^n = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έπεται ότι

$$\left|\sum_{k=m}^{\infty} a_k x^k\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Γράφουμε

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k|(1-x^k) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος είναι πεπερασμένο άθροισμα όρων που τείνουν στο 0, άρα τείνει στο 0 καθώς $x \to 1^-$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για $1 - \delta < x < 1$ να ισχύει $\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k|(1-x^k) \leq \varepsilon/3$. Παίρνουμε

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

που είναι το ζητούμενο. □

Ένας παρόμοιος τρόπος άθροισης σειρών που αποκλίνουν βασίζεται στους μέσους όρους των μερικών αθροισμάτων. Έστω

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

τα μερικά αθροίσματα της σειράς a_n, και

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

οι αριθμητικοί μέσοι αυτών ή *Cesàro μέσοι* όπως είναι γνωστοί.

Ορισμός. Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ λέγεται *Cesàro αθροίσιμη* στο σ εάν $\sigma_n \to \sigma$ καθώς $n \to \infty$.

Είναι γνωστό ότι $\sigma_n \to s$ όταν $s_n \to s$, ενώ το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή μπορεί η s_n να μη συγκλίνει ενώ η (σ_n) να συγκλίνει. Έχουμε δει ήδη παράδειγμα τέτοιας σειράς : η $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ έχει μερικά αθροίσματα $s_n = 1$ όταν n άρτιος και $s_n = 0$ όταν n περιττός, και έτσι είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\frac{1}{2}$, που είναι το συμπίπτει με το άθροισμα Abel. Από την άλλη, μπορούμε να ελέγξουμε πως η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots$$

δεν είναι Cesàro αθροίσιμη, είναι όμως Abel αθροίσιμη στο $\frac{1}{4}$. Πράγματι, εύκολα βρίσκουμε, με παραγώγιση της γεωμετρικής σειράς, πως

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n = \frac{1}{1+x^2}, \quad |x| < 1$$

συνεπώς

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{4}.$$

Από την άλλη, η σειρά αυτή δεν είναι Cesàro αθροίσιμη: δεν ισχύει ότι $s_n/n \to 0$.

Τα παραπάνω μας προϊδεάζουν για το επόμενο θεώρημα,σύμφωνα με το οποίο η άθροιση κατά Abel είναι ισχυρότερη της άθροισης κατά Cesàro.

Θεώρημα 1.3 (Frobenius)**.** *Με τον παραπάνω συμβολισμό, εάν $\sigma_n \to \sigma$ καθώς $n \to \infty$, τότε η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $|x| < 1$ και $f(x) \to \sigma$ καθώς $x \to 1^-$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την άθροιση κατά μέρη (Λήμμα 1.1) διαδοχικά λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \\ &= (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \sigma_n x^n \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση της ταυτότητας $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{1-x^2}$, η οποία προκύπτει απο τη γεωμετρική σειρά με παραγώγιση, η τελευταία ισότητα γράφεται ως εξής :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sigma = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\sigma_n - \sigma) x^n$$

Όμως $\sigma_n \to \sigma$, επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$|\sigma_n - \sigma| < \varepsilon \qquad \text{για κάθε } n > N$$

Τότε, για $0 < x < 1$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(\sigma_n - \sigma) x^n \right| &\le \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |\sigma_n - \sigma| x^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} (n+1) |\sigma_n - \sigma| x^n \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) |\sigma_n - \sigma| + \frac{\varepsilon}{1-x^2} \end{aligned}$$

και έτσι

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sigma \right| \le (1-x^2) \sum_{n=0}^{N} (n+1) |\sigma_n - \sigma| + \varepsilon < 2\varepsilon$$

για x αρκούντως κοντά στο 1. Με άλλα λόγια $f(x) \to \sigma$ καθώς $x \to 1^-$. □

Άρα έχουμε την παρακάτω κατάσταση.

$$a_n \text{ αθροίσιμη} \Longrightarrow a_n \text{ Cesàro αθροίσιμη} \Longrightarrow a_n \text{ Abel αθροίσιμη}$$

Στη συνέχεια θα δούμε υπο ποιες προϋποθέσεις αντιστρέφονται οι παραπάνω συνεπαγωγές.

Εκτός απο τις προαναφερθείσες διαδικασίες άθροισης, πολλές ακόμη έχουν ορισθεί, και έχουν αποδειχθεί για αυτές τα αντίστοιχα 'Abelian θεωρήματα', που μας βεβαιώνουν ότι αν μια σειρά συγκλίνει ή είναι αθροίσιμη με κάποια μέθοδο, θα πρέπει να συγκλίνει στο ίδιο άθροισμα με κάποια ποιο ισχυρή διαδικασσία άθροισης. Για παράδειγμα έχουμε τον εξής ορισμο.

Ορισμός. Μια σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ λέγεται *Borel αθροίσιμη* αν το όριο

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} s_n x^n$$

υπάρχει.

Ο Borel εισήγαγε την παραπάνω μέθοδο το 1899 και απέδειξε το αντίστοιχο Abelian θεώρημα, ότι μια συγκλίνουσα σειρά είναι Borel αθροίσιμη στο κανονικό της άθροισμα. Η κατά Borel αθροισιμότητα εμφανίζεται φυσιολογικά στην μιγαδική ανάλυση, ιδιαίτερα σε προβλήματα αναλυτικής συνέχισης.

Ας δούμε ακόμη ένα παράδειγμα.

Ορισμός. Ο *πυρήνας του Lambert* είναι η συνάρτηση

$$L(x) = \frac{x \log(1/x)}{1-x}, \quad 0 < x < 1, \quad \text{και} \quad L(1) = 1$$

Μια σειρά λέγεται *Lambert αθροίσιμη* αν το όριο

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n L(x^n)$$

υπάρχει.

Η κατά Lambert αθροισιμότητα βρίσκει σημαντικές εφαρμοργές στη θεωρία αριθμών.

1.2 Το θεώρημα του Tauber

Μια σειρά μπορεί να είναι αθροίσιμη με διάφορες μεθόδους, και παρόλα αυτά να μην συγκλίνει. Έχουμε δει παραδείγματα σειρών που αποκλίνουν ενώ είναι Abel ή Cesàro αθροίσιμες. Στην αντίστροφη κατεύθυνση, ισχύει η γενική αρχή ότι αν μια σειρά είναι αθροίσιμη με κάποια μέθοδο και δεν αποκλίνει πολύ 'γρήγορα', τότε είναι συγκλίνουσα. Το πρώτο αποτέλεσμα αυτής της μορφής βρέθηκε το 1897 απο τον Tauber. O Tauber()1866-1942) ήταν ένας Αυστριακός μαθηματικός που ασχολήθηκε κυρίως με εφαρμοσμένα μαθηματικά. Το τέλος του Tauber ήταν τραγικό: εκτελέστηκε σε στρατόπεδο συγκέντρωσης κοντά στο Theresienstadt στις 26 Ιουλίου 1942.

Θεώρημα 1.4 (Tauber). *Έστω ότι $na_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$, ώστε η δυναμοσειρά*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

να συγκλίνει στο διάστημα $(-1,1)$. Αν $f(x) \to A$ καθώς $x \to 1^-$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ είναι συγκλίνουσα με άθροισμα A.

Απόδειξη. Συμβολίζοντας με $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ τα μερικά αθροίσματα της a_n, γράφουμε

$$s_n - f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(1-x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k$$

Για $0 < x < 1$ έχουμε

$$1 - x^k = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{k-1} \leq k(1-x)$$

άρα παίρνουμε

$$|s_n - f(x)| \leq (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|x^k.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Εξ' υποθέσεως, μπορούμε να διαλέξουμε n αρκετά μεγάλο ώστε $k|a_k| < \varepsilon$ για κάθε $k > n$. Τότε

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|x^k < \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k < \frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{\varepsilon}{n(1-x)}$$

Παίρνουμε τώρα $x = x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Τότε $1 - x_n = \frac{1}{n}$ και $x_n \to 1$ καθώς $n \to \infty$. Αυτό μας δίνει την εκτίμηση

$$s_n - f(x_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \varepsilon$$

για n αρκετά μεγάλο. Επειδή όμως $k|a_k| \to 0$, έπεται ότι οι αριθμητικοί μέσοι

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k|$$

επίσης τείνουν στο 0 για $n \to \infty$. Επομένως, $|s_n - f(x_n)| < 2\varepsilon$ για n αρκούντως μεγάλο. Έχουμε όμως υποθέσει πως $\lim_{x\to 1^-} f(x) = A$, άρα $s_n \to A$. □

Εν συντομία, το θεώρημα του Tauber μας λέει πως αν μια σειρά είναι Abel αθροίσιμη και ικανοποιεί επιπλέον την συνθήκη $na_n = o(1)$ τότε θα συγκλίνει. Το παραπάνω θεώρημα αποκαλύπτει και μια αρκετά περίεργη συμπεριφορά. Η μέθοδος του Abel αποτυγχάνει να αθροίσει σειρές που αποκλίνουν γρήγορα, αλλά και σειρές που αποκλίνουν πολύ αργά. Για παράδειγμα, αν $|a_n| < 1/(n\log n)$, απο το θεώρημα του Tauber η a_n δεν είναι Abel αθροίσιμη εκτός και αν συγκλίνει. Θα δούμε αργότερα ότι η συνθήκη $na_n = o(1)$ μπορεί να αντικατασταθεί απο την ασθενέστερη $na_n = O(1)$.

1.3 Θεωρήματα των Hardy και Littlewood

Ξεκινώντας γύρω στο 1910, οι Βρετανοί αναλύστες G. H. Hardy(1877-1947) και J. E. Littlewood(1885-1977) άρχισαν μια σειρά ερευνών με αφορμή το θεώρημα του Tauber. Πρώτα ο Hardy απέδειξε ένα ανάλογο του θεωρήματος του Tauber υποθέτοντας την ποιο περιοριστική Cesàro αθροισιμότητα και απαιτώντας μόνο η ακολουθία (na_n) να είναι φραγμένη.

Θεώρημα 1.5 (Hardy). *Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ είναι Cesàro αθροίσιμη και η (na_n) είναι φραγμένη, τότε η σειρά συγκλίνει.*

Ο Hardy διατύπωσε ακόμη την εικασία ότι το θεώρημα του Tauber ισχύει αν η υπόθεση $na_n \to 0$ αντικατασταθεί με την ασθενέστερη υπόθεση πως η (na_n) είναι φραγμένη. Ο συνάδελφός του στο Cambridge, Littlewood επαλήθευσε την εικασια, αποδεικνύοντας το επόμενο θεώρημα, του γενικεύει τα θεωρήματα των Tauber και Hardy.

Θεώρημα 1.6 (Littlewood). *Έστω ότι η ακολουθία (na_n) είναι φραγμένη, έτσι ώστε η δυναμοσειρά*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

να συγκλίνει στο διάστημα $(-1, 1)$. Αν $f(x) \to A$ καθώς $x \to 1^-$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο A.

Το 1914, οι Hardy και Littlewood, απο κοινού, βρήκαν ένα Tauberian θεώρημα που μας πάει απο την Abel στη Cesàro αθροισιμότητα, και είναι μερικό αντίστροφο του θεωρήματος του Frobenius.

Θεώρημα 1.7 (Hardy-Littlewood). *Αν $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to A$ καθώς $x \to 1^-$ και $s_n \geq 0$ για κάθε n, τότε $\sigma_n \to A$ καθώς $n \to \infty$.*

Παρατηρούμε ότι το θεώρημα Hardy-Littlewood ισχύει γενικότερα υπό την συνθήκη $s_n \geq -C$ για κάποια σταθερά C, πράγμα που ισχύει αν τα μερικά αθροίσματα s_n είναι φραγμένα. Οι Hardy και Littlewood ανακάλυψαν επίσης πως η Tauberian συνθήκη στο θεώρημα του Littlewood, δηλαδή η $na_n = O(1)$, μπορεί να αντικατασταθεί με ανισότητα της μορφής $a_n \geq -C/n$.

Οι πρώτες αποδείξεις των θεωερημάτων του Littlewood και Hardy-Littlewood παρουσίαζαν ομοιοότητες και ήταν αρκέτα ποιο δύσκολες απο αυτές των θεωρημάτων του Hardy και του Tauber. Για αρκετό καιρό δεν ήταν γνωστή κάποια απλοποίηση και τα αποτελέσματα αυτά θεωρούνταν αρκετά βαθιά. Όμως το 1930 ο Karamata πρότεινε μια ευφυή και συνάμα απλή προσσέγγιση βασιζόμενος στο θεώρημα του Weierstass. Η κομψή απόδειξη του Karamata θα παρουσιαστεί στο επόμενο μέρος. Αρχικά, απέδειξε το θεώρημα των Hardy-Littlewood και στη συνέχεια συμπέρανε από αυτό το θεώρημα του Littlewood. Η αρχική προσσέγγιση του Llittlewood ήταν να αποδείξει τη Cesáro αθροισιμότητα και στη συνέχεια να επικαλεστεί το θεώρημα του Hardy για να συμπεράνει τη σύγκλιση της σειράς. Μερικά χρόνια αργότερα, ο Wielandt απλοποίησε την απόδειξη του Karamata, αποφεύγοντας την παράκαμψη μέσω της Cesáro αθροισιμότητας, και αποδεικνύοντας το θεώρημα του Littlewood απευθείας. Οι λεπτομέρειες ακολουθούν.

1.4 Η απόδειξη του Karamata

Το επιχείρημα του Karamata για την απόδειξη του θεωρήματος Hardy-Littlewood περιλαμβάνει τρία βήματα:

(i) Αντικαθιστούμε το x με x^k στη σχέση

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n (1-x) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \to A \text{ καθώς } x \to 1^-$$

Παίρνοντας έναν πεπερασμένο $\mathbb{R}$-γραμμικό συνδυασμό που αποτελέσματος, το επεκτείνουμε για κάθε πολυώνυμο

(ii) Αποδεικνύουμε ότι καθε συνάρτηση g συνεχής κατά τμήματα φράσσεται απο δύο πολυώνυμα, το ολοκλήρωμα της διαφοράς των οποίων τείνει στο 0.

(iii) Επιλέγουμε ως g μια κατάλληλη 'περίπου' χαρακτηριστική συνάρτηση, ώστε το άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} s_n(1-x)x^n$ να γίνει ουσιαστικά σ_n(με κάποιο παράγοντα κανονικοποίησης).

Η Tauberian συνθήκη $s_n \geq 0$, απαιτείται στο βήμα (ii). Σχετικό είναι το παρακάτω λήμμα, η απόδειξη του οποίου βασίζεται στο θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass.

Λήμμα 1.8. *Έστω συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0,1]$, εκτός απο πιθανή ασυνέχεια με άλμα στο σημείο $c \in (0,1)$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ έτσι ώστε $P(x) < g(x) < Q(x)$ και*

$$\int_0^1 (g(x) - P(x))\, dx < \varepsilon, \qquad \int_0^1 (Q(x) - g(x))\, dx < \varepsilon$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η g έχει ασυνέχεια με άλμα στο $c \in (0,1)$ και ας είναι $g(c+0)$ και $g(c-0)$ το αριστερό και δεξί πλευρικό όριο αντίστοιχα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $g(c-0) \leq g(c+0)$. Σταθεροποιούμε $\delta \in (0,c)$, και θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση $\ell(x)$ έτσι ώστε

$$\ell(c-\delta) = g(c-\delta) + \varepsilon/2, \qquad \ell(c) = g(c+0) + \varepsilon/2$$

Ορίζουμε

$$\phi(x) = \begin{cases} g(x) + \varepsilon/2 & \text{αν } 0 \leq x < c-\delta \text{ ή } c < x \leq 1 \\ \max\{\ell(x), g(x) + \varepsilon/2\} & \text{αν } c - \delta \leq x \leq c. \end{cases}$$

Τότε η ϕ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $\phi(x) \geq g(x) + \varepsilon/2$. Επιλέγουμε πολυώνυμο $Q(x)$ έτσι ώστε $|Q(x) - \phi(x)| < \varepsilon/2$ για κάθε $x \in [0,1]$. Τότε $Q(x) > g(x)$ και

$$\int_0^1 (Q(x) - g(x))\, dx < \varepsilon$$

για δ αρκούντως μικρό. Με παρόμοια κατασκευή, βρίσκουμε ένα πολυώνυμο $P(x) < g(x)$ με $\int_0^1 (g(x) - P(x))\, dx < \varepsilon$. $\square$

Με το παραπάνω λήμμα στη διάθεσή μας είμεθα έτοιμοι να αποδείξουμε, σε πρώτο χρόνο, το θεώρημα Hardy-Littlewood που είναι κάπως ποιο εύκολο απο το θεώρημα του Littlewood.

Απόδειξη του θεωρήματος Hardy-Littlewood. Εξ' υποθέσεως,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \to A, \qquad \text{καθώς } x \to 1^-.$$

Γενικότερα, ισχύει πως

$$(\star) \qquad \lim_{x \to 1^-} (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n p(x^n) = A \int_0^1 p(t) dt$$

για κάθε πολυώνυμο $p(x)$. Πράγματι, αρκεί να το δείξουμε για τα πολυώνυμα $p(x) = x^k$. Τότε το αριστερό μέλος γίνεται

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+kn} &= \frac{1-x}{1-x^{k+1}}\left[(1-x^{k+1})\sum_{n=0}^{\infty} s_n \left(x^{k+1}\right)^n\right] \\ &\to \frac{A}{k+1} = A\int_0^1 p(t)dt \qquad \text{καθώς } x \to 1^-\end{aligned}$$

όπως θέλουμε. Απο την (⋆), ξρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

(⋆⋆)
$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n g(x^n) = A\int_0^1 g(t)dt$$

για κάθε g συνεχή στο $[0, 1]$, εκτός πιθανής μοναδικής ασυνέχειας με άλμα. Πράγματι, σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε πολυώνυμα P και Q όπως στο λήμμα. Τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n P(x^n) \le \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n g(x^n) \le \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n Q(x^n), \qquad 0 < x < 1.$$

Στο σημείο αυτό χρειαζόμαστε την υπόθεση $s_n \ge 0$. Αφού $s_n \ge 0$, θα είναι $A \ge 0$, επομένως

$$\begin{aligned}\limsup_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n g(x^n) &\le \lim_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n Q(x^n) \\ &= A\int_0^1 Q(t)dt \le A\int_0^1 g(t)dt + A\varepsilon.\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$, βλέπουμε ότι

$$\limsup_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n g(x^n) \le A\int_0^1 g(t)dt.$$

Εντελώς όμοια, βρίσκουμε

$$\liminf_{x\to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n g(x^n) \ge A\int_0^1 g(t)dt.$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ανισότητες λαμβάνουμε την (⋆⋆). Τώρα, θέτουμε

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1/e \\ 1/t, & 1/e \le t \le 1. \end{cases}$$

Έχουμε

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_{1/e}^1 g(t)dt = 1.$$

Θέτουμε $x_N = e^{-1/N}$ και παρατηρούμε ότι $x_N^n \geq 1/e$ αν και μόνο αν $n \leq N$. Έτσι

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x_N^n g(x_N^n) = \sum_{n=0}^{N} s_n = (N+1)\sigma_N.$$

Η σχέση (⋆⋆) δείνει ότι

$$(N+1)(1-x_N)\sigma_N = (1-x_N)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x_N^n g(x_N^n) \to A\int_0^1 g(t)dt = A \quad \text{καθώς } N \to \infty,$$

αφού $x_N \to 1$. Όμως

$$(N+1)(1-x_N) = (N+1)(1-e^{-1/N}) \to 1$$

καθώς $N \to \infty$, επομένως $\sigma_N \to A$. □

Απόδειξη του θεωρήματος του Littlewood. Για κάθε πολυώνυμο

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k x^k \qquad \text{με } P(0) = 0,$$

από την υπόθεση $f(x) \to A$ έχουμε

$$(\star\star\star) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n P(x^n) = \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn} \to A\sum_{k=1}^{n} b_k = P(1)A$$

καθώς $x \to 1^-$. Τώρα θεωρούμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1/e \\ 1, & 1/e \leq t \leq 1. \end{cases}$$

έτσι ώστε

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x_N^n)$$

όπου $x_N = e^{-1/N}$. Για να αποδείξουμε ότι $s_N \to A$ καθώς $N \to \infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) \to g(1)A = A \qquad \text{καθώς } x \to 1^-.$$

Για να δείξουμε ότι

$$\limsup_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) \leq A,$$

θα εφαρμόσουμε την (⋆⋆⋆) σε πολυώνυμο P με τις ιδιότητες $P(0) = 0, P(1) = 1$ και $P(t) \geq g(t)$ για $0 \leq t \leq 1$. Με αυτό κατά νου, επιλέγουμε πολυώνυμο Q έτσι ώστε

$$Q(t) \geq \frac{g(t)-t}{t(1-t)} = h(t), \qquad 0 < t < 1,$$

απο το οποίο παίρνουμε ένα δεύτερο πολυώνυμο $P(t) = t + t(1-t)Q(t)$ με τις ιδιότητες του θέλαμε. Η Tauberian συνθήκη $|na_n| \leq C$ μας δίνει $na_n \geq -C$. Γράφουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n P(x^n) &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[P(x^n) - g(x^n)\right] \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[P(x^n) - g(x^n)\right] \\
&\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x}{1-x^n} \left[P(x^n) - g(x^n)\right] \\
&= C(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \phi(x^n), \qquad \text{όπου } \phi(t) = \frac{P(t) - g(t)}{1-t}.
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αξιοσημείωτη ταυτότητα, μαζί με τη στοιχειώδη ανισότητα

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1} \leq n, \quad 0 \leq x < 1$$

Ισχυριζόμαστε τώρα πως

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \phi(x^n) = \int_0^1 \frac{\phi(t)}{t} dt,$$

αφού η ϕ επεκτείνεται συνεχώς σε όλο το $[0,1]$ εκτός απο την ασυνέχεια με άλμα στο $t = 1/e$. Πράγματι, για $x \in (0,1)$, το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται απο το άθροισμα Riemann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(x^n)}{x^n} (x^n - x^{n+1} = (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \phi(x^n),$$

που τείνει στο ολοκλήρωμα καθώς $x \to 1^-$. Όμως

$$\int_0^1 \frac{\phi(t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{[P(t) - t] - [g(t) - t]}{t(1-t)} dt = \int_0^1 [Q(t) - h(t)] dt.$$

Επειδή $Q(t) \geq h(t)$, το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι θετικό και από το λήμμα μπορούμε να το κάνουμε αυθαίρετα μικρό με κατάλληλη επιλογή του Q. Αν ακόμη θυμηθούμε οτι απο την $(\star\star\star)$

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P(x^n) = A,$$

συνδυάζοντας όλα τα προηγούμενα, συμπεραίνουμε ότι

(1) $$\limsup_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) \leq A.$$

Με παρόμοιο επιχείρημα δείχνουμε ότι

$$\liminf_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) \geq A.$$

Για να το δούμε αυτό, επιλέγουμε $P(t) = t + t(1-t)Q(t)$, όπου Q πολυώνυμο με την ιδιότητα

$$Q(t) \leq h(t) = \frac{g(t) - t}{t(1-t)}, \quad \text{για } 0 < t < 1.$$

Τότε $P(0) = 0, P(1) = 1$, και $P(t) \leq g(t)$ για $0 \leq t \leq 1$. Έτσι η Tauberian συνθήκη $na_n \geq -C$ δίνει

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n P(x^n) \geq -C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [g(x^n) - P(x^n)] \geq C(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} \phi(x^n)$$

επειδή $1 - x^n \leq n(1-x)$ και τώρα

$$\phi(t) = \frac{P(t) - g(t)}{1-t} \leq 0 \quad \text{για } 0 < t < 1.$$

Στη συνέχεια, μπορούμε να καταλήξουμε, όπως πριν, στο ότι

$$\liminf_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) \geq A + C \int_0^1 [Q(t) - h(t)] \, dt.$$

Επικαλούμαστε για μια τελευταία φορά το λήμμα, ισχυριζόμενοι πως το ολοκλήρωμα στην τελευταία ισότητα μπορεί, για κατάλληλη επιλογή του πολυωνύμου Q, να γίνει όσο μικρό θέλουμε. Έτσι έχουμε τη σχέση

$$\liminf_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) \geq A \tag{2}$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2) παίρνουμε ότι

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n g(x^n) = A.$$

Όπως προαναφέραμε, αυτό συνεπάγεται πως $s_n \to A$, και το θεώρημα αποδείχθηκε. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η μόνη Tauberian συνθήκη που χρησιμοποιήσαμε είναι η $na_n \geq -C$, αντί της ισχυρότερης $|na_n| \leq C$ που υποθέσαμε. □

1.5 Το θεώρημα υψηλών δεικτών

Το θεώρημα υψηλών δεικτών είναι ένα αξιοσημείωτο Tauberian θεώρημα για μη επεκτάσημες σειρές(σειρές που δεν μπορούν να επεκταθούν ολόμορφα έξω απο την ακτίνα σύγκλισής τους).

Θεώρημα 1.9 (Θεώρημα υψηλών δεικτών). *Αν $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{\lambda_k}$ για $0 < x < 1$, όπου οι εκθέτες αυξάνουν γεωμετρικά, δηλαδή ικανοποιούν συνθήκη της μορφής $\lambda_{k+1}/\lambda_k \geq \rho > 1$ και $f(x) \to A$ καθώς $x \to 1^-$, τ ότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει στο A.*

Το θεώρημα αποδείχθηκε αρχικά απο τους Hardy και Littlewood το 1926. Η αρχική απόδειξη απλοποιήθηκε απο τον Ingham το 1937. Το ποιο εκπληκτικό στοιχείο του θεωρήματος υψηλών δεικτών είναι πως η μη επεκτασιμότητα της σειράς είναι επαρκής Tauberian συνθήκη. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τη *δυναμοσειρά του Hardy*

$$f(x) = x - x^2 + x^4 - x^8 + x^{16} - \cdots$$

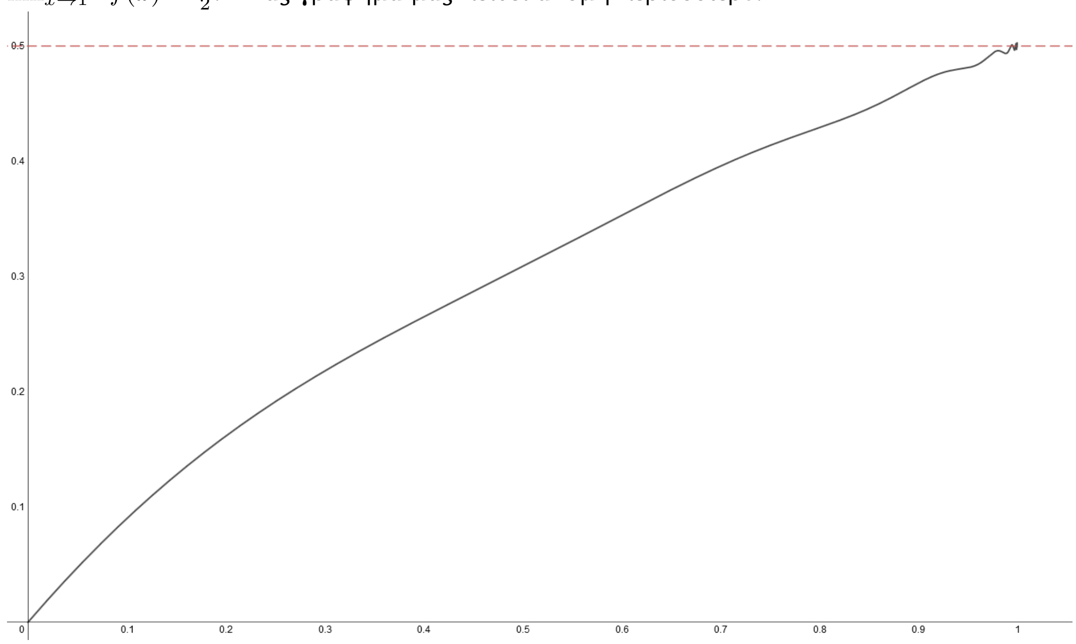
για x πραγματικό, μικρότερο του 1. Έχει η $f(x)$ όριο καθώς το x πλησιάζει στο 1 απο δεξιά; Εάν ναι, ποιο είναι αυτό; Πριν προσπαθήσουμε να απαντήσουμε, παρατηρούμε ότι ζευγαρόνοντας τους όρους

$$f(x) = (x - x^2) + (x^4 - x^8) + \cdots > 0$$

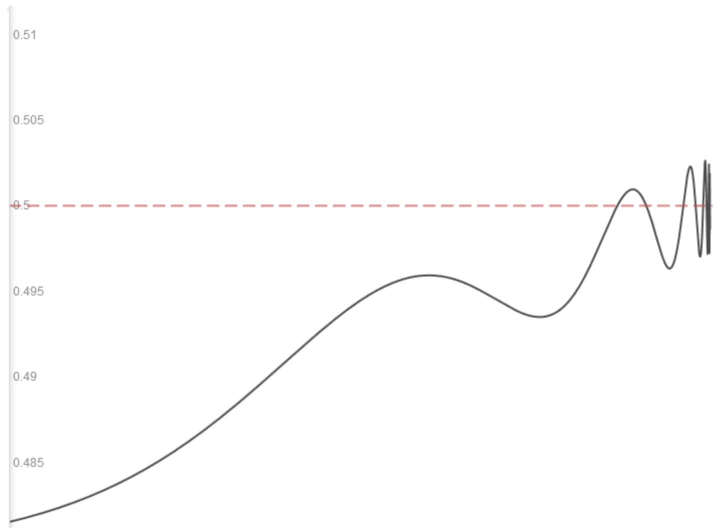
και

$$f(x) = x - (x^2 - x^4) - (x^8 - x^{16}) - \cdots < x$$

για $0 < x < 1$. Ιδιαίτερα, η f είναι φραγμένη στο διάστημα $[0, 1]$. Η ισότητα $f(x) = x - f(x^2)$ μας βεβαιώνει πως αν το όριο $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ υπάρχει θα είναι ίσο με $\frac{1}{2}$. Επανάληψη της ταυτότητας δείχνει ότι $f(x^4) < f(x)$, άρα είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $0 < x < 1$. Αν αυτό είναι σωστό, η f θα είναι φραγμένη και αύξουσα άρα το όριο όντως θα υπάρχει και $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$. Ένας γράφημα μας πείθει ακόμη περισσότερο.



Στην πραγματικότητα, το όριο δεν υπάρχει! Καθώς το x τείνει στο 1, το $f(x)$ ταλαντώνεται γύρω απο την τιμή $\frac{1}{2}$ και δεν συγκλίνει. Αν μεγεθύνουμε το γράφημα κοντά στο σημείο $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ αυτό γίνεται εμφανές.



Παρατηρούμε ότι οι εκθέτες $n_k = 2^k$ της παραπάνω δυναμοσειράς ικανοποιούν την υπόθεση του θεωρήματος υψηλών δεικτών και τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum a_k$ είναι 0 και 1 εναλλάξ, άρα το θεώρημα υψηλών δεικτών δείχνει ότι το $f(x)$ δεν μπορεί να έχει όριο καθώς $s \to 1^-$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια απόδειξη του θεωρήματος υψηλών δεικτών που βρίσκεται στο κλασικό βιβλίο του Korevaar[1].

Λήμμα 1.10. *Έστω*

$$f(x) = f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^{\lambda_n}$$

όπου οι εκθέτες λ_n ικανοποιούν συνθήκη της μορφής $\lambda_{n+1} \geq \rho\lambda_n$ για κάποιο $q > 1$. Τότε υπάρχει αριθμός C_ρ, που εξαρτάται μόνο απο το q, ώστε

$$|s_m| \leq C_\rho M, \quad \forall m \geq 0, \quad \text{όπου } M = \sup_{0 \leq x < 1} |f(x)|$$

Λήμμα 1.11. *Για δοσμένα $0 < a < 1/2 < \beta < 1$ και τυχόν $\delta > 0$, υπάρχει πολυώνυμο P, που αυξάνει στο $[0, 1]$, έτσι ώστε*

(i) $0 \leq P(x) \leq 1$ *για* $0 \leq x \leq 1$,

(ii) $P(x) \leq \delta x$ *για* $0 \leq x \leq a$,

(iii) $1 - P(x) \leq \delta(1 - x)$ *για* $\beta \leq x \leq 1$.

Μπορούμε να πάρουμε για P ένα πολυώνυμο της μορφής

$$P(x) = \sum_k b_k x^k = \frac{\int_0^x p^q(y)dy}{\int_0^1 p^q(y)dy}$$

όπου $p(y) = 4y(1 - y)$, και q θετικός ακέραιος εξερτώμενος από τα a, β, δ. Ακόμη θα συμβολίζουμε $\sum_k |b_k| = B_q$, ένας αριθμός που συμπεριφέρεται περίπου όπως το 8^q. Η απόδειξη του λήμματος θα συμπληρωθεί αργότερα.

Απόδειξη του λήμματος 1.10. Με το P όπως παραπάνω, ορίζουμε

$$F(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n P(x^{\lambda_n}) = \sum_{n,k} a_n b_k x^{\lambda_n k} = \sum_k b_k f(x^k).$$

Έπεται ότι

$$\sup_{0 \le x < 1} |F(x)| \le M \sum_k |b_k| = B_q M.$$

Ας υποθέσουμε ότι s_m είναι το μερικό αθροίσμα $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ που έχει τη μέγιστη απόλυτη τιμή(ή ένα απο αυτά τα μερικά αθροίσματα). Αν $m = 0$ έχουμε $|s_n| \le M$ για κάθε n εφόσον $|s_0| = |a_0| = |f(0)|$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m > 0$. Προφανώς $|a_n| \le 2|s_m|$ για κάθε n. Άρα, για $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} |s_m - F(x)| &= \left| \sum_{1 \le n \le m} a_n (1 - P(x^{\lambda_n})) - \sum_{m < n \le N} a_n P(x^{\lambda_n}) \right| \\ &\le 2|s_m| \sum_{1 \le n \le m} a_n (1 - P(x^{\lambda_n})) + 2|s_m| \sum_{n > m} P(x^{\lambda_n}). \end{aligned} \tag{1}$$

Θα επιλέξουμε a, β και δ στο $(0,1)$ τέτοια ώστε $x^{\lambda_n} \ge \beta$ όταν $1 \le n \le m$ και $x^{\lambda_n} \le a$ όταν $n > m$. Για το σκοπο αυτό, πάιρνουμε $x^{\lambda_m} = \beta$ και $a = \beta^\rho$, έτσι ώστε $x^{\lambda_{m+1}} = \beta^{\lambda_{m+1}/\lambda_m} \le \beta^\rho = a$.

Παρατηρούμε ότι $1 - e^{-t} < t$ και $e^{-t} < 1/t$ όταν $t > 0$. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} 1 - x^{\lambda_n} &< \lambda_n \log(1/x) = (\lambda_n/\lambda_m)\lambda_m \log(1/x) \\ &\le \rho^{n-m} \log(1/\beta) \text{ για } 1 \le n \le m. \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x^{\lambda_n} &< 1/(\lambda_n \log(1/x)) = (\lambda_m/\lambda_n)/(\lambda_m \log(1/x)) \\ &\le \rho^{n-m}/\log(1/\beta) \text{ για } n > m. \end{aligned} \tag{2}$$

Έτσι μια καλή επιλογή για το $\log(1/\beta)$ είναι η $(1/\sqrt{\rho}) \log 2$, που μας δίνει

$$x^{\lambda_m} = \beta = 2^{-1/\sqrt{\rho}}, \quad a = 2^{-\sqrt{\rho}} \tag{3}$$

Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες (ii) και (iii) του λήμματος και τη μονοτονία του P, συμπεραίνουμε απο τις (1),(2),(3) ότι

$$|s_m - F(x)| \le 2|s_m| \left(\sum_{1 \le n \le m} \delta(1 - x^{\lambda_n}) + \sum_{n > m} \delta x^{\lambda_n} \right).$$

Έτσι

$$\begin{aligned} |s_m| &\le |F(x)| + 2\delta|s_m| \left(\sum_{n \le m} \rho^{m-n-1/2} \log 2 + \sum_{n > m} \frac{\rho^{m-n+1/2}}{\log 2} \right) \\ &\le B_q M + 5\delta\, |s_m| \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-n-1/2} = B_q M + 5\delta |s_m| \frac{\sqrt{\rho}}{\rho - 1}. \end{aligned}$$

Στο λήμμα 1.11 παίρνουμε δ ώστε ο συντελεστής του $|s_m|$ στον τελευταίο όρο της παραπάνω σχέσης να είναι $\frac{1}{2}$. Συμπεραίνουμε ότι για άρκετά μεγάλο q, που εξαρτάται απο το ρ,

$$|s_m| \leq 2B_q M = 2B_q \sup_{0\leq x<1} |f(x)|$$

Βλέπουμε ότι ο συντελεστής $2B_q$ του M εξαρτάται από το ρ αλλά όχι το N. □

Το λήμμα 1.10 επεκτείνεται και για άπειρα αθροίσματα:

Λήμμα 1.12. *Η ανισότητα για τα μερικά αθροίσματα $s_m = \sum_{k\leq m} a_k$ στο λήμμα 1.10 ισχύει και για άπειρες σειρές της μορφής $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda_n}$, όταν η f είναι φραγμένη στο διάστημα $0 \leq x < 1$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και $r \in (0,1)$. Τότε η σειρά $f(rx)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $0 \leq x < 1$. Άρα υπάρχει $N_0 = N_0(\varepsilon, r)$ έτσι ώστε για $N \geq N_0$

$$\left| f(rx) - \sum_{n=0}^{N} a_n r^{\lambda_n} x^{\lambda_n} \right| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [0,1].$$

Ειδικότερα

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n r^{\lambda_n} x^{\lambda_n} \right| \leq M + \varepsilon, \quad \forall x \in [0,1],$$

όπου $M = \sup_{0\leq x<1} |f(x)|$. Έτσι, από το λήμμα 1.10

$$\left| \sum_{n=0}^{m} a_n r^{\lambda_n} \right| \leq C_\rho (M+\varepsilon), \quad \forall m \leq N \quad \text{και} \quad N \geq N_0(\varepsilon, r).$$

Η ζητούμενη ανισότητα για το (δεδομένο) s_m έπεται αν αφήσουμε $\varepsilon \to 0$ και $r \to 1$. □

Απόδειξη του θεωρήματος υψηλών δεικτών. Θα χρησιμοποιείσουμε τη σύγκλιση $f(x) \to A$ καθώς $x \to 1^-$ για να συμπεράνουμε ότι $s_N \to A$ καθώς $N \to \infty$. Ορίζουμε $f(1) = A$, έτσι ώστε η συνάρτηση f να γίνει ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$. Τότε για $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $r \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - f(rx)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [0,1].$$

Τώρα, για $x \in [0,1)$,

$$|f(x) - f(rx)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - r^{\lambda_n}) x^{\lambda_n} \right|,$$

άρα απο το λήμμα 1.12 εφαρμοσμένο στην $f(x) - f(rx)$,

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n (1 - r^{\lambda_n}) \right| \leq C_\rho \varepsilon, \quad \forall N.$$

Για $N \geq N_0(\varepsilon, r)$ έπεται απο το ίδιο λήμμα, για $x = 1$, ότι

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=0}^{N} a_n - f(1) \right| &\leq \left| \sum_{n=0}^{N} a_n (1 - r^{\lambda_n}) \right| + \left| \sum_{n=0}^{N} a_n r^{\lambda_n} - f(r) \right| \\ &\quad + |f(r) - f(1)| \leq (C_\rho + 2)\varepsilon. \qquad \Box\end{aligned}$$

Αφήνοντας $\varepsilon \to 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Μένει μόνο η απόδειξη του λήμματος 1.11.

Απόδειξη του λήμματος 1.11. Επιλέγουμε το P όπως στα σχόλια που ακολουθούν τη διατύπωση του λήμματος. Τότε το P είναι αύξουσα συνάρτηση σοτ $[0,1]$ και το μέρος (i) είναι άμεση συνέπεια. Για το μέρος (ii), για $0 \leq y \leq x \leq a \leq 1/2$,

$$p(y) \leq 4a(1-a) < 1, \quad \int_0^x p^q(y)dy \leq (4a(1-a))^q\, x.$$

Από την άλλη μεριά, για $q \geq 2$,

$$I_q = \int_0^1 p^q(y)dy \geq \int_{(1/2)-1/(2q)}^{(1/2)+1/(2q)} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)^q dy \geq \frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)^2 > \frac{1}{2q}.$$

Επομένως

$$P(x) \leq 2q\,(4a(1-a))^q\, x$$

που είναι $\leq \delta x$ όταν το q είναι αρκετά μεγάλο. Το μέρος (iii) προκύπτει με παρόμοιο επιχείρημα: για $1/2 < \beta \leq x \leq y \leq 1$, έχουμε $p(y) \leq 4\beta(1-\beta)$, επομένως

$$1 - P(x) = \frac{1}{I_q}\int_x^1 p^q(y)dy \leq 2q(4\beta(1-\beta))^q(1-x) \leq \delta(1-x)$$

για q αρκετά μεγάλο. □

2 Το Tauberian Θεωρήμα του Wiener

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ασχοληθούμε με την δημοσίευση του Wiener το 1932, η οποία αποτελεί ένα από τα κλασικά μαθηματικά κείμενα της προπολεμικής περιόδου. Το κύριο αποτέλεσμα αναφέρει ότι αν

$$f(x) \in L^1 = L^1(\mathbb{R}),$$

τότε η γραμμική θήκη των μεταφορών της, $(T_a f)(x) = f(x+a)$ όπου $a \in \mathbb{R}$, είναι πυκνή στον L^1 αν και μόνο αν ο μετασχηματισμός Fourier

$$F(x) = \mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t)dt$$

δεν έχει πραγματικές ρίζες. Αυτό το βασικό αποτέλεσμα ονομάζεται Tauberian θεώρημα του Wiener, ένας αρκετά περίπλοκος τίτλος, η προέλευση του οποίου όμως θα εξηγηθεί αργότερα. Παρατηρήστε ότι, αν g είναι μια συνεχής συνάρτηση με συμπαγή φορέα για την οποία ισχύει η ανισότητα

$$\|f * g\| \leq \|f\|\|g\|,$$

τότε η συνέλιξη των f και g

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

περιέχεται στην κλειστή γραμμική θήκη των μεταφορών της f.

Η θεωρία του Wiener υπήρξε ιδιαίτερης σημασίας και ανάγκασε την μαθηματική κοινότητα να ασχοληθεί με αυτή. Περίπου 10 χρόνια μετά τον Wiener, ο Gefland ασχολούμενος με δακτυλίους με νόρμα ή, όπως ονομάστηκαν αργότερα Άλγεβρες Banach, έθεσε τα θεμέλια της Abstract Αρμονικής Ανάλυσης, η οποία μελετήθηκε με ιδιαίτερη σπουδή για περίπου 20 χρόνια, κυρίως στις Ηνωμένες Πολιτείες. Ένας από τους λόγους που ώθησαν την ανάπτυξη της θεωρίας ήταν η προσπάθεια επέκτασης του θεωρήματος του Wiener στο καινούργιο μαθηματικό περιβάλλον, ενώ στο βιβλίο του Walter Rudin (1962) συνοψίζεται το μεγαλύτερο κομμάτι της έρευνας.

Η απόδοση του χαρακτηρισισμού Tauberian θεώρημα στο θεώρημα του Wiener μπορεί να δημιουργήσει εύλογες απορίες, αφού σε ένα τέτοιο θεώρημα, γνωρίζοντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς $x \to +\infty$, ενός γραμμικού μετασχηματισμού

$$F(x) = \int K(x,y) f(y) dy$$

μιας συνάρτησης $f(x)$, μπορούμε να συμπεράνουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά στο άπειρο της ίδιας της f . Δεν θα πρέπει όμως να παραβλέψουμε το γεγονός ότι αν $f \in L^1$, ο μετασχηματισμός Fourier της f δεν έχει ρίζες και

$$\lim_{x \to +\infty} \int f(x-y) g(y) dy = A \int f(x) dx$$

για κάποια $g \in L^\infty$, τότε το ίδιο ισχύει για όλες τις $f \in L^1$. Στην πραγματικότητα το όριο της παραπάνω σχέσης ισχύει με ολοκλήρωση αν η f αντικατασταθεί απο οποιαδήποτε συνέλιξη

$$(f * h)(x) = \int f(x-z) h(z) dz,$$

όπου h είναι συνεχής συνάρτηση με συμπαγή φορέα και πάρουμε το όριο αντικαθιστώντας την f από οποιαδήποτε συνάρτηση στον L^1. Έτσι, αν η g είναι κατάλληλα ομαλή στο άπειρο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $g(t)$ τείνει στο A για μεγάλο t. Ο σκοπός του Wiener ειναι, μέσω του δικού του θεωρήματος, να συμπεράνει ένα μεγάλο αριθμό από θεωρήματα Tauberian, όπως το θεώρημα πρώτων αριθμών, το οποίο, μπορεί να αποδειχθεί όμως και πιο απλά από το θεώρημα του Ikehara, μαθητή του Wiener : αν $d\mu(x) \geq 0$ είναι μέτρο, το ολοκλήρωμα

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} d\mu(x)$$

συγκλίνει για $Res > 1$, $F(1+it) \neq 0$ όταν $0 \neq t \in \mathbb{R}$ και

$$F(s) \sim A/(s-1)$$

για $s = 1$, τότε

$$\lim_{t \to \infty} \mu(t) e^{-t} = A.$$

Αν και ο κύριος στόχος μας είναι να ασχοληθούμε με το θεώρημα του Wiener ή, όπως ορθώς λέγεται, θεώρημα πυκνότητας του Wiener και να παρουσιάσουμε την αρχική απόδειξη του ίδιου του Wiener, δεν θα περιοριστούμε μόνο σε αυτό, αλλά στη συνέχεια θα συγκρίνουμε με παρόμοια αποτελέσματα της θεωρίας των Αλγεβρών Banach και της Abstract Αρμονικής Ανάλυσης.

2.1 Μερικές πληροφορίες για τον μετασχηματισμό Fourier

Αν με $\mathcal{F}$ συμβολίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier, τότε μπορεί να οριστεί ο αντίστροφός μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}^{-1}$ ως

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{itx}g(t)dt$$

για κατάλληλες κλάσεις συναρτήσεων. Εάν, για παράδειγμα, $f \in L^2$ είναι ομαλή και παίρνει μικρές τιμές στο άπειρο, είναι γνωστό ότι το ίδιο ισχύει και για την $F = \mathcal{F}f$ και έχουμε $f = \mathcal{F}^{-1}F$. Για αυτή την κλάση συναρτήσεων οι ακόλουθες ανισότητες αποδεικνύονται με ολοκλήρωση κατά παράγοντεσ:

$$|f(t)| \leq \int |F(x)|dx, \quad |tf(t)| \leq \int |dF(x)|, \quad f = \mathcal{F}^{-1}F.$$

Πιο συγκεκριμένα,

$$(1+t^2)|f(t)| \leq \int (|F(x)|dx + |dF^{'}(x)|).$$

Περνώντας στο όριο αυτό ισχύει για συγκεκριμένες ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f και όλες τις συναρτήσεις F της κλάσης B_0 των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα και δεύτερες παραγώγους φραγμένης κύμανσης. Συνεπώς $B_0 \subset TL^1$.

Είναι φανερό ότι η κλάση B_0 περιέχει όλες τις κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις με συμπαγή φορέα και ειδικότερα όλες τις κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις $P(x)$ που είναι ίσες με 1 όταν $|x| \leq 1$ και 0 όταν $|x| \geq 2$. Παρατηρήστε ότι το άθροισμα

$$\sum_{k=-N}^{N} P(x+2k)$$

ισούται με 1 όταν $|x| \leq 2N$. Η συνάρτηση $P(x)$ και οι μετασχηματισμοί της θα διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο στη συνέχεια. Εφόσον κάθε μια ισούται με 1 σε κάποιο διάστημα, θα καλούνται τοπικά μοναδιαία στοιχεία.

Στην περίπτωση που βρισκόμαστε στον χώρο $L^2(\mathbb{R})$ τα πράγματα απλοποιούνται. Σύμφωνα με το θεώρημα του Plancherel ο μετασχηματισμός Fourier

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

μπορεί να επεκταθεί σε ισομετρία από τον $L^2(\mathbb{R})$ στον $L^2(\mathbb{R})$, δηλαδή

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\mathcal{F}f(s)|^2 ds,$$

που θυμίζει την ταυτότητα του Parseval, και για συνεχείς συναρτήσεις $f \in L^1(\mathbb{R})$ για τις οποίες $\mathcal{F} \in L^1(\mathbb{R})$ ισχύει

$$f(x) = \int \mathcal{F}f(t)e^{itx}dt$$

.

Για τον χώρο $L^1 = L^1(\mathbb{R})$ όμως δεν παρουσιάζεται η ίδια συμμετρία. Το μόνο που μπορεί να ειπωθεί για τον χώρο TL^1 είναι ότι τα στοιχεία του είναι ομοιόμορφα συνεχή και μηδενίζονται στο άπειρο. Ο L^1 είναι χώρος Banach με νόρμα

$$\|f\| = \int |f(x)|dx$$

και δυικό χώρο τον χώρο L^∞ των σχεδόν παντού φραγμένων συναρτήσεων. Η σημαντική ιδιότητα του L^1 είναι ότι είναι άλγεβρα μέσω των συνελίξεων

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy, \quad \|f * g\| \leq \|f\|\|g\|,$$

και έχουμε

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f\mathcal{F}g, \quad \mathcal{F}(e^{ixa}f(x)) = \mathcal{F}f(x-a),$$

τα οποία έπονται απο το θεώρημα του Fubini. Συνεπώς ο μετασχηματισμός $A = \mathcal{F}L^1$ είναι δακτύλιος μέσω του κατά σημείο πολλαπλασιασμού και όπως πριν, τα στοιχεία του θα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, $F = \mathcal{F}f$. Αν μεταφέρουμε την νόρμα του L^1 στο $A = \mathcal{F}L^1$ έτσι ώστε $\|F\| = \|f\|$, έχουμε

$$\|FG\| = \|F\|\|G\|.$$

Ο πολλαπλασιασμός με εκθετικό,$f(t) \to e^{iat}f(t)$, είναι γραμμική ισομετρία του L^1 και ο μετασχηματισμός $(T_aF)(x) = F(x+a)$ είναι γραμμική ισομετρία του A.

Το υποσύνολο A_0 του A του οποίου τα στοιχεία έχουν συμπαγή φορέα, πιο συγκεκριμένα ο χώρος B_0 παραπάνω, θα παίξει σημαντικό ρόλο στη συνέχεια.

Λήμμα 2.1. *1: Ο A_0 είναι πυκνός στον A*

Απόδειξη. Έστω $0 \neq F \in A_0$ F A_0. Τότε όλοι οι μετασχηματισμοί της $F \in A_0$ και επιπλέον όλα τα γινόμενα $e^{ita}F(t)$ για $a \in \mathbb{R}$. Έτσι, αν $g \in L^\infty$ είναι κάθετη στο $T^{-1}A_0$ έχουμε

$$\int e^{itb}f(t-a)g(t)dt = 0$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι $f(t-a)g(t) = 0$ σχεδόν για κάθε f και ένα αριθμήσιμο πυκνό σύνολο από αριθμούς a. Αφού $f \neq 0$ αυτό δείχνει ότι $g(t) = 0$ σχεδόν παντού. Έτσι ο A_0 είναι πυκνός στον A. □

2.2 Το θεώρημα του Wiener

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα, το θεώρημα του Wiener παίρνει τώρα την παρακάτω μορφή στην οποία και θα αποδειχθεί:

Θεώρημα 2.2 (Θεώρημα Wiener)**.** *Αν $F \in A$ και $F(x) \neq 0$ για κάθε x, τότε AF είναι πυκνό στον A.*

Σημειώστε οτι αν η F παίρνει την τιμή 0 σε κάποιο x_0 τότε όλα τα στοιχεία του AF μηδενίζονται στο x_0 και έτσι η κλειστή θήκη του AF δεν ισούται με A.

Η απόδειξη εξαρτάται απο το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.3. *Ας υποθέσουμε οτι το $F \in A$ και $g \in B_0$. Τότε*

$$\|(F(x) - F(0))G(x/\epsilon)\|$$

τείνει στο 0 καθώς το $\epsilon > 0$ τείνει στο 0.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $G(x/\epsilon)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $\epsilon g(t\epsilon)$. Ως εκ τούτου $(F(x) - F(0))G(x/\epsilon)$ ο μετασχηματισμός Fourier της

$$\int f(s)\epsilon g(\epsilon(t-s))ds - \epsilon g(\epsilon t)\int f(s)ds.$$

Μετά απο μια αλλαγή της μεταβλητής $t \to t\epsilon$, παρατηρούμε ότι η νόρμα του είναι

$$\int dt \int |f^{'}(s)(g(t-\epsilon s) - g(t)|ds.$$

Απο το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, το διπλό ολοκλήρωμα τείνει στο μηδέν καθώς $\epsilon \to 0$. □

Απόδειξη του θεωρήματος. Έστω $P(x)$ το τοπικό μοναδιαίο στοιχείο, όπως ορίζεται παραπάνω, δηλαδή $P(x)$ είναι μια κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση η οποία μηδενίζεται όταν $|x| > 2$ και ισούται με 1 όταν $|x| < 1$. Εξετάστε το πηλίκο

$$\frac{P(x/\epsilon)}{F(x)}.$$

και παρατηρήστε ότι, απο υπόθεση $F(x) \neq 0$ για κάθε x. Όταν $P(x/\epsilon) \neq 0$, τότε $P(x/2\epsilon)$ ισούται με 1 και ως εκ τούτου μπορούμε να ξαναγράψουμε το πηλίκο ως

$$\frac{P(x/\epsilon)}{F(0) + P(x/2\epsilon)(F(x) - F(0))}$$

Απο το λήμμα η νόρμα του

$$G_\epsilon(x) = P(x/2\epsilon)(F(x) - F(0))$$

τείνει στο μηδέν ως προς ϵ. Ως εκ τούτου, αν το ϵ ειναι αρκετά μικρό, μπορούμε να εκφράσουμε το τελευταίο πηλίκο ως μια γεωμετρική σειρά. Το αποτέλεσμα είναι οτι

$$P(x/\epsilon) = (F(x)/F(0))\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(G_\epsilon(x)/F(0))^k$$

όπου η σειρά συγκλίνει και η δεξιά πλευρά ανήκει στο A. Με άλλα λόγια, $P(x/\epsilon) \in F(x)A$ όταν $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό. Δεδομένου ότι $|F(x)|$ έχει θετικό κάτω φράγμα σε κάθε συμπαγές διάστημα, όλοι οι $P(\frac{x+b}{\epsilon})$ του $P(x/\epsilon)$ ανήκουν στο FA όταν το b είναι φραγμένο και το ϵ είναι αρκετά μικρό.

Έχουμε ότι $P(x/\epsilon) = 1$ στο διάστημα $[-\epsilon, \epsilon]$ και ένα άθροισμα από κατάλληλους μετασχηματισμούς θα ισούται με 1 σε κάθε διάστημα. Έτσι σε κάθε διάστημα $[-N, N]$ υπάρχει συνάρτηση στον FA που ισούται με 1. Αλλά αυτό προφανώς σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του A_0 ανήκει στο FA. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

2.3 Το θεώρημα του Wiener για σειρές Fourier

Έστω $L^1(\mathbb{Z})$ ο χώρος των ακολουθιών $f = (f(n))$ για τις οποίες

$$\|f\| = \sum |f(n)| < \infty.$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $F = \mathcal{F}f$ της f είναι τότε μια συνεχής συνάρτηση

$$F(x) = \sum f(n)e^{-inx}$$

στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ για την οποία $F(-\pi) = F(\pi)$. Μπορούμε επιπλέον να θεωρήσουμε $F(x)$ να είναι μια συνεχής συνάρτηση στην μοναδιαία περιφέρεια και συνεπώς να αντικαταστήσουμε την ευθεία των πραγματικών από ένα συμπαγές σύνολο. Έστω A ο χώρος αυτών των συναρτήσεων με νόρμα

$$\|F\| = \|f\|.$$

Με άλλα λόγια A είναι ο χώρος των 2π-περιοδικών συναρτήσεων με συγκλίνουσα σειρά Fourier. Σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση, ο δακτύλιος A περιέχει τώρα μονάδα 1. Μπορούμε τώρα να επαναλάβουμε το προηγούμενο επιχείρημα για την συνάρτηση $P(x/\epsilon)$ και να αποδείξουμε το αποτέλεσμα του Wiener ότι η $1/F(x)$ έχει συγκλίνουσα σειρά Fourier όταν $F(x) \neq 0$ παντού.

Παρατήρηση 2.4. Στην πραγματικότητα ο Wiener χρησιμοποίησε ένα διαφορετικό επιχείρημα βασισμένος στο δεδομένο ότι, αν

$$|f(0)| > \sum_{n \neq 0} |f(n)|,$$

τότε $F(x) \neq 0$ παντού και η $1/F(x)$ μπορεί να γραφτεί σε κλειστή μορφή ως συνάρτηση στον A. Στην συνέχεια απέδειξε ότι αν $F(0) \neq 0$, ο σταθερός όρος κυριαρχεί με τον ίδιο τρόπο που η σειρά Fourier της

$$F_\epsilon(x) = P(x/\epsilon) + F(0)(1 - P(x/\epsilon))$$

είναι αρκετά μικρή όταν $\epsilon > 0$. Έτσι η $1/F_\epsilon(x)$ ανήκει στο A. Επειδή $F_\epsilon(x) = 1$ κοντά στο 0, ο Wiener μπόρεσε τότε να ολοκληρώσει την απόδειξη με το ίδιο επιχείρημα όπως παραπάνω.

Παρατήρηση 2.5. Η απόδειξη του θεωρήματος πυκνότητας του Wiener για ολοκληρώματα Fourier χρησιμοποιεί τα αντίστοιχα αποτελέσματα για σειρές Fourier, για συναρτήσεις οι οποίες είναι περιοδικές σε ένα μεγάλο διάστημα I και μηδενίζονται κοντά στα άκρα. Σε αυτή την περίπτωση η σειρά Fourier προσεγγίζει το ολοκλήρωμα Fourier όταν το διάστημα τείνει να γίνει ολόκληρη η ευθεία των πραγματικών αριθμών.

2.4 Δακτύλιοι με νόρμα

Ο χώρος $L^1(\mathbb{Z})$ είναι χώρος Banach με νόρμα $\|f\|$ και μεταθετικός δακτύλιος συνελίξεων $f * g$ για τις οποίες $\|f * g\| \leq \|f\|\|g\|$. Επιπλέον, έχει μοναδιαίο στοιχείο e που ορίζεται ως $e(n) = \delta(n)$, όπου $\delta(x)$ είναι η συνάρτηση Δέλτα. Έχουμε έτσι ένα χώρο Banach ο οποίος είναι επιπλέον ένας μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο.

Στα άρθρα του το 1941, ο I.Gelfand εξέτασε τέτοια αντικείμενα τα οποία ο ίδιος αποκαλούσε δακτυλίους με νόρμα, δηλαδή δακτυλίους $R = (e, a, b, c, ...)$, οι οποίοι είναι μιγαδικοί χώροι Banach με νόρμα $|a|$, μεταθετικό πολλαπλασιασμό $ab = ba$ για τον οποίο $|ab| \leq |a||b|$ και μοναδιαίο e νόρμας 1. Η γεωμετρική σειρά

$$\frac{e}{a-b} = a^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} b^k a^{-k},$$

όπου a είναι αντιστρέψιμο και b μικρό, δείχνει ότι το σύνολο E των αντιστρέψιμων στοιχείων είναι ανοιχτό. Αν R είναι ένα σώμα, δηλαδή όλα τα στοιχεία του είναι αντιστρέψιμα εκτός του 0, και ένα στοιχείο του a δεν είναι μιγαδικό πολλαπλάσιο του e, τότε

$$(e + za)^{-1}$$

είναι ακέραια αναλυτική συνάρτηση με τιμές στο R και συνεπώς σταθερά η οποία πρέπει να είναι μηδέν. Αυτή η αντίφαση δείχνει ότι ένα σώμα με νόρμα αποτελείται από όλα τα μιγαδικά πολλαπλάσια του μοναδιαίου στοιχείου.

Στη γενική περίπτωση, τώρα θα θεωρήσουμε ιδεώδη του R, εξ ορισμού διαφορετικών του R. Κάθε τέτοιο ιδεώδες δεν τέμνει την μπάλα $E : |e - a| < 1$ και έτσι περιέχεται στο κλειστό σύνολο $R - E$. Έπεται ότι η κλειστή θήκη ενός ιδεώδους είναι ιδεώδες και έτσι γράφεται ως ένωση από αύξουσα ακολουθία απο ιδεώδη. Συνεπώς έχουμε την ακόλουθη παρατήρηση η οποία βασίζεται στην ύπαρξη μοναδιαίου:

Κάθε ιδεώδες περιέχεται σε μεγιστικό ιδεώδες

Στην συγκεκριμένη περίπτωση ένα ιδεώδες I λέγεται μεγιστικό αν δεν υπάρχει κάποιο ιδεώδες γνήσια μεταξύ I και R. Αν I είναι ένα μεγιστικό ιδεώδες, το πηλίκο $x = R/I$ είναι σώμα και αντιστρόφως. Έτσι η απεικόνιση πηλίκο $a \to a(x)$ μπορεί να ταυτιστεί με έναν ομομορφισμό $a \to a(x)$ στο μιγαδικό επίπεδο τέτοιο ώστε

$$(ab)(x) = a(x)b(x), \quad |a(x)| \leq |a|,$$

όπου το ιδεώδες I αποτελείται από όλα τα a τέτοια ώστε $a(x) = 0$.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε ένα χώρο μεγιστικών ιδεωδών X ως ένα σύνολο από στοιχεία x, καθένα από τα οποία αντιστοιχίζεται σε ένα μεγιστικό ιδεώδες. Το πρώτο κεντρικό θεώρημα της θεωρίας του Gelfand είναι:

Θεώρημα 2.6. *Ένα στοιχείο $a \in R$ είναι αντιστρέψιμο αν και μόνο αν $a(x) \neq 0$ για κάθε x στο χώρο μεγιστικών ιδεωδών.*

Στην πραγματικότητα, το Ra δεν περιέχεται τότε σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες και πρέπει να είναι το ίδιο το R.

2.5 Εφαρμογή στην απόλυτη σύγκλιση σειρών Fourier

Πότε $R = L^1(\mathbb{Z})$; Τι είναι ο χώρος μεγιστικών ιδεωδών X; Για να απαντήσουμε σε αυτή την ερώτηση αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο $L^1(\mathbb{Z})$ έχει γεννήτορα g νόρμας 1, όπου $g(n) = \delta(n-1)$, με αντίστροφο $g^{-1}(n) = \delta(n+1)$ νόρμας 1. Τα στοιχεία του R έχουν τη μορφή

$$a = \sum c_n g^n, \quad |a| = \sum |c_n|.$$

Αν $x = R/I$ και I είναι ένα μεγιστικό ιδεώδες, συνεπάγεται ότι $|g(x)| \leq 1$ και $|g^{-1}| \leq 1$. Επομένως $|g(x)| = 1$ και

$$a(x) = \sum c_n g(x)^n$$

είναι πράγματι ένας ομομορφισμός του R στο μιγαδικό επίπεδο. Γράφοντας $a(x) = e^{it}$ έχουμε ότι την απόλυτη σύγκλιση της σειράς Fourier και το θεώρημα του Wiener.

Ο δακτύλιος των συνελίξεων των απολύτως συγκλινουσών μέτρων έχει επίσης μοναδιαίο, και εδώ οι μέθοδοι του Gelfand δίνουν μια πολύ απλή απόδειξη ενός θεωρήματος των Wiener κια Pitt, το οποίο αναφέρει ότι ένα μέτρο είναι αντιστρέψιμο αν το ολικό μέτρο του μοναδιαίου τμήματός του είναι μικρότερο από το ελάχιστο φράγμα των απολύτων τιμών του μετασχηματισμού Fourier. Για τον χώρο $L^1(R)$ όμως, ο οποίος είναι δακτύλιος χωρίς μοναδιαίο, αυτό το απλό επιχείρημα με τα μεγιστικά ιδεώδη δεν λειτουργεί και επιπλέον επιχειρήματα είναι απαραίτητα. Η ενασχόληση μαζί του όμως ήρθε η ώρα να σταματήσει εδώ, προκειμένου να επιστρέψουμε στον χώρο $L^1(\mathbb{R})$ και στο θεώρημα του Wiener, βλέποντας το από διαφορετική σκοπιά και παρουσιάζοντας μεθόδους που εφαρμόζονται στον $\mathbb{R}^n$ αλλά και σε άλλες ομάδες.

2.6 Επέκταση της θεωρίας του Wiener

Η δυνατότητα επέκτασης της Ανάλυσης Fourier από την ευθεία των πραγματικών αριθμών σε τοπικά συμπαγής αβελιανές ομάδες παρατηρήθηκε για πρώτη φορά από τον Andre Weil σε ένα βιβλίο που άσκησε μεγάλη επιρροή στη μαθηματική κοινότητα το 1938. Αν $G = (x, y, ...)$ με πρόσθεση $x + y$ και αντίστροφο $-x$ είναι τέτοια ομάδα, τότε έχει μέτρο $\mu \geq 0$ το οποίο είναι πεπερασμένο σε συμπαγή υποσύνολα C και παραμένει αμετάβλητο στις μεταφορές, δηλαδή $\mu(C + y) = \mu(C)$. Μπορούμε να ορίσουμε τον χώρο $L^1(G)$ των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με πεπερασμένη νόρμα

$$\|f\| = \int_G |f(x)| d\mu(x).$$

Για τέτοιες συναρτήσεις υπάρχει μεταθετική και προσεταιριστική συνέλιξη $f * g$. Η δυική ομάδα Γ είναι ο χώρος των συνεχών ομομορφισμών $x \to (x, \xi)$ της G στην μοναδιαία περιφέρεια U. Παραδείγματα: αν $G = \mathbb{R}^\mu, \Gamma = \mathbb{Z}^\nu$, αν $G = \mathbb{Z}^\nu, \Gamma = U^\nu$, αν G είναι διακριτός, Γ είναι συμπαγής.

Τότε ο μετασχηματισμός Fourier

$$\mathcal{F}f = \int f(x) e^{i(x,\xi)} d\mu(x)$$

απεικονίζει τον $L^1(G)$ στον υπόχωρο $L^\infty(\Gamma)$ του οποίου τα στοιχεία μηδενίζονται στο άπειρο και το συνηθισμένο ολοκλήρωμα Fourier και η σειρά Fourier είναι ειδικές περιπτώσεις στη θεωρία αυτή.

Τη δεκαετία του 1940 έγιναν αρκετές προσπάθειες επέκτασης της κλασικής αρμονικής ανάλυσης στο γενικότερο πλαίσιο των τοπικά συμπαγών αβελιανών ομάδων. Έτσι και εμείς θα προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε την θεωρία του Wiener σε τοπικά συμπαγής αβελιανές ομάδες. Για λόγους απλότητας θα ασχοληθούμε με τον $G = \mathbb{R}^\nu$ και $\Gamma = \widehat{\mathbb{R}}^\nu$, αλλά τα αποτελέσματα μπορούν να επεκταθούν και στη γενικότερη περίπτωση.

Προτού ξεκινήσουμε όμως θα κατασκευάσουμε τοπικές μονάδες.

2.7 Τοπικές μονάδες και η ανάλυσή τους

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της $f \in L^1 = L^1(G)$ ως

$$\widehat{f}(\xi) = \int e^{ix\xi} f(x) dx, \quad x\xi = \sum x_k \xi_k.$$

Έστω A το σύνολο των μετασχηματισμών Fourier των συναρτήσεων που ανήκουν στον L^1.

Μια τοπική μονάδα είναι τώρα μια συνάρτηση στον L^1 της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier έχει συμπαγή φορέα και ισούται με 1 σε κάποιο μη-κενό ανοιχτό σύνολο $U \subset \widehat{\mathbb{R}}^\nu$.

Λήμμα 2.7. *Δοθέντος ενός φραγμένου ανοιχτού μη-κενού υποσυνόλου $V \in \widehat{\mathbb{R}}^\nu$, υπάρχει τοπική μονάδα $F \in L^1$ τέτοια ώστε ο $\widehat{F}$ έχει ως φορέα το V και ισούται με 1 σε μια γειτονιά U του 0. Επιπλέον,*

(1) $$|F\| \leq 2c, \quad c = (2\pi)^\nu$$

και

(2) $$|(T_x - 1)F\| \leq 4c \sup_V |e^{ix\xi} - 1|$$

όπου T_x είναι μεταφορά κατά x, $(T_xF)(y) = F(x + y)$.

Παρατηρήστε ότι η (1.2) σημαίνει οτι η $F(x)$ είναι κοντά στο 1 για κάθε συμπαγές σύνολο όταν το V είναι μικρό.

Απόδειξη. Υπάρχουν ανοιχτά σύνολα W τέτοια ώστε $\widehat{W} \subset V$ και συνεπώς και μια ανοιχτή γειτονιά U γύρω από το 0 τέτοια ώστε $W \pm U \subset V$. Έστω $|V|$ ο όγκος του V και ομοίως για το $|W|$. Επιλέγουμε W τέτοιο ώστε $4|W| > |V|$. Έστω $\widehat{f}, \widehat{g}$ οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των V και W. Μπορούμε τώρα να δούμε ότι η

$$F(x) = f(x)g(x)/|W|$$

έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες. Έχουμε ότι $\|f\|_2 = \sqrt{|V|}$ και $\|g\|_2 = \sqrt{|W|}$ οπότε από την ταυτότητα του Parseval,

$$\|F\| \leq \|f\|_2\|g\|_2/|W| \leq c\sqrt{|V|/|W|} \leq 2c$$

και, αφού

$$\widehat{F}(\xi) = \int \widehat{f}(\xi - \eta)\widehat{g}(\eta)d\eta,$$

η $\widehat{F}$ έχει ως φορέα το V και ισούται με 1 στο U. Επιπλέον

$$|W|\|(T_x - 1)F\| \leq \|(T_x - 1)f\|_2\|g\|_2 + \|f\|_2\|(T_x - 1)g\|_2.$$

Εφόσον ο μετασχηματισμός Fourier της $(T_x - 1)f$ είναι $(e^{ix\xi} - 1)\widehat{f}(\xi)$, με αντικατάσταση των $\|f\|_2$ και $\|g\|_2$ αποδεικνύεται η (1.2). □

Η απόδειξη του επόμενου λήμματος είναι προφανής και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Λήμμα 2.8. *Αν U είναι ένα ανοιχτό σύνολο που καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος $U_1, ..., U_m$ και $F_1, ..., F_m$ είναι τοπικές μονάδες τέτοιες ώστε η F_k να ισούται με 1 στο U_k, τότε*

$$1 - (1 - \widehat{F}_1)...(1 - \widehat{F}_m)$$

είναι τοπική μονάδα που ισούται με 1 στο U.

2.8 L^1 πρότυπα και θεώρημα Beurling

Ο δυικός χώρος του $L^1 = L^1(G)$ είναι ο L^∞ και αν $g \in L^\infty, f \in L^1$, η συνέλιξη

$$f * g \in L^\infty$$

είναι καλά ορισμένη. Με άλλα λόγια, ο L^∞ είναι $L^1 - module$.

Ας ορίσουμε τώρα την έννοια του φάσματος και του μηδενικού συνόλου για συναρτήσεις στον L^1 και στον L^∞.

Ορισμός. Ένα σημείο $\xi \in \Gamma$ ανήκει στο φάσμα $sp(g)$ μιας συνάρτησης $g \in L^1(G)$ ή $L^\infty(G)$ αν, για κάθε περιοχή N του ξ, υπάρχει $f \in L^1$ τέτοιο ώστε η $\widehat{f}$ έχει ως φορέα το N και $f * g \neq 0$. Αν αντιθέτως $f * g = 0$ κάτω απο τις ίδιες συνθήκες, τότε το ξ ανήκει στο μηδενικό σύνολο $N(g)$ του g.

Παρατήρηση 2.9. Έπεται από τον ορισμό ότι τα $sp(g)$ και $N(g)$ είναι κλειστά σύνολα και τα εσωτερικά τους είναι ξένα. Όταν $g \in L^1$, ο μετασχηματισμός Fourier της $f * g$ είναι $\widehat{f}\widehat{g}$ και συνεπώς ο $sp(g)$ είναι ο φορέας της $\widehat{g}$. Όταν $g \in L^\infty, o sp(g)$ είναι επίσης ο φορέας του μετασχηματισμού Fourier της g, θεωρούμενο ως κατανομή. Αλλά αφού τα επιχειρήματά μας προορίζονται να εφαρμοστούν για τοπικά συμπαγής αβελιανές ομάδες, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της κατανομής. Ακόμα όμως μπορούμε φανταζόμαστε το $sp(g)$ ως τον φορέα του μετασχηματισμού Fourier.

Μέσω πολλαπλασιασμού με εκθετική συνάρτηση το φάσμα μεταφέρεται. Για την ακρίβεια, ο μετασχηματισμός Fourier της $e^{ixn}g(x)$ είναι ο $\widehat{g}(\xi - \eta)$ όταν $g \in L^1$ και με μικρούς υπολογισμούς μπορούμε να δούμε ότι το ίδιο ισχύει όταν $g \in L^\infty$. Ομοίως μια μεταφορά στο G αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό με κάποιο εκθετικό στη Γ.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το θεώρημα του Beuling το οποίο συνεπάγεται το θεώρημα του Wiener.

Θεώρημα 2.10 (Θεώρημα Beuling). *Έστω ότι $g \in L^\infty$ και $\xi \in sp(g)$. Έστω επιπλέον F_n μια φραγμένη ακολουθία από τοπικές μονάδες των οποίων οι μετασχηματισμοί Fourier ισούνται με 1 κοντά στο ξ και το φάσμα τους τείνει στο ξ. Τότε όλα τα όρια των συναρτήσεων $F_n * g$ μέσω τοπικά ομοιόμορφης σύγκλισης είναι πολλαπλάσια του $e^{ix\xi}$.*

Παρατήρηση 2.11. Το παραπάνω θεώρημα συνεπάγεται το θεώρημα του Wiener, επειδή αν ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης $f \in L^1$ δεν έχει ρίζες και $f * g = 0$ για κάποια $0 \neq g \in L^\infty$, τότε το φάσμα $sp(g)$ πρέπει να περιέχει ένα σημείο ξ τέτοιο ώστε $\widehat{f}(\xi) = 0$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση. Άρα $f * g = 0$ συνεπάγεται ότι $g = 0$, οπότε ο $L^1 * f$ πρέπει να είναι πυκνός στον L^1.

Παρατήρηση 2.12. Στο πρωτότυπο κείμενο, ο Beurling διαφοροποιήθηκε από τον Wiener διατυπώνοντας το θεώρημά του ως ιδιότητα των φραγμένων και ομοιόμορφα συνεχών πραγματικών συναρτήσεων $f(x)$: Αν f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν, τότε υπάρχει εκθετική συνάρτηση e^{ixt} και γραμμικός συνδυασμός μεταφορών,

$$g(x) = \sum c_k f(x - kx),$$

που τείνει στην εκθετική συνάρτηση ομοιόμορφα στα συμπαγή σύνολα και $\sup |g(x)| \to 1$. Στην παρακάτω απόδειξη θεωρώντας ως μοναδική συνθήκη ότι η$f(x)$ είναι σχεδόν παντού φραγμένη και όχι μηδέν, υπάρχουν συνελίξεις

$$\int f(x - y)g(y)dy, g \in L^1$$

οι οποίες τείνουν στην εκθετική συνάρτηση με τον προαναφερθέντα τρόπο. Όταν η $f(x)$ είναι επιπλέον ομοιόμορφα συνεχής, τέτοια ολοκληρώματα μπορούν να προσεγγιστούν μέσω γραμμικών συνδυασμών μεταφορών.

Απόδειξη. Με κατάλληλη μεταφορά του φάσματος $sp(f)$, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $\xi = 0$. Θεωρούμε τις τοπικές μονάδες G_n όπως στο Λήμμα 1.7 το φάσμα των οποίων τείνει στο 0 και $G_n * F_n = F_n$. Τότε κανένα $g_n = G_n * g$ δεν μηδενίζεται, η ακολουθία $\|g_n\|$ είναι φραγμένη, $sp(g_n) \to 0$ και από το λήμμα,

$$|g_n(x) - g_n(0)| = |F_n * g_n(x) - F_n g_n(0)| \leq \|(T_x - 1)F_n\| \|g\|_\infty$$

τείνει στο 0 τοπικά ομοιόμορφα καθώς $n \to \infty$. Συνεπώς κάθε υπακολουθία της (g_n) έχει υπακολουθία (g_{n_k}) για την οποία το $g_{n_k}(0)$ συγκλίνει και άρα η $g_{n_k}(x)$ είναι φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει σε μια σταθερά c, ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα. $\square$

Παρατήρηση 2.13. Αν κανονικοποιήσουμε και μεταφέρουμε τις g_n έτσι ώστε

$$\|g_n\|_\infty = 1, g_n$$

$$1 \geq g_n(0) \geq 1/n,$$

η ακολουθία έχει νόρμα 1 και συγκλίνει στο 1 τοπικά ομοιόμορφα, ενώ αν το φάσμα $sp(g) = 0$, τότε $g_n(x) = c \neq 0$.

2.9 Φάσματα και μηδενικά σύνολα ιδεωδών

Το μηδενικό σύνολο $N(I)$ ιδεώδους I ορίζεται ως η τομή όλων των $N(f)$ για $f \in I$,ενώ το φάσμα $sp(I)$ ως η ένωση όλων των $sp(f)$. Και τα δύο υποσύνολα του Γ είναι κλειστά και παραμένουν αμετάβλητα ως προς την κλειστή θήκη του ιδεώδους στον $L^1(G)$.

Μετά απο τους παραπάνω ορισμούς, το ακόλουθο ερώτημα μοιάζει φυσιολογικό: υπάρχουν διαφορετικά κλειστά ιδεώδη με το ίδιο μηδενικό σύνολο· Το 1948 ο Laurent Schwartz απέδειξε πολύ απλά ότι η απάντηση είναι αρνητική όταν το μηδενικό σύνολο είναι η μοναδιαία σφαίρα E του $\Gamma = R^3$. Για την ακρίβεια, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του αμετάβλητου ως προς μοναδιαίες στροφές μέτρου $d\mu(\xi)$ στην E αποδεικνύεται πως είναι $sin|x|/|x|$. Συνεπώς, αν f και $\widehat{f}$ είναι ομαλές συναρτήσεις, τότε

$$\int f(x)\frac{x_1}{|x|}sin|x|dx = c\int \frac{\partial \widehat{f}(\xi)}{\partial \xi_1}d\mu(\xi).$$

Το αριστερό μέλος είναι συνεχής συνάρτηση $f \in L^1$ η οποία μηδενίζεται στην κλειστή θήκη I όλων των ομαλών συναρτήσεων f για τις οποίες

$$\widehat{f}(\xi) = 0, \frac{\partial \widehat{f}(\xi)}{\partial \xi_1} = 0$$

στο E αλλά δεν μηδενίζονται στο σύνολο J των ομαλών συναρτήσεων οι οποίες ικανοποιούν την πρωτη ισότητα. Επιπλέον, τόσο το I όσο και το J παραμένουν αμετάβλητα ως προς τις μεταφορές. Συνεπώς $N(\overline{I}) = N(\overline{J}) = E$ αλλά $\overline{I} \neq \overline{J}$.

2.10 Πότε ένα στοιχείο ανήκει σε ένα ιδεώδες;

Έπειτα από το αντιπαράδειγμα παραπάνω, θα θέλαμε να μάθουμε γενικότερα κριτήρια που σχετίζονται με το φάσμα και να διασφαλίζουν ότι κάποια δεδομένη συνάρτηση ανήκει σε συγκεκριμένο ιδεώδες.

Θεώρημα 2.14. *Αν $I \subset L^1$ είναι κλειστό ιδεώδες, $f \in L^1$ και $N(I) \cap sp(f)$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, τότε $f \in I$.*

Παρατήρηση 2.15. Εφόσον $N(I)$ και $sp(f)$ είναι κλειστά σύνολα, η τομή τους είναι κλειστό, αριθμήσιμο σύνολο.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$I * g = 0 \Rightarrow f * g = 0$$

για κάθε $0 \neq g \in L^{\infty}$. Από την πρώτη ισότητα, το φάσμα της g έχει κενή τομή με το εσωτερικό του φάσματος του I. Με άλλα λόγια, $sp(g) \subset N(I)$. Από την υπόθεση $N(I) \cap sp(f)$ θα πρέπει να έχει απομονωμένα σημεία ξ. Συνεπώς αν H είναι τοπική μονάδα με φορέα αρκετά κοντά στο ξ, η συνάρτηση $H * f * g$ είναι ανεξάρτητη του H,δηλαδή $H_1 * f * g = H_2 * f * g$ για H_1, H_2 όπως το H. Από το θεώρημα του Beurling, υπάρχει ακολουθία H_n από τοπικές μονάδες των οποίων τα φάσματα τείνουν στο ξ τέτοια ώστε τα όρια της $H_n * g$ είναι πολλαπλάσια του $e^{ix\xi}$ και συνεπώς $\lim_{n\to\infty} H_n * f * g = k\widehat{f}(\xi) = 0$. Άρα $H * f * g = 0$ όταν H είναι τοπική μονάδα της οποίας το φάσμα είναι αρκετά κοντά στο ξ. □

Εφόσον κάθε υποσύνολο της τομής $N(I) \cap sp(g)$ πρέπει να έχει απομονωμένα σημεία, έπεται ότι $H * f * g = 0$ για κάθε τοπική μονάδα με φάσμα κοντά στο $N(I) \cap sp(g)$. Συνεπώς το ίδιο ισχύει για κάθε τοπική μονάδα και τελικά $f * g = 0$.

2.11 Permitted σύνολα

Αν $C \subset \Gamma$ κλειστό, έστω $I(C)$ το ιδεώδες των συναρτήσεων $f \in L^1(G)$ για τις οποίες $\widehat{f}$ μηδενίζεται στο C. Θα λέμε ότι το σύνολο C είναι permitted αν $I(C)$ είναι το μόνο ιδεώδες για το οποίο το μηδενικό σύνολο είναι το C.

Το θεώρημα παραπάνω δείχνει απλώς ότι ένα πεπερασμένο σύνολο από σημεία στον G ή ένα πεπερασμένο σύνολο από κλειστά διαστήματα στον R είναι permitted. Όμως υπάρχουν και πολλά άλλα σύνολα που είναι permitted, τουλάχιστον στον $\Gamma = \widehat{R}^{\nu}$, για παράδειγμα σύνολα radial με την ιδιότητα να περιέχουν ένα σημείο ξ τέτοιο ώστε

$$\cap_{a\geq 1} a(C - \xi) \supset C - \xi$$

για κάποιο ξ. Στην απόδειξη μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\xi = 0$. Έστω ότι $\widehat{f}$ μηδενίζεται στο C. Τότε $\widehat{f}(\xi/a)$ μηδενίζεται και σε γειτονιά του C και είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $f_a(x) = a^n f(ax)$ η οποία ανήκει στο $I(C)$. Εφόσον $\lim_{a\to 1+} \|f_a - f\| = 0$, έχουμε ότι $f \in I(C)$.

Το ταξίδι μας που είχε ως αφετηρία το θεώρημα του Wiener και συνεχίστηκε ως μια περιπλάνηση στο χώρο της Αρμονικής Ανάλυσης πλησιάζει στο τέλος του. Για όσους ενδιαφέρονται στο βιβλίο του Rudin (1962) περιέχονται περεταίρω πληροφορίες, ενώ μεταξύ άλλων υπάρχει απόδειξη για το εξής αρνητικό αποτέλεσμα του Malliavin: υπάρχουν κλειστά σύνολα σε κάθε μη-διακριτή αβελιανή ομάδα που δεν είναι permitted.

Αναφορές

[1] J. Korevaar, *Tauberian Theory: A Century of Developments*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.

[2] Lars Gårding, *Some Points of Analysis, and Their History* American Mathematical Society, 1997.